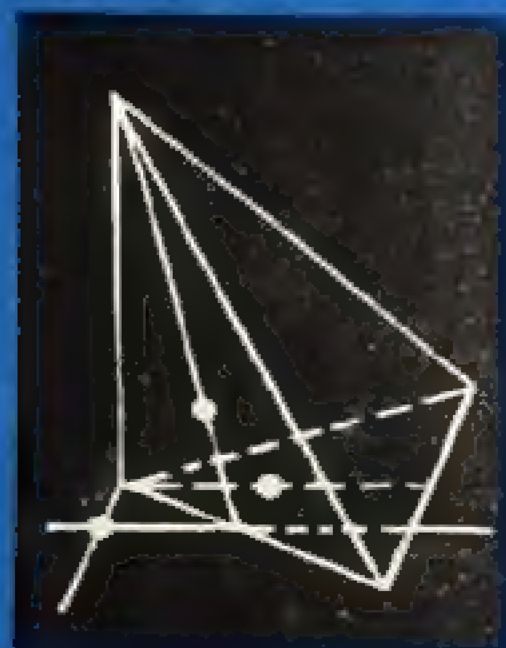
РИЈАЗИЈЈАТ МҮӘЛЛИМИНИН КИТАБХАНАСЫ

М. АБДУЛЛАЈЕВ
И. ӘЛИСКӘНДӘРОВ

ҺӘНДӘСӘ МӘСӘЛӘЛӘРИ

(ҺӘЛЛИ ИЛӘ)



МААРИФ — 1985

РИЈАЗИЈЈАТ МҮӘЛЛИМИНИН КИТАБХАНАСЫ

М. АБДУЛЛАЈЕВ, И. ӘЛИСКӘНДӘРОВ

ҺӘНДӘСӘ МӘСӘЛӘЛӘРИ

СТЕРЕОМЕТРИЈА

(һәлли илә)

„МААРИФ“ НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы — 1985

22.15
А14

М. Абдуллајев, И. Әлискәндәров. Һәндәсә мәсәләләри (һәлли илә). «Ријазијјат мүәллиминин китабханасы» серијасындан, «Маариф» нәшријјаты, 1983 ил, 281 сәһ.

9—10-чу синфин «Һәндәсә» курсуну әһатә едән бу китабда 327 мәсәләнин һәлли вә көстәриши верилмишдир. Орта мәктәбләрин јухары синиф шакирдләри, али мәктәбләрин гәбул имтаһанларына һазырлашан вә һазырлыг шө'бәләриндә охујан мә'зунлар үчүн јазылмыш бу китабдан шакирдләрин олимпиадаја һазырлашмасында да истифадә етмәк олар.

1—246-чы мәсәләләри М. Абдуллајев, 247—327-чи мәсәләләри исә И. Әлискәндәров јазмышдыр.

Әсәрин әлјазмасына В. И. Ленин адына АПИ-нин «Елементар ријазијјат вә ријазијјатын тәдриси методикасы» кафедрасы рә'ј вермишдир.

А $\frac{60501-000}{М652-84}$ 148—84 4306010000

МҮГӘДДИМӘ

Фәза тәсәввүрү вә мәнтиги тәфәккүрүн инкишафында стереометрија мәсәләләринин мүһүм әһәмијјәти олдуғуну нәзәрә алараг, китабда 326 мәсәләнин һәлли вә көстәришләр верилир. Мәсәләләрин әксәријјәти тригонометријанын тәтбиги илә һәлл едилир. Бундан әлавә, китабда чәбри тәтбиг әсасында координат үсулу илә һәндәсә мәсәләләринин һәлли, чохүзлүнүн кәсикләринин гурулмасы, векторларын һәндәсә мәсәләләринә тәтбиги, саһәләрин, һәчмләрин, сәтһләрин мүәјјән интеграл илә һесабланмасы, максимума вә минимума аид мәсәләләрин вә с. һәлли дә верилмишдир.

Мәсәләләрин һәллинә башламаздан әввәл курсун мөвзулары—стереометрија, тригонометрија, вектор һесабы, Нјутон—Лејбнис дүстуру вә с. тәкрар едилмәлидир.

Китабдан истифадә едән охучулар әввәлчә бир нечә мәсәләнин һәллини өјрәниб сонракы мәсәләләрин һәллини мүстәгил јеринә јетирә биләрләр.

Мәсәләләрин һамысыны ардычыл һәлл етмәк лазым дејил, әввәлчә охучуја садә көрүнән мәсәләләрин һәллиндән башламаг, тәдричән, нисбәтән чәтин һәлл олунан мәсәләләрә кечмәк фајдалыдыр.

Мәсәләләрин 200-дән чоху чәтин һәлл олунан вә олимпиада типлидир. Белә мәсәләләрин сечилмәсиндә вә һәллин сәмәрәли үсулларла верилмәсиндә мүәллиф-

ләр чохиллик мүәллимлик тәчрүбәләриндән истифадә етмишләр.

Китабдан орта мәктәбин риjазиjjат мүәллимләри, шакирдләр, али мәктәбин һазырлыг курсунда охуjан мә'зунлар истифадә едә биләрләр.

Китаб барәдә геjдләрини, тәклиф вә арзуларыны көндәрәчәк охучулара мүәллифләр әввәлчәдән өз миннәтдарлығыны билдирирләр. Геjдләри бу үнвана көндәрмәк лазымдыр: Бакы—122, Ә. Тағызадә күчәси, 4, „Мaaриф" нәшриjjаты.

МӘСӘЛӘЛӘР

I. ПРИЗМА

1. Дүзбучаглы паралелепипедин a диагоналы отурачаг мүстәвиси илә α вә бөjүк jан үзлә β бучағы әмәлә кәтирир. Паралелепипедин һәчмини тапын.

2. Паралелепипедин бир тәпәдән чыхан үч тилинин узунлуглары a, b вә c олсун; a вә b тилләри гаршылыглы перпендикулjар, c тили исә онларын һәр бири илә α бучағы әмәлә кәтирир. Паралелепипедин һәчмини вә c тилинин отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдиjи бучағы тапын.

3. Дүзкүн үчбучаглы призманын отурачағынын тәрәфи a олсун. Үст отурачағын ики тәпәси алт отурачағын гаршыдакы тәрәфләринин ортасы илә бирләшдирилмишдир. Бу дүз хәтләр арасында отурачаг мүстәвисинә тәрәф чеврилмиш бучаг α олсун. Призманын һәчмини тапын.

4. $ABCA_1B_1C_1$ дүз үчбучаглы призмадыр, $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Отурачағын BC тилиндән вә о бири отурачагда бу тил гаршысындакы тәпәдән мүстәви кечирилмишдир. Кәсиjин бу тәпәдәки бучағы β-jа бәрабәрдир. Призманын jан сәтһини тапын.

5. Үчбучаглы призмада отурачағын тәрәфләри a-jа бәрабәрдир. Алт отурачағын мәркәзи үст отурачағын бир тәпәсинин проjексиjасыдыр. Jан тилләр алт отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Призманын jан сәтһини тапын.

6. Тили a олан кубун отурачағынын тәрәфиндән кечән мүстәви отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир вә кубу бири үчбучаглы, о бири исә дөрдбучаглы олан ики призмаjа аjырыр. Призмаларын һәчмини тапын.

7. Дүзкүн үчбучаглы призманын һүндүрлүјү h-а бәрабәрдир. Отурачағын тилләринин бириндән вә о бири отурачагда бу тил гаршысындакы тәпәдән мүстәви кечирилмишдир. Кәсијин призма тәпәсиндәки бучағы 2α оларса, кәсијин саһәсини тапын.

8. Дүз призманын һүндүрлүјү h, отурачағы исә r радиуслу даирә харичинә чәкилмиш вә ити бучағы α олан дүзбучаглы трапесијадыр. Призманын һәчмини тапын.

9. Дүз призманын отурачағы трапесијадыр. Трапесијаларын бәрабәр олмајан отурачагларындан кечән мүстәви призманын отурачаглары илә α бучағы әмәлә кәтирир. Кәсијин һәр бир диагоналы d, бу диагоналлар арасында отурачаглара тәрәф чеврилмиш бучаг β олсун. Призманын һәчмини тапын.

10. Дүзкүн үчбучаглы призманын отурачағынын тәрәфиндән мүстәви кечирилмишдир; бу мүстәви призманын јан үзләрини араларындакы бучаг α олан дүз хәтләр үзрә кәсир. Һәмин мүстәви илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы тапын.

11. Дүзкүн дөрдбучаглы призманын алт отурачағынын диагоналы вә үст отурачағынын бир тәпәсиндән кечирилмиш мүстәви, јан үзләрини араларындакы бучаг α олан дүз хәтләр бојунча кәсир. Отурачағын тәрәфи a оларса, призманын һәчмини тапын.

12. Отурачағынын тәрәфи a олан дүзкүн дөрдбучаглы призманын отурачағынын ики гоншу тәрәфинин ортасындан кечирилмиш мүстәви үч јан тили кәсир вә отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Алынан кәсији гурун вә кәсијин саһәсини һесаблајын.

13. Дүзкүн дөрдбучаглы призманын бир тәпәсиндән кечән кәсикдә ити бучағы α олан ромб алыныр. Кәсән мүстәви отурачағын бир диагоналына паралел олуб, отурачаг мүстәвиси илә φ бучағы әмәлә кәтирир, $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ олдуғуну исбат един.

14. Ики паралелепипедин алт отурачаглары ортаг олуб, тәрәфи a олан квадратдыр. Бунлардан биринин үст отурачағынын ики тәрәфи дикәринин ујғун тәрәфләринин узантысыдыр. Паралелепипедләрин ики јан үзү отурачаға ејни α бучағы гәдәр мејл етмиш, галан ики јан үзү исә она перпендикулјардыр. Паралелепипедләрин ортаг һиссәсинин һәчмини тапын.

15. Дүз призманын отурачағы, һипотенузу илә катетинин чәми m вә онларын арасындакы бучаг α олан дүзбучаглы үчбучагдыр. О бири катетдән вә онун гаршысында үст отурачағын тәпәсиндән кечирилмиш мүстәви отурачагла β бучағы әмәлә кәтирир. Алынан призма һиссәләринин һәчмини тапын.

16. Дүзбучаглы паралелепипедин d диагоналы ики гоншу јан үз илә α бучағы әмәлә кәтирир. Паралелепипедин һәчмини вә бир тәпәдән чыхан үч тилин учларындан кечирилмиш кәсијин отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучағы тапын.

17. Дүз призманын отурачағы R радиуслу јарымдаирә дахилинә чәкилмиш трапесијадыр. Трапесијанын бөјүк отурачағы јарымдаирәнин диаметридир, кичик отурачағы исә 2α гөвсүнү кәрир. Трапесијанын јан тәрәфиндән кечән призманын јан үзүнүн диагоналы отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Призманын һәчмини тапын.

18. Дүз призманын отурачағы дүзбучаглы үчбучагдыр: $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ вә $AC = b$, AB һипотенузундан кечән јан үзүн диагоналы илә AC катетиндән кечән јан үз арасындакы бучаг β-дыр. Призманын һәчмини тапын.

19. Дүзкүн үчбучаглы призманын отурачағынын тәрәфи a, јан үзләриндән биринин диагоналы илә о бири јан үз арасындакы бучаг α-дыр. Призманын јан сәтһинин саһәсини тапын.

20. Дүзкүн дөрдбучаглы призманын отурачағынын тәрәфи a, јан тили исә $4a$-ја бәрабәрдир. Призманын диагоналындан кечән вә отурачағын диагоналына паралел олан кәсијин саһәсини тапын.

21. Дүзкүн дөрдбучаглы призмада алт отурачағын диагоналы илә үст отурачағын бир тәпәсиндән кечән мүстәви призманын ики гоншу јан үзүнү араларындакы бучаг α олан дүз хәтләр бојунча кәсир. Алынан пирамиданын там сәтһинин саһәси S оларса, призманын там сәтһинин саһәсини тапын.

22. Дүз призманын отурачағы саһәси S, ити бучағы α вә јан тәрәфи кичик отурачағына бәрабәр олан бәрабәрјанлы трапесијадыр. Призманын диагоналы отурачагла $\frac{\alpha}{2}$ бучағыны әмәлә кәтирир. Призманын һәчмини тапын.

23. Дүз призманын отурачағы, периметри $2P$, отурачаға битишик бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Бу үчбучағын отурачағы вә гаршысындакы јан тилин учундан мүстәви кечирилмишдир. Кәсикдә алынан үчбучағын отурачағына битишик бучағы β оларса, призманын һәчмини тапын.

24. Диагоналы јан үз илә α бучағы әмәлә кәтирән дүзкүн дөрдбучаглы призманын отурачағынын тәрәфинин a олдуғуну биләрәк, призманын һәчмини тапын.

25. Паралелепипедин бүтүн үзләри тәрәфи a вә ити бучағы α олан ромбдур. Онун һәчмини тапын.

26. Дүзбучаглы паралелепипедин бир тәпәсиндән чыхан отурачаг диагоналындан вә бөјүк үзүн диагоналындан мүстәви кечирилмишдир. Бу диагоналлар арасындакы бучаг β-дыр. Паралелепипедин отурачағы харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусу R-ә, отурачаг диагоналлары арасындакы кичик бучаг 2α-ја бәрабәрдир. Паралелепипедин јан сәтһинин саһәсини, алынан кәсијин саһәсини вә бу кәсијин отурачаг мүстәвисинә мејл бучағыны тапын.

27. Дүз призманын отурачағы, јан тәрәфи a, отурачаға битишик бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Призманын үст отурачағындакы үчбучағын отурачағы илә бунун гаршысындакы алт отурачағын тәпәсиндән кечирилмиш мүстәви алт отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Призманын јан сәтһинин саһәсини вә алынан пирамиданын һәчмини тапын.

28. Маил призманын отурачағы катети $BC = a$ олан ABC үчбучағыдыр. Бу катетин орта нөгтәси үст отурачағын B_1 тәпәсинин пројексијасыдыр. Һәмин катетиндән вә AB һипотенузундан кечән јан үзләр арасындакы бучаг α-дыр. Призманын јан тили отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Призманын јан сәтһинин саһәсини тапын.

29. $ABCA_1B_1C_1$ призмасынын отурачағы $AB = AC$ вә $\angle BAC = 2\alpha$ олан үчбучагдыр. Алт отурачағын харичинә чәкилмиш R радиуслу чеврәнин мәркәзи, үст отурачағынын A_1 тәпәсинин пројексијасыдыр. AA_1 јан тили илә AB тили арасындакы бучаг 2α-дыр. Призманын һәчмини вә јан сәтһинин саһәсини тапын.

30. Призманын отурачағы тәрәфи a олан дүзкүн үчбучагдыр. Үст отурачағын A_1 тәпәсинин пројексијасы алт отурачағын BC тәрәфинин орта нөгтәсинә дүшүр. AA_1 икиүзлү бучағынын 2α олдуғуну биләрәк, призманын һәчмини вә јан сәтһинин саһәсини тапын.

31. Призманын отурачағы, $BC = a$ вә $AB = AC$ олан үчбучагдыр. AA_1 тили BC тилинә перпендикулјар олуб, b-јә бәрабәрдир. AA_1 икиүзлү бучағы α оларса, призманын һәчмини тапын.

32. Дүзбучаглы паралелепипедин ики гоншу јан үзүнүн кәсишмәјән диагоналлары отурачаг мүстәвиси илә α вә β бучаглары әмәлә кәтирир. Бу диагоналлар арасындакы бучағы тапын.

33. Тили a олан кубун ики гоншу үзүнүн чарпаз диагоналлары арасындакы мәсафәни тапын.

34. Дүзбучаглы паралелепипедин үч өлчүсүнүн чәми 5, отурачағынын саһәси исә 1 оларса, онун өлчүләринин һансы гијмәтиндә там сәтһинин саһәси ән бөјүк олар?

35. Дүзкүн үчбучаглы призманын јан үзүнүн диагоналы илә о бири јан үзү арасындакы бучаг α, призманын јан тили H оларса, онун там сәтһинин саһәсини тапын.

36. Маил, мүстәви илә α бучағы әмәлә кәтирир. Бу бучағын тәпәсиндән верилән мүстәви үзәриндә маилин пројексијасы илә β бучағы әмәлә кәтирән дүз хәтт чәкилмишдир. Һәмин дүз хәтлә маил арасындакы бучағы тә'јин един.

37. Дүзбучаглы паралелепипедин отурачағынын диагоналы d, отурачағынын диагоналлары арасындакы бучаг α, отурачағын бөјүк тәрәфиндән кечән диагонал мүстәвиси илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучаг исә β оларса, паралелепипедин һәчмини тапын.

38. Паралелепипедин һәр тили 1 см; онун тәпәләриндән бириндәки үзләрдә олан үч ити бучагдан һәр бири 2α-дыр. Паралелепипедин һәчмини тә'јин един, һәлдән алынан дүстуру арашдырын.

39. Дүзкүн дөрдбучаглы призманын d-јә бәрабәр олан диагоналы јан үзлә α бучағы әмәлә кәтирир. Призманын јан сәтһинин саһәсини тә'јин един. Һәлдән алынан дүстуру арашдырын.

40. Һүндүрлүјү h олан дүз дөрдбучаглы призманын диагоналлары отурачаг мүстәвиси илә α вә β бучағы әмәлә кәтирир; отурачағын диагоналлары арасындакы бучаг γ олдуғуна көрә призманын һәчмини тә'јин един.

41. Дүзкүн үчбучаглы призмада отурачағын тәрәфиндән отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән бир мүстәви кечирилмишдир. Призманын отурачағынын тәрәфи a оларса, алынмыш кәсиjин саһәсини тапын.

42. Дүз дөрдбучаглы призмада отурачағын саһәси m, диагонал кәсикләринин саһәси p вә q, бунларын арасындакы икиүзлү бучаг α оларса, призманын һәчмини тапын.

II. ПИРАМИДА

43. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын јан тили a, јан тилин отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдиjи бучаг $60°$ олдуғуну биләрәк бу пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

44. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын һүндүрлүjү h-дыр, јан тили отурачаг мүстәвиси илә $60°$ бучаг әмәлә кәтирир. Тәпәдән $\frac{h}{3}$ мәсафәдә олан һүндүрлүк үзәриндәки нөгтәдән јан тилләрдән биринә перпендикулјар мүстәви кечирилмишдир. Кәсиjин саһәсини тапын.

45. Дүзкүн үчбучаглы пирамидада јан үз отурачаг мүстәвиси илә вә о бири ики гоншу јан үзүн әмәлә кәтирдиjи бучаг уjғун оларат α вә β олдуғуну биләрәк, бу бучагларын косинуслары арасындакы асылылығы тапын.

46. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын јан тили l олуб, гаршыдакы тил илә тәпәдә әмәлә кәтирдиjи бучаг 2α-дыр, $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$. $ABCD$ отурачағынын A тәпәсиндән отурачағын BD диагоналына паралел мүстәви пирамиданын харичинә чәкилмиш күрәнин мәркәзиндән кечир. Кәсиjин саһәсини тапын.

47. $ABCD$ дүзкүн тетраедринин BCD үзүнүн M мәркәзи илә AC тилинин N ортасыны бирләшдирән MN парчасы илә ABD үзүнүн D тәпәсиндән чәкилән DE һүндүрлүjү арасындакы бучағы тапын.

48. Үчбучаглы пирамиданын тәпәсиндәки мүстәви бучаглардан бири дүз бучагдыр. Бу пирамиданын һүндүрлүjүнүн, отурачағын һүндүрлүкләринин кәсишмә нөгтәсиндән кечдиjини биләрәк, галан тәпә мүстәви бучагларыны тапын.

49. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын b јан тили отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Отурачағын диагоналындан бу јан тилә паралел мүстәви кечирилмишдир. Кәсиjин саһәсини тапын.

50. Дүзкүн $SABC$ пирамидасында отурачағын тили a, отурачаг тилиндәки икиүзлү бучаг α-дыр. Отурачағын мәркәзиндән SA вә BC тилләринә паралел кечирилмиш кәсиjин саһәсини тапын.

51. Дүзкүн үчбучаглы пирамидада отурачағын тәрәфи a-дыр, јан тил отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Отурачағын мәркәзиндән пирамиданын кәсишмәjән ики тилинә паралел мүстәви кечирилмишдир. Кәсиjин саһәсини тапын.

52. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын отурачаг тәрәфи a, отурачаг тилиндәки икиүзлү бучаг 2α-дыр. Верилән икиүзлү бучағы јарыја бөлән кәсиjин саһәсини тапын.

53. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын һүндүрлүjү h, отурачаг тилиндәки икиүзлү бучағы α-дыр, һүндүрлүjүн ортасындан јан үзә паралел мүстәви кечирилмишдир. Алынан кәсиjин саһәсини тапын.

54. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын тәпә мүстәви бучағы α вә отурачағын тили a-дыр. Отурачағын диагоналындан онун гаршысындакы јан тилә перпендикулјар мүстәви кечирилмишдир. Алынан кәсиjин саһәсини тапын.

55. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын h һүндүрлүjү јан тил илә α бучағы әмәлә кәтирир. Отурачағын диагоналындан отурачагла φ бучағы әмәлә кәтирән мүстәви кечирилмишдир. Кәсиjин саһәсини тапын.

56. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын отурачаг тәрәфи a вә тәпә мүстәви бучағы 2α-дыр. Отурачағын тәрәфиндән гаршыдакы јан тилә перпендикулјар мүстәви кечирилмишдир. Алынан кәсиjин саһәсини тапын.

57. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамидада отурачағын тәрәфи a-дыр, јан тили отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын отурачағынын мәркәзиндән ики гоншу јан үзә ики перпендикулјардан мүстәви кечирилмишдир. Алынан кәсиjин саһәсини тапын.

58. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамидада отурачағын тили a олуб, јан тил отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Отурачағын бир тәпәсиндән онун гар-

шысындакы јан тилә перпендикулјар мүстәви кечирилмишдир. Кәсијин саһәсини тапын.

59. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамидада отурачағын тәрәфиндән гаршыдакы јан үзә перпендикулјар мүстәви кечирилмишдир. Отурачағын тәрәфи a вә отурачагдакы икиүзлү бучаг α-дыр. Кәсијин саһәсини тапын.

60. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын a јан тили, отурачагла α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын тәпәсиндән кечиб отурачағын тәрәфинә парапел олан вә отурачагла β бучағы әмәлә кәтирән мүстәви кечирилмишдир. Алынан кәсијин саһәсини тапын. (Ики һалы нәзәрдән кечирин.)

61. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын тилләри a-ја бәрабәрдир. Бунун отурачағынын ики гоншу тәрәфинин вә һүндүрлүјүнүн ортасындан кечән кәсијин саһәсини тапын.

62. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын һүндүрлүјү илә отурачағынын тәрәфи $m:n$ нисбәтиндәдир. Отурачағын диагоналындан кечән мүстәвинин әмәлә кәтирдији кәсик, пирамиданын диагонал кәсијинә бәрабәрдир. Пирамиданын отурачағы илә һәмин мүстәви арасындакы бучағы тапын.

63. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын һүндүрлүјү h, јан тилиндәки икиүзлү бучаг 2α-дыр. Пирамиданын һәчмини тапын.

64. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын отурачаг тәрәфи a, отурачаг тилиндәки икиүзлү бучаг α-дыр. Отурачағын ики тәрәфинин ортасындан отурачаг мүстәвисинә чәкилән перпендикулјар кәсик пирамиданы ики һиссәјә бөлүр. Бу һиссәләрдән кичијинин һәчмини тапын.

65. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын отурачағынын бир тәрәфиндән гаршыдакы тилә перпендикулјар кечирилмиш мүстәви бу тили $m:n$ нисбәтиндә бөлүр. Отурачағын тәрәфи q-дүр. Пирамиданын там сәтһини тапын.

66. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын отурачағынын тәрәфи a, отурачагдакы икиүзлү бучаг α олсун. Пирамиданын отурачағына парапел олан кәсијин саһәси, алынмыш кәсик пирамиданын јан сәтһинин саһәсинә бәрабәрдир. Кәсән мүстәви пирамиданын тәпәсиндән һансы мәсафәдәдир?

67. $SABCDE$ дүзкүн бешбучаглы пирамидасында

отурачағын тәрәфи q, јан тили b олсун. Отурачағын A вә C тәпәсиндән, SD вә SE јан тилләринин ортасындан мүстәви кечирилмишдир. Кәсијин саһәсини тапын.

68. Пирамиданын бүтүн јан тилләри отурачаг мүстәвиси илә бәрабәр бучаглар әмәлә кәтирәрсә, бу тилләр бир-биринә бәрабәр олар вә пирамиданын һүндүрлүјү отурачағын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечәр. Буну исбат един.

69. Үчбучаглы пирамиданын јан тилләри l, тәпәдәки ики мүстәви бучағын һәр бири α, үчүнчүсү β-дыр. Пирамиданын һәчмини тапын.

70. Пирамиданын отурачағы периметри $2P$, отурачага јанашыг бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Јан үзләр отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын јан сәтһинин саһәсини тапын.

71. Пирамиданын отурачағы парапел, тәрәфләри a вә b олан $(a>b)$ бәрабәрјанлы трапесијадыр. Пирамиданын бүтүн јан үзләри отурачаг мүстәвиси илә ејни α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын сәтһинин саһәсини тапын.

72. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфи a вә тәпә бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Јан тилләр отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Бу пирамиданын һүндүрлүјүндән вә α бучағынын тәпәсиндән мүстәви кечирилмишдир. Алынан кәсијин саһәсини тапын.

73. Пирамиданын отурачағы һипотенузу c вә ити бучағы α олан дүзбучаглы үчбучагдыр. Бүтүн јан тилләр отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини вә тәпәдәки мүстәви бучагларыны тапын.

74. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфи a, отурачаға јанашыг бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Јан тилләр отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һүндүрлүјүндән вә α бучағынын тәпәсиндән кечән кәсијин саһәсини тапын.

75. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфләри вә кичик отурачағы a, ити бучағы α олан трапесијадыр. Јан тилләр отурачаг мүстәвиси илә φ бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

76. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфи a, тәпә бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Јан тилләри

отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

77. Үчбучаглы пирамиданын ики јан үзү бәрабәрјанлы дүзбучаглы үчбучагдыр. Онларын b һипотенузлары арасындакы бучаг α-ја бәрабәрдир. Пирамиданын һәчмини тапмалы.

78. Пирамиданын отурачағы тәрәфи a, ити бучағы α олан ромбдур. Араларындакы бучаг α олан ики гоншу јан үз отурачаға перпендикулјар, галан ики үз исә отурачагла φ бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын јан сәтһинин саһәсини тапын.

79. Һүндүрлүјү h олан пирамиданын отурачағы дүзбучаглыдыр. Ики гоншу јан үз отурачаға перпендикулјар олуб, галан ики үз исә отурачагла α вә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын јан сәтһинин саһәсини тапын.

80. Пирамиданын отурачағы дүзбучаглыдыр. Јан тилләрдән һәр бири m олуб, отурачағын гоншу тәрәфләри илә α вә β бучаглары әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

81. Һәчми V олан $SABC$ пирамидасында отурачағынын ики бучағы α вә β-дыр. C бучағынын тәнбөләни вә пирамиданын SC тилиндән мүстәви кечирилмишдир. Бу мүстәви пирамида һәчмини һансы һиссәләрә бөләр?

82. Пирамиданын отурачағы тәрәфи a олан квадратдыр. Јан үзләрдән икиси отурачаға перпендикулјар олуб, галан ики үз исә отурачагла β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын сәтһинин саһәсини тапын.

83. $SABCD$ пирамидасынын отурачағы саһәси S вә ити бучағы α олан паралелограмдыр. SB вә SD тилләри отурачағын BC вә AD тәрәфләринә перпендикулјар олуб, отурачаг мүстәвиси илә φ бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

84. Пирамиданын отурачағы ити бучағы α олан дүзбучаглы үчбучагдыр. Јан тилләрин узунлуғу b олуб, отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

85. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын һәчми V, отурачаг мүстәвиси илә јан үз арасындакы бучаг α-дыр. Пирамиданын там сәтһинин саһәсини тапын.

86. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын тәпәдәки мүстәви бучагларынын һәр бири α, отурачаг тәпәсиндән

бу тәпәнин гаршысындакы јан үзә ендирилән перпендикулјар d-дир. Пирамиданын һәчмини тапын.

87. Бүтүн јан үзләри отурачаг мүстәвиси илә ејни α бучағы әмәлә кәтирән һәр һансы пирамиданын јан вә там сәтһинин саһәләри $S_{\text{јан}} = \frac{Q}{\cos\alpha}$ вә $S_{\text{там}} = \frac{2Q\cos^2\frac{2\alpha}{2}}{\cos\alpha}$ дүстурлары илә ифадә олунур. Бурада Q отурачағын саһәсидир. Буну исбат един.

88. Пирамиданын отурачағы, тәрәфи a вә ити бучағы α олан ромбдур. Отурачаға јанашы бүтүн икиүзлү бучаглар φ олдуғуна көрә там сәтһини тапын.

89. Пирамиданын отурачағы ити бучағы α олан дүзбучаглы үчбучагдыр. Бу үчбучағын дахилинә чәкилән чеврәнин радиусу r-ә бәрабәрдир. Пирамиданын һәр бир јан үзү отурачаг мүстәвиси илә α бучағыны әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини, јан вә там сәтһини тапын.

90. Отурачағы бәрабәртәрәфли үчбучаг олан пирамиданын һүндүрлүјү отурачағын һүндүрлүјүнә бәрабәрдир. Пирамиданын һүндүрлүјү отурачағын елә нөгтәсиндән кечир ки, бу нөгтә отурачағын тәрәфләриндән m, n вә p мәсафәдәдир. Пирамиданын һәчмини тапын.

91. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын апофеми c вә диагонал кәсијинин саһәси p-дир. Бу пирамидада јан үзлә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы вә отурачағын тәрәфини тапын.

92. Пирамиданын отурачағы паралел тәрәфләри a вә b $(a > b)$ олан трапесијадыр. Бу трапесијанын һүндүрлүјү пирамиданын һүндүрлүјүнә бәрабәрдир. Трапесијанын саһәсини јарыја бөлән отурачағына паралел дүз хәтдән вә пирамиданын тәпәсиндән кечән мүстәви отурачагла α бучағыны әмәлә кәтирир. Кәсијин саһәси S оларса, пирамиданын һәчмини тапын.

93. $SABC$ пирамидасынын отурачағы $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, SBC јан үзү отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, SBA вә SCA үзләри исә отурачаг мүстәвиси илә φ бучағыны әмәлә кәтирир. Пирамиданын јан сәтһини тапын.

94. Һипотенузу c вә ити бучағы α олан дүзбучаглы үчбучаг пирамиданын отурачағыдыр. α бучағына бити-

шик катетдән кечән јан үз отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, галан ики јан үз исә отурачагла α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

95. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфи b, тәпә бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Пирамиданын јан тилләри бу тил гаршысындакы отурачағын тәрәфинә перпендикулјардыр. α бучағынын гаршысында дуран икиүзлү бучаг φ-дир. Пирамиданын һәчмини тапын.

96. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфләри вә кичик отурачағы бир-биринә бәрабәр олан трапесијадыр. Трапесијанын бөјүк отурачағы a вә бөјүк бучағы α-дыр. Јан тилләри отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

97. Пирамиданын отурачағы трапесијадыр. Бу трапесијанын диагоналы онун бөјүк отурачағы илә α бучағы әмәлә кәтирәрәк, јан тәрәфинә перпендикулјардыр. Пирамиданын бүтүн јан тилләри бир-биринә бәрабәрдир. Трапесијанын бөјүк отурачағындан кечән үзүн саһәси S, тәпәдәки мүстәви бучағы 2α-дыр. Пирамиданын һәчмини вә отурачаг тилләриндәки икиүзлү бучаглары тапын.

98. Пирамиданын отурачағы дахилинә чәкилмиш чеврәнин радиусу r, ити бучағы α олан ромбдур. Отурачаг тилиндәки бүтүн икиүзлү бучаглар β-дыр. Пирамиданын һәчмини вә там сәтһинин саһәсини тапын.

99. Һүндүрлүјү h олан пирамиданын отурачағы квадратдыр. Онун ики гаршы үзү бәрабәрјанлы үчбучаг олуб, бири отурачагла α, о бири исә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини вә о бири үзләрин отурачаға мејл бучагларыны тапын.

100. Пирамиданын отурачағы дүзбучаглыдыр. Јан үзләрдән бири, дүз бучағы пирамида тәпәсиндә вә ити бучағы α олан үчбучагдыр. Бу үз отурачаг мүстәвисинә перпендикулјардыр, онун гаршысындакы үз исә отурачагла $\beta = 90° - \alpha$ бучағыны әмәлә кәтирир. Һәмин үзләрин һүндүрлүкләри чәми m-дир. Пирамиданын һәчмини вә галан ики үзүн саһәләри чәмини тапын.

101. Дүзкүн алтыбучаглы пирамиданын јан тилиндәки икиүзлү бучаг φ-дир. Тәпәдәки мүстәви бучағы тапын.

102. Пирамиданын отурачағы дүзкүн алтыбучаглыдыр. SA јан тили отурачаг мүстәвисинә перпендикулјардыр, ән бөјүк јан тили исә бу мүстәви илә α бучаг-

үзләри отурачаг мүстәвиси илә бәрабәр бучаглар әмәлә кәтирир. Пирамиданын тәпәсиндән трапесијанын јан тәрәфләринә чәкилән перпендикулјарлардан кечән кәсик тәпә бучағы α, саһәси S олан үчбучагдыр. Пирамиданын һәчмини тапын.

104. Пирамиданын отурачағы дүзбучаглы үчбучагдыр; пирамиданын һүндүрлүјүнүн отурачағы дүз бучағын тәнбөләни илә һипотенузун кәсишмә нөгтәсидир. Отурачағын дүз бучаг тәпәсиндән кечән јан тил отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Дүз бучағын тәнбөләни m олуб, һипотенуз илә әмәлә кәтирдији бучаг 45°-дир. Пирамиданын һәчмини вә јан үзләрин отурачаға мејл бучагларыны тапын.

105. $SABC$ пирамидасында SCB үзү отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, $SC = SB = 1$ вә тәпәдәки мүстәви бучаглары 60°-дир. Пирамиданын һәчмини тапын.

106. Бир јан үзү отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар олан пирамиданын отурачағы тәрәфи a вә ити бучағы α олан ромбдур. Пирамиданын тәпәсиндән вә отурачағынын диагоналларындан кечән мүстәвиләр отурачаг мүстәвиси илә β вә φ бучаглары әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

107. Отурачағы квадрат олан пирамиданын јан үзләриндән икиси отурачаға перпендикулјардыр, галан икиси отурачагла α бучағы әмәлә кәтирир. Отурачаға перпендикулјар олан јан үзүн харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусу R оларса, пирамиданын там сәтһинин саһәсини тапын.

108. Пирамиданын отурачағы тәрәфи a олан дүзкүн үчбучагдыр. Пирамиданын һүндүрлүјү бу үчбучағын бир тәпәсиндән кечир. Бу тәпә гаршысындакы јан үз отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын јан сәтһинин саһәсини тапын.

109. Отурачағы дүзкүн үчбучаг олан пирамиданын јан үзләриндән бири отурачаға перпендикулјар, о бири икиси исә отурачагла φ бучағыны әмәлә кәтирир. Јан тилләрин отурачаг мүстәвисинә мејл бучагларыны тапын.

110. Дүзкүн n-бучаглы пирамидада јан тилдәки икиүзлү бучаг 2α-дыр. Отурачағын тилиндәки икиүзлү бучағы тапын.

111. Дүзкүн n-бучаглы пирамидада јан тилдәки икиүзлү бучаг 2α-дыр. Пирамиданын јан тилинин отурачаг мүстәвисинә мејл бучағыны тапын.

112. Дүзкүн n-бучаглы пирамидада отурачағын тәрәфи $2a$ вә јан тилдәки икиүзлү бучаг 2α оларса, пирамиданын һәчмини тапын.

113. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын һүндүрлүјүнүн орта нөгтәсиндән јан тилә вә јан үзә перпендикулјар парчалар чәкилмишдир. Бу парчаларын узунлуглары ујғун олараг h вә a оларса пирамиданын һәчмини тапын.

114. Дүзкүн $SABCD$ дөрдбучаглы пирамидасынын CD тилинин узантысы үзәриндә $MC = 3DC$ олмагла M нөгтәси көтүрүлмүшдүр. M вә B нөгтәләри вә SC тилинин орта нөгтәсиндән кечирилмиш мүстәви пирамиданын һәчмини һансы нисбәтдә бөләр?

115. Тили a олан дүзкүн тетраедрин ики гаршы тилинә паралел олан ән бөјүк кәсијин саһәсини тапын. Һәмин кәсик тетраедрин һәчмини һансы нисбәтдә бөләр?

116. Пирамиданын отурачағы бәрабәрјанлы үчбучаг олуб, онун отурачағына јанашы бучағы α-ја бәрабәрдир. Пирамиданын һәр бир јан үзү отурачаг мүстәвиси илә φ бучағы әмәлә кәтирир. Отурачағын дахилинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзи илә јан үзүн һүндүрлүјүнүн ортасыны бирләшдирән парчанын узунлуғу d оларса, пирамиданын там сәтһинин саһәсини тапын.

117. Һүндүрлүјү H олан пирамиданын отурачағы тәрәфи a олан ромбдур. Ики гоншу үз отурачагла α, үчүнчү үзү исә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини вә там сәтһинин саһәсини тапын.

118. Пирамиданын отурачағы $AB = AC$ олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Пирамиданын SO һүндүрлүјү отурачағынын AD һүндүрлүјүнүн ортасындан кечир. BC тилиндән пирамиданын AS јан тилинә отурачагла α бучағы әмәлә кәтирән перпендикулјар мүстәви кечирилмишдир. Пирамиданын отурачағына битишик һиссәсинин һәчми V оларса, о бири һиссәсинин һәчмини тапын.

119. Пирамиданын отурачағы һипотенузу c вә ити бучағы α олан үчбучагдыр. Һипотенуздан кечән јан үз

отурачаг мүстәвисинә перпендикулјардыр, галан ики јан үз отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

III. КӘСИК ПИРАМИДА

120. Үчбучаглы кәсик пирамидада кичик отурачағын бир тәрәфиндән бунун гаршысындакы јан тилә парален мүстәви кечирилмишдир. Отурачағын ујғун тәрәфләринин нисбәти 1:2 оларса, бу мүстәви кәсик пирамиданын һәчмини һансы нисбәтдә бөләр?

121. Дүзкүн үчбучаглы кәсик пирамиданын үст отурачағынын саһәси b, алт отурачағынын саһәси исә a-дыр. Үст отурачағынын O_1 мәркәзи илә алт отурачағынын O мәркәзини бирләшдирән дүз хәтт, O_1 нөгтәсини алт отурачағын һәр һансы бир тәпәси илә бирләшдирән дүз хәтт илә α бучағы әмәлә кәтирир. Кәсик пирамиданын һәчмини тапын.

122. Дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамиданын отурачагларынын тәрәфләри a вә b, һүндүрлүјү h-дыр. Кәсик пирамиданын јан үзү илә һәмин үзә паралел олан вә үст отурачағын бир тәрәфиндән кечән мүстәви арасында галан һиссәнин һәчмини тапын.

123. Дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамиданын һүндүрлүјү h, отурачагларынын тәрәфләри исә a вә b-дир. Бу пирамидә үст отурачаг диагоналынын учларындан бу диагонала перпендикулјар олараг кечирилән ики мүстәви илә гаршы-гаршыја дуран ики јандан кәсилмишдир. Кәсик пирамиданын галан һиссәсинин һәчмини тапын.

124. Дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамидадан ики пирамида кәсилмишдир. Буларын тәпәләри ортаг олуб, верилән кәсик пирамиданын диагоналларынын кәсишмә нөгтәсиндәдир, отурачаглары исә кәсик пирамиданын отурачагларыдыр. Кәсик пирамиданын һүндүрлүјү h, отурачагларынын тәрәфләри a вә b олдуғуна көрә онун галан һиссәсинин һәчмини тапын.

125. Кәсик пирамидада отурачагларын ујғун тәрәфләринин нисбәти $m:n$ кимидир. Орта кәсик онун һәчмини һансы нисбәтдә бөләр?

126. Дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамиданын отурачагларынын тәрәфләри a вә b-дир ($a > b$). Јан тил

отурачаг мүстәвиси илә α бучағыны әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини вә бөјүк отурачаг тилиндәки икиүзлү бучағы тапын.

127. Дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамиданын отурачагларынын гаршы-гаршыја дуран тәпәләриндән кечән мүстәви отурачаг диагоналына паралелдир. Кәсик пирамиданын отурачагларынын тәрәфләри a вә b, һүндүрлүјү h-дыр. Кәсијин саһәсини тапын.

IV. СИЛИНДР

128. Отурачағынын радиусу R олан бәрабәртәрәфли силиндрдә үст отурачаг чеврәсинин бир нөгтәси, алт отурачаг чеврәсинин бир нөгтәси илә дүз хәтлә бирләшдирилмишдир. Бу дүз хәтт отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Дүз хәтт силиндрин охундан һансы мәсафәдәдир?

129. Силиндрин H һүндүрлүјүнә паралел мүстәви илә кәсији квадратдыр, бу квадратын тәрәфи отурачаг чеврәсиндән α гөвсүнү ајырыр. Кәсиклә силиндрин оху арасындакы мәсафәни тапын.

130. Һүндүрлүјү h олан силиндрин охуна паралел вә ондан d мәсафәдә олан мүстәви илә кәсилмишдир. Кәсән мүстәви отурачаг чеврәсиндән α гөвсүнү ајырыр. Кәсијин саһәсини тапын.

131. Силиндрин отурачағынын вәтәри онун дахилинә чәкилмиш дүзкүн n-бучаглынын тәрәфинә бәрабәрдир. Вәтәрин учларыны о бир отурачағын мәркәзи илә бирләшдирдикдә саһәси Q вә тәпә бучағы α олан үчбучаг алыныр. Силиндрин һәчмини тапын.

132. Силиндрә, онун отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән тохунан дүз хәтт чәкилмишдир. Алт отурачағын мәркәзи илә тохунма нөгтәси арасындакы мәсафә d вә отурачағын радиусу R олдуғуна көрә, отурачағын мәркәзи илә дүз хәтт арасындакы мәсафәни тапын.

V. КОНУС ВӘ КӘСИК КОНУС

133. Кәсик конусун һүндүрлүјү h-дыр; доғуран алт отурачаг мүстәвиси илә α бучағыны әмәлә кәтирир вә јухары учундан кечән ох кәсијинин диагоналына перпендикулјардыр. Кәсик конусун јан сәтһинин саһәсини тапын.

134. Конусун һүндүрлүјү H олуб, доғураны отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Конусун һүндүрлүјүнә перпендикулјар кечирилмиш мүстәви онун сәтһини јарыја бөлүр. Кәсән мүстәви конусун тәпәсиндән һансы мәсафәдә олар?

135. Кәсик конусун отурачагларын саһәләри нисбәти 4, доғураны исә l олуб, отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Конусун һәчмини тапын.

136. Ики паралел мүстәви арасында, отурачағы бу мүстәвиләрдән бири вә тәпәси исә о бири мүстәви үзәриндә олан бир конус јерләшир. Конусун оху илә доғураны арасындакы бучаг α-ја бәрабәрдир. Охун конусун јан сәтһини ики нөгтәдә кәсән вә ортасындан охла β бучағы әмәлә кәтирән дүз хәттин паралел мүстәвиләр арасында галан парчасы a олсун. Дүз хәттин конус дахилиндә галан парчасыны тапын.

137. Конусун тәпәсиндән кечирилән мүстәви онун отурачаг чеврәсиндән α гөвсү ајырыр вә отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Алынмыш кәсијин тәпә бучағыны тапын.

138. Кәсик конусун отурачагларынын, јан сәтһинин саһәләри $m:n:p$ нисбәтиндәдир. Доғуранла алт отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы тапын.

139. Конусун бир-бири илә φ бучағы алтында кәсишән ики доғуранындан кечән мүстәви отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Кәсијин саһәси S олсун. Конусун һүндүрлүјүнү тапын.

140. Кәсик конусун ики доғураны арасындакы бучаг β олуб, онлардан кечән мүстәви конусун отурачагларыны узунлуглары m вә n олан $(m > n)$ вәтәрләрә бојунча кәсир. Бу вәтәрләрдән һәр бири α гөвсүнү кәсир. Кәсик конусун јан сәтһинин саһәсини тапын.

141. Бәрабәртәрәфли конусун отурачаг мүстәвисиндә (конусун харичиндә) отурачаг чеврәсиндән радиус гәдәр мәсафәдә бир нөгтә верилмишдир. Бу нөгтәдән конуса чәкилмиш ики тохунан мүстәви арасындакы бучағы тапын.

142. Кәсик конусда OX кәсијинин диагоналлары гаршылыглы перпендикулјардыр, l доғураны бөјүк отурачағын мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Кәсик конусун сәтһинин саһәсини вә һәчмини тапын.

VI. ФИГУРЛАРЫН КОМБИНАСИЈАСЫНА АИД МӘСӘЛӘЛӘР

143. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамидада отурачағын тәрәфи a, јан тилин отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучаг α олсун. Пирамиданын дахилинә чәкилмиш кубун дөрд тәпәси онун апофемләри үзәриндәдир. Кубун тилини тапын.

144. Пирамиданын отурачағы тәрәфи a олан квадратдыр. Јан үзләрдән икиси отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, бөјүк јан тил исә отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын дахилинә чәкилмиш дүзбучаглы паралелепипедин үст отурачағынын тәпәләри пирамиданын јан тилләри үзәриндә, алт отурачағынын тәпәләри исә пирамиданын отурачаг мүстәвиси үзәриндәдир. Паралелепипедин диагоналы отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирдијини биләрәк, онун һәчмини тапын.

145. Отурачағын тәрәфи a, јан тилинин отурачаға мејл бучағы α олан дүзкүн үчбучаглы пирамиданын дахилинә, тәпәси отурачағын мәркәзиндә, отурачағынын тәпәләри исә јан тилләр үзәриндә олан башга бир дүзкүн үчбучаглы пирамида чәкилмишдир. Дахилә чәкилмиш пирамиданын јан тили отурачаг мүстәвиси илә β бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һәчмини тапын.

146. Дүзкүн үчбучаглы ики пирамиданын һүндүрлүјү ортагдыр. Һәр бир пирамиданын тәпәси дикәринин отурачағынын мәркәзиндә јерләшир вә биринин јан тилләри илә о биринин јан тилләри кәсишир. Пирамидалардан биринин l јан тили һүндүрлүклә α бучағы, о биринин јан тили исә һүндүрлүклә β бучағы әмәлә кәтирир. Ики пирамида үчүн ортаг һиссәнин һәчмини тапын.

147. l доғураны отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән конусун дахилинә куб чәкилмишдир. Кубун тилини тапын.

148. Конусун l доғураны отурачагла α бучағы әмәлә кәтирир. Дахилә чәкилмиш бәрабәртәрәфли силиндрин отурачағы конусун отурачаг мүстәвиси үзәриндәдир. Силиндрин һүндүрлүјүнү тапын.

149. Ики конусун H һүндүрлүјү ортаг, отурачаглары исә паралелдир. Конуслардан биринин доғураны отурачаг мүстәвисинә α бучағы, о биринин доғураны исә β бучағы гәдәр мејл едир. Бу конусларын јан сәтһләринин кәсишмә хәттинин узунлуғуну тапын.

150. l доғураны, отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән конусун дахилинә, ох кәсијинин диагоналлары конусун доғуранларына паралел олан силиндр чәкилмишдир. Конус илә силиндрин јан сәтһләри арасында галан һиссәнин һәчмини тапын.

151. Доғураны a олан кәсик конусун дахилинә отурачағы онун кичик отурачағы илә ортаг олан бир конус чәкилмишдир; онун һүндүрлүјү кәсик конусун һүндүрлүјү илә ортаг, доғуранлары исә ујғун олараг кәсик конусун доғуранларына паралелдир. Кәсик конусун доғуранларыны узатсаг, онлар арасындакы бөјүк бучаг α олур. Һәр ики конусун сәтһләри арасында галан кәсик конус һиссәсинин һәчмини тапын.

152. Бәрабәртәрәфли конусун дахилинә дүзкүн n бучаглы пирамида чәкилмишдир. Пирамиданын отурачағынын тилиндәки икиүзлү бучағы тапын.

153. Ики конусун отурачаглары ортагдыр. Ортаг ох кәсијиндә конуслардан биринин доғураны о биринин гаршыдакы доғуранына перпендикулјардыр. Конуслардан биринин һәчми о бириндән ики дәфә кичикдир. Бөјүк конусун доғураны онларын отурачаг мүстәвиси илә һансы бучаг әмәлә кәтирәр?

154. Јан тили a-ја бәрабәр олуб, отурачаг мүстәвиси илә α бучағыны әмәлә кәтирән дүзкүн үчбучаглы пирамиданын дахилинә отурачағы пирамиданын отурачаг мүстәвиси үзәриндә олан бәрабәртәрәфли силиндр чәкилмишдир. Силиндрин һүндүрлүјүнү тапын.

155. Дүзкүн кәсик үчбучаглы пирамиданын дахилинә радиусу r олан күрә чәкилмишдир. Пирамиданын јан тили кичик отурачағынын тәрәфинә бәрабәрдир. Пирамиданын һәчмини тапын.

156. Доғураны a олан кәсик конусун дахилинә, отурачағы бунун кичик отурачағы илә ортаг олан там конус чәкилмишдир. Конусларын һүндүрлүкләри ортаг вә ујғун доғуранлары паралелдир. Кәсик конусун доғуранларыны узатдыгда онларын арасындакы бөјүк бучаг α олур. Кәсик конусун һәчмини тапын.

157. Дүзкүн үчбучаглы кәсик пирамиданын јан үзүнүн ити бучағы α, дахилинә чәкилмиш даирәнин радиусу исә r олсун. Пирамиданын харичинә чәкилмиш кәсик конусун јан сәтһинин саһәсини тапын.

158. Силиндрин дахилинә, отурачағынын бөјүк тәрәфи a, диагоналы илә бөјүк јан үзү арасындакы бучаг β вә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучаг исә α олан дүзбучаглы паралелепипед чәкилмишдир. Силиндрин јан сәтһинин саһәсини тапын.

159. Отурачағынын радиусу r олан конусун доғураны отурачаг мүстәвиси илә φ бучағы әмәлә кәтирир. Конусун харичинә отурачағы, ити бучағы α-ја бәрабәр дүзбучаглы үчбучаг олан пирамида чәкилмишдир. Пирамиданын һәчмини вә јан сәтһинин саһәсини тапын.

160. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын отурачағынын тәпәси гаршыдакы јан үздән b мәсафәдәдир. Пирамиданын апофеми отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын дахилинә чәкилмиш конусун сәтһинин саһәсини тапын.

161. Јан тили l, тәпәдәки мүстәви бучағы α олан дүзкүн үчбучаглы пирамиданын дахилинә конус чәкилмишдир. Конусун һәчмини тапын.

162. Конусун отурачағы дахилинә, тәрәфи a-ја бәрабәр олан квадрат чәкилмишдир. Конусун тәпәси илә квадратын бир тәрәфиндән кечән мүстәви конусу кәсдикдә, тәпә бучағы α олан үчбучаг алыныр. Конусун һәчмини вә сәтһинин саһәсини тапын.

163. Доғураны отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән конусун дахилинә дүзкүн дөрдбучаглы пирамида чәкилмишдир. Пирамиданын һәчми V олдуғуну биләрәк, конусун там сәтһини тапын.

164. Отурачаглары ортаг олан ики конус бир-бири ичәрисиндә елә гурулмушдур ки, онларын тәпәләри арасындакы мәсафә a-дыр. Бөјүк конусун ох кәсијинин тәпә бучағы α, кичик конусун ох кәсијинин тәпә бучағы исә β олсун. Һәр ики конусун сәтһләри илә һүдудланан һиссәнин һәчмини тапын.

165. Јан сәтһинин саһәси m, доғуранын отурачаг мүстәвисинә мејл бучағы φ олан конусун дахилинә, отурачағы дүзбучаглы үчбучаг олан пирамида чәкилмишдир. Бу үчбучағын ити бучағы α-дыр. Пирамиданын һәчмини тапын.

166. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын отурачаг тилиндәки икиүзлү бучаг α, апофеми m олсун. Пирамиданын јан тили илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы вә дахилә чәкилмиш конусун там сәтһини тапын.

167. Конусун отурачаг чеврәсинин радиусу R олсун. Доғураны отурачаг мүстәвиси илә $\frac{1}{2}\alpha$ бучағыны әмәлә кәтирир. Бу конусун дахилинә чәкилмиш дүз призманын отурачағы конусун отурачаг мүстәвиси үзәринә дүшүр. Призманын отурачағы дүзбучаглы үчбучаг олуб, ити бучағы α, призманын һүндүрлүјү исә онун үст отурачағынын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусуна бәрабәрдир. Призманын јан сәтһини тапын.

168. Тили a олан кубун дахилинә чәкилмиш конусун тәпәси кубун тәпәләриндән биридир. Отурачағын чеврәси гаршыдакы тәпәдә кәсишән үч үзә тохунур. Конусун доғураны онун оху илә α бучағы әмәлә кәтирир. Конусун отурачағынын радиусуну тапын.

169. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын јан тили b олуб, отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Бу пирамиданын дахилинә чәкилмиш бәрабәртәрәфли силиндрин доғуранларындан бири пирамиданын отурачағынын диагоналы үзәриндә, һәр бир отурачаг чеврәси исә пирамиданын ики гоншу јан үзүнә тохунур. Силиндрин отурачағынын радиусуну тапын.

170. Тәрәфи a-ја бәрабәр олан дүзкүн үчбучаг, бунун бир тәрәфиндә јерләшән пирамида илә дүз призманын ортаг отурачағыдыр. Пирамиданын ики јан үзү отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, бир-биринә бәрабәр олан јан тилләри исә өз араларында α бучағы әмәлә кәтирир. Призманын һүндүрлүјү пирамиданын һүндүрлүјүндән ики дәфә кичикдир. Призманын һәчмини тапын.

171. Пирамиданын отурачағы катетләри 6 вә 8 олан дүзбучаглы үчбучагдыр. Пирамиданын һүндүрлүјүнүн отурачағы пирамиданын отурачағы дахилиндә олуб, узунлуғу 24-ә бәрабәрдир. Пирамиданын дахилинә чәкилмиш кубун дөрд тәпәси пирамиданын отурачаг мүстәвиси үзәриндәдир. Кубун бу мүстәви үзәриндә олан тилләри пирамида отурачағынын катетләринә паралелдир. Кубун галан дөрд тәпәси пирамиданын јан үзләри үзәриндәдир. Кубун тилини тапын.

172. Кәсик даирәнин мәркәзиндән кечән күрә диаметри, бу кәсик даирә мүстәвисинә перпендикулјардыр. Буну исбат един.

173. Күрә харичиндә чәкилмиш кәсик конусун јан сәтһинин саһәси илә күрә сәтһинин саһәси $m:n$ нис-

бәтиндәдир. Бөјүк отурачагла доғуран арасындакы бучағы тапын.

174. Конусун отурачағынын, дахилә чәкилмиш күрәнин сәтһинин вә конусун јан сәтһинин саһәләри әдәди силсилә әмәлә кәтирир. Конусун доғураны илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы тапын.

175. Радиусу R олан күрә харичинә, доғураны бөјүк отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән кәсик конус чәкилмишдир. Кәсик конусун јан сәтһинә, күрәнин тохунма хәттинин узунлуғуну тапын.

176. Радиусу R олан күрә дахилинә, доғураны илә һүндүрлүјү арасындакы бучағы α олан конус чәкилмишдир. Конусун һәчмини тапын.

177. Радиусу R олан күрә сәтһиндәки нөгтәдән, бир-бири илә α бучағыны әмәлә кәтирән үч бәрабәр вәтәр чәкилмишдир. Вәтәрләрин узунлуғуну тапын.

178. Пирамиданын отурачағы, диагоналлары арасындакы бучаг α олан дүзбучаглыдыр, јан тилләр отурачаг мүстәвиси илә φ бучағы әмәлә кәтирир. Бу пирамиданын харичинә чәкилән күрәнин радиусу R олсун. Пирамиданын һәчмини тапын.

179. Конус дахилинә күрә чәкилмишдир, күрәјә тохунан вә конусун отурачағына парапел олан кәсик, конусу ики мүадил һиссәјә бөлүр. Конусун доғуранынын отурачаг мүстәвисинә мејл бучағыны тапын.

180. Конусун һүндүрлүјүнә перпендикулјар олараг кечән мүстәви ону ики мүадил һиссәјә бөлүр вә конусун харичинә чәкилмиш күрәнин мәркәзиндән кечир. Конусун доғураны илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы тапын.

181. Конус дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусу R олуб, доғуран күрәнин мәркәзиндән α бучағы алтында көрүнүр. Конусун һәчмини тапын.

182. Радиусу R олан јарымкүрә дахилинә чәкилмиш кәсик конусун бөјүк отурачағы јарымкүрәнин отурачағы илә үст-үстә дүшүр, доғураны исә бөјүк отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирир. Конусун сәтһинин саһәсини тапын.

183. Кәсик конусун отурачагларынын радиусу R вә r, доғуранынын алт отурачаг мүстәвисинә мејл бучағы α олсун. Кәсик конусун харичинә чәкилмиш күрәнин радиусуну $(R > r)$ тапын.

184. Радиусу R олан күрәнин дахилинә дүзкүн үчбучаглы пирамида чәкилмишдир. Отурачагдакы икиүзлү бучаг α олсун. Пирамиданын јан тилини вә отурачағын тәрәфини тапын.

185. Конусун дахилиндә бир-биринә вә конус сәтһинә тохунан ики күрә чәкилмишдир. Бу күрәләрин радиуслары $m:n$ $(m > n)$ нисбәтиндәдир. Конусун ох кәсијиндәки тәпә бучағыны тапын.

186. Күрәнин харичинә чәкилмиш кәсик конусун һәчми күрәнин һәчминдән үч дәфә бөјүкдүр. Конусун доғураны илә алт отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы тапын.

187. Сәтһинин саһәси Q олан күрәнин дахилинә јан тили отурачаг мүстәвиси илә α бучағы әмәлә кәтирән дүзкүн дөрдбучаглы пирамида чәкилмишдир. Пирамиданын һәчмини тапын.

188. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамидада отурачағын тәрәфи a вә тәпәдәки мүстәви бучаг α олсун. Онун харичинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

189. Күрә конусун јан сәтһинә отурачағын чеврәси бојунча тохунур. Бу һалда күрәнин сәтһи, бири о бириндән n дәфә бөјүк олан ики һиссәјә бөлүнүр. Конус доғуранынын отурачаг мүстәвисинә мејл бучағыны тапын.

190. Күрәнин харичинә, там сәтһинин саһәси, күрә сәтһинин саһәсиндән ики дәфә бөјүк олан конус чәкилмишдир. Конусун доғураны илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучағы тапын.

191. Пирамиданын отурачағы јан тәрәфи a, тәпә бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Отурачағын бәрабәр тәрәфләриндән кечән јан үзләр отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, үчүнчү үз исә отурачаг мүстәвиси илә α бучағыны әмәлә кәтирир. Пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

192. Күрәнин харичинә, һәчми онун һәчминдән m дәфә бөјүк олан дүз паралелепипед чәкилмишдир. Паралелепипедин отурачағынын бучагларыны тапын.

193. Һәчми V олан күрә харичинә дөрдбучаглы дүз призма чәкилмишдир; призманын отурачағы, ити бучағы α олан ромбдур. Призманын һәчмини тапын.

194. Күрә дахилинә чәкилмиш конусун һәчми күрә һәчминин $\frac{1}{4}$-нә бәрабәрдир. Конусун һүндүрлүјү H олдуғуну биләрәк, күрәнин һәчмини тапын.

195. Конусун H һүндүрлүјү күрәнин диаметридир, һүндүрлүклә доғуран арасындакы бучаг α олсун. Күрәнин конус харичиндә олан һиссәсинин һәчмини тапын.

196. Күрә харичинә дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамида чәкилмишдир; тәпәләри кәсик пирамиданын үзләри илә күрә сәтһинин тохунма нөгтәләри олан сәккизүзлүнүн һәчми күрәнин һәчминдән дөрд дәфә кичикдир. Пирамиданын отурачаг тилиндәки икиүзлү бучағы тапын.

197. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын дахилинә вә харичинә чәкилмиш күрәләрин мәркәзләри үст-үстә дүшүр. Пирамиданын отурачаг тилиндәки икиүзлү бучағы тапын.

198. Пирамиданын отурачағы, тәрәфи a вә ити бучағы α олан ромбдур. Отурачагдакы икиүзлү бучаг φ олсун. Бу пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин һәчмини тапын.

199. Пирамиданын отурачағы ити бучағы α олан ромбдур. Отурачаг тилләриндәки икиүзлү бучаглар φ, дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусу исә R-ә бәрабәрдир. Пирамиданын һәчмини тапын.

200. Дөрдбучаглы дүзкүн пирамидада отурачағын тәрәфи a, тәпәдәки мүстәви бучаг α олсун. Бу пирамида дахилинә чәкилмиш күрәнин сәтһинин саһәсини тапын.

201. Отурачағын тәрәфи a, тәпәсиндәки мүстәви бучаг α олан дүзкүн n-бучаглы пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

202. Отурачағынын тәрәфи q вә јан тили a олан дүзкүн n-бучаглы пирамида дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

203. Һүндүрлүјү H олан дөрдбучаглы дүзкүн пирамиданын харичинә чәкилмиш күрәнин мәркәзиндән онун јан үзүнә ендирилмиш перпендикулјар һүндүрлүклә α бучағы әмәлә кәтирир. Күрәнин һәчмини тапын.

204. Радиусу R олан күрә дахилинә, тәпәсиндәки мүстәви бучағы α олан дүзкүн үчбучаглы пирамида чәкилмишдир. Пирамиданын һүндүрлүјүнү тапын.

205. Отурачаг тилиндәки икиүзлү бучаг α олан дүзкүн үчбучаглы кәсик пирамида дахилинә күрә чәкилмишдир. Күрә сәтһинин кәсик пирамиданын там сәтһинә олан нисбәтини тапын.

206. Отурачаг тилиндәки икиүзлү бучағы α олан дүзкүн алтыбучаглы пирамида дахилинә радиусу R олан күрә чәкилмишдир. Күрәјә тохунан вә пирамиданын отурачағына парапел олан мүстәвинин, верилән пирамидадан ајырдығы кәсик пирамиданын јан сәтһинин саһәсини тапын.

207. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын тәпәдәки мүстәви бучаг α, h һүндүрлүјү исә күрәнин диаметридир. Онларын сәтһләринин кәсишдији әјринин узунлуғуну тапын.

208. Радиусу R вә тәпә бучағы α олан сферик секторун һәчмини вә там сәтһинин саһәсини тапын.

209. Радиусу R олан күрә дахилинә чәкилмиш пирамиданын отурачағы дүзбучаглы үчбучагдыр. Онун ики јан үзү бир-бири илә α икиүзлү ити бучағыны әмәлә кәтирир вә отурачаг мүстәвисинә перпендикулјардыр, үчүнчү јан үзү исә отурачаг мүстәвисинә α бучағы гәдәр мејл едир. Пирамиданын һәчмини тапын.

210. Радиусу R олан сферик секторун радиуслары арасындакы ән бөјүк бучаг α олсун. Бу секторун дахилинә чәкилән күрәнин һәчмини вә сәтһини тапын.

211. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын дахилинә чәкилмиш јарымкүрәнин отурачағы пирамиданын отурачағы үзәринә дүшүр, күрәви сәтһи исә јан үзләрә тохунур. Пирамиданын отурачаг тилиндәки бучаг α, отурачағын тәрәфи илә күрә диаметринин фәрги исә m-ә бәрабәрдир. Јарымкүрәнин там сәтһи илә пирамиданын там сәтһинин нисбәтини вә јарымкүрәнин һәчмини тапын.

212. Дүзкүн үчбучаглы пирамиданын һүндүрлүјү h олсун. Пирамиданын һәр бир јан үзүнүн һүндүрлүкләринин кәсишмә нөгтәси вә пирамиданын тәпәси радиусу r олан күрә сәтһи үзәринә дүшүр. Пирамиданын һәчмини тапын.

213. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын јан тили отурачағын тәрәфиндән ики дәфә бөјүкдүр. Күрәнин

пирамиданын бүтүн тилләринә тохундуғуну биләрәк, пирамида илә күрәнин һәчмләри нисбәтини тапын.

214. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын харичинә чәкилмиш күрә мәркәзинин јан үздән мәсафәси a, јан тилдән исә b олсун, күрәнин радиусуну тапын.

215. $SABCD$ дөрдбучаглы пирамиданын отурачағы тәрәфи a олан $ABCD$ квадратдыр. $SD = h$ тили отурачаг мүстәвисинә перпендикулјардыр. Силиндр пирамиданын дахилинә ашағыдакы кими јерләшмишдир. Силиндрин бир отурачаг чеврәси SCD үчбучағынын дахилинә чәкилмиш, икинчисинин чеврәси исә SAB үзүнә тохунур. Силиндрин һүндүрлүјүнү тапын.

216. $SABCD$ дүзкүн дөрдбучаглы пирамидасынын отурачағынын тәрәфи b, һүндүрлүјү исә $b\sqrt{2}$ олсун. Пирамида дахилинә чәкилмиш күрә SAD јан үзүнә K нөгтәсиндә тохунур. AB тилиндән вә K нөгтәсиндән кечән мүстәви илә пирамиданын кәсијинин саһәсини тапын.

217. $SABC$ дүзкүн үчбучаглы пирамидасынын отурачағы тәрәфи a, јан тили исә $a\sqrt{2}$ олсун. Сфера A нөгтәсиндән кечир вә SB, SC јан тилләринин орта нөгтәсиндә тохунур. Бу сферанын радиусуну тапын.

218. $SABC$ үчбучаглы пирамиданын SA, SC вә SB тилләри перпендикулјардыр: $AB = BC = a$, $SB = b$. Бу пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

219. Тәпә бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучаг пирамиданын отурачағыдыр; пирамиданын бүтүн јан үзләри отурачагла φ мејл бучағыны әмәлә кәтирир. Пирамида дахилинә чәкилмиш күрәнин һәчми V-јә бәрабәрдир. Пирамиданын һәчмини тапын.

220. Радиусу R олан сферанын дахилинә отурачағынын тәрәфи a олан дүзкүн үчбучаглы призма чәкилмишдир. Призманын отурачағынын тәрәфиндән вә сферанын мәркәзиндән кечән мүстәви илә кәсијин саһәсини тапын.

221. Кубун тили a олсун. Мәркәзи O олан сфера кубун A тәпәсиндән чыхан үч тилин һәр бирини јарыја бөлүр. Бу бөлмә нөгтәләрдән бири олан K-дан кубун A тәпәсиндән кечән диагоналына перпендикулјар чәкилмишдир. Бу перпендикулјар вә сферанын OK радиусу арасындакы бучағы кубун тили јарыја бөлүр. Сферанын радиусуну тапын.

222. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын харичинә чәкилмиш күрәнин һәчми V, күрәнин мәркәзиндән јан үзә чәкилмиш перпендикулјар һүндүрлүклә α бучағы әмәлә кәтирир. Пирамиданын һүндүрлүјүнү тапын.

223. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамиданын отурачағынын тили вә јан тили a олсун. Пирамиданын A тәпәсиндән кечән, мәркәзи O олан күрә вә SB, SD јан тилләринә орта нөгтәләриндә тохунур. $OSCD$ пирамидасынын һәчмини тапын.

224. Конусун там сәтһи саһәсинин онун дахилинә чәкилмиш күрәнин сәтһи саһәсиндән m дәфә бөјүк олдуғу мә'лумдур. Конус доғуранынын отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији мејл бучағыны тапын.

225. $SABC$ дүзкүн пирамидасынын ABC отурачағынын тәрәфи a, јан тили исә b олсун ($b > a$). BS тилинә вә ABC мүстәвисинә A нөгтәсиндә тохунан сферанын радиусуну тапын.

226. Дүзкүн дөрдбучаглы пирамида дахилинә дүзкүн тетраедр ашағыдакы кими јерләшмишдир: тетраедрин тили пирамида отурачағынын диагоналы үзәриндә јерләшир. A вә B тәпәләри гаршы-гаршыја дуран јан тилләри үзәринә дүшүр, AB тили исә отурачаг мүстәвисинә паралелдир. Тетраедрин тили пирамида отурачағынын тәрәфинә бәрабәр олдуғуну биләрәк, пирамида илә тетраедрин һәчмләри нисбәтини тапын.

227. $SABC$ үчбучаглы пирамидасынын S тәпәсиндәки мүстәви бучагларын һәр бири дүз бучаг, $AC = BC$, SC тили ABC мүстәвиси илә $45°$ бучағы әмәлә кәтирир. AB тили радиусу R олан сферанын диаметридир. Тәпәси C олан үчүзлү бучағын дахилинә чәкилмиш вә верилмиш сфераја тохунан сферанын радиусуну тапын.

228. $ABCD$ үчбучаглы пирамидасында AB тили 6 см, $CD = 8$ см, галан тилләрин һәр бири $\sqrt{74}$ олсун. Бу пирамиданын харичинә чәкилән күрәнин радиусуну тапын.

229. Үчбучаглы пирамиданын отурачағы һипотенузу l олан бәрабәрјанлы дүзбучаглы үчбучагдыр. Отурачаг тилләриндәки икиүзлү бучаглар: α, β вә γ(γ—бучағы һипотенуза ујΓундур). Бу пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапын.

230. Бир тетраедрин дахилинә башга тетраедр, елә чәкилмишдир ки, тәпәләри биринчи тетраедрин үзләрин медианларынын кәсишмә нөгтәләри үзәринә дүшүр. Бу тетраедрләрин һәчмләри нисбәтини тапын.

231. 1) $ABCD$ дүзкүн тетраедрин тили a-ја бәрабәрдир. A вә B тәпәләриндән вә ABC, ACD үзләринин мәркәзиндән кечән сферанын радиусуну тапын. 2) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубун тили a олсун, AA_1, BB_1 тилләринин ортасындан вә A, C_1 тәпәләриндән кечән сферанын радиусуну тапын.

VII. ФЫРЛАНМА ЧИСИМЛӘРИНӘ АИД МӘСӘЛӘЛӘР

232. Ромбун кор бучағынын тәпәсиндән тәрәфләринә ендирилмиш перпендикулјарларын отурачаглары арасындакы мәсафә d, аралярындакы бучаг исә α олсун. Ромбун, ити бучағын тәпәсиндән кечән вә бөјүк диагоналына перпендикулјар олан ох әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

233. Саһәси S, ити бучагларындан бири β олан дүзбучаглы үчбучагда, дүзбучағын тәпәсиндән кечән вә һипотенуза паралел олан дүз хәтт әтрафында фырланыр. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини тапын.

234. Дүзбучаглы үчбучаг, онун харичиндә, дүзбучаг тәпәсиндән кечән вә дүзбучағын тәнбөләнинә перпендикулјар олан ох әтрафында фырланыр. Үчбучағын катетләриндән бири a, тәнбөләнинин һипотенуз илә әмәлә кәтирдији бучаг α олсун. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини тапын.

235. Дүзбучаглы үчбучаг, онун харичиндә дүзбучаг тәпәсиндән кечән вә бу тәпәдән чәкилмиш медиана перпендикулјар олан ох әтрафында фырланыр. Узунлуғу a олан медиан һипотенуз илә α бучағыны әмәлә кәтирир. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини тапын.

236. Саһәси S вә ити бучагларындан бири α олан дүзбучаглы үчбучағын мүстәвиси үзәриндә јерләшән вә һәмин ити бучаг тәпәсиндән һипотенуз чәкилмиш перпендикулјар олан ох әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

237. R радиуслу даирә харичинә чәкилмиш вә ити бучағы α олан дүзбучаглы трапесијанын паралел олма-

јан тәрәфләриндән кичији әтрафында фырланмасындан алынан чисмин јан сәтһинин саһәсини тапын.

238. Ромбун a-ја бәрабәр бөјүк диагоналы онун тәрәфи илә α бучагы әмәлә кәтирир. Бу ромб, онун ити бучаг тәпәсиндән кечән вә о бири диагонала паралел олан ох әтрафында фырланыр. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини вә сәтһинин саһәсини тапын.

239. Бәрабәрјанлы үчбучагын отурачагынын ортасы илә јан тәрәфинин ортасыны бирләшдирән a парчасы јан тәрәф илә α бучагы әмәлә кәтирир. Бу үчбучаг, отурачага јанашы бучагынын тәпәсиндән кечән вә отурачага перпендикулјар олан дүз хәтт әтрафында фырланыр. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини вә јан сәтһинин саһәсини тапын.

240. Тәпә бучагы α вә дахилинә чәкилмиш даирәнин радиусу r олан бәрабәрјанлы үчбучаг, отурачагынын тәпәсиндән кечән вә јан тәрәфинә паралел олан ох әтрафында фырланыр. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини тапын.

241. Диаметри $AB = 2R$ олан јарымдаирә дахилинә $ACDB$ трапесијасы чәкилмишдир. $CAB = 60°$. Бу трапесија AB-јә перпендикулјар радиус әтрафында фырланыр. Фырланмадан алынан чисмин һәчмини тапын.

242. Тәпә бучагы α вә дахилинә чәкилмиш даирәнин радиусу r олан бәрабәрјанлы үчбучагын, тәпәсиндән кечән вә јан тәрәфләриндән биринә перпендикулјар ох әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

243. Бөјүк отурачагы a, ити бучагы α, диагоналы јан тәрәфләриндән биринә перпендикулјар олан бәрабәрјанлы трапесијанын бөјүк отурачагы әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

244. Кичик диагоналы, гоншу кичик тәрәфинә перпендикулјар, бу диагонал гаршысында дуран бучаг α олан паралелограмын һәмин тәрәфи әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми V-јә бәрабәрдир. Бу чисмин сәтһинин саһәсини тапын.

245. Бәрабәрјанлы үчбучағын јан тәрәфи a, тәпә бучагы исә α олсун. Бу үчбучаг, һүндүрлүјүнә паралел вә бу һүндүрлүкдән, үчбучағын дахилинә чәкилмиш даирәнин радиусундан n дәфә бөјүк мәсафәдә јерләшән

198—3

вə үчбучағын харичиндəн кечəн ох əтрафында фырланыр. Фырланмадан алынан чисмин һəчмини тапын.

246. 1) Периметри $2P$ вə бучагларындан бири α олан дүзбучаглы үчбучағын һипотенузу əтрафында фырланмасындан алынан чисмин һəчмини тапын.

2) Паралелограмын кор бучағы тəпəсиндəн кечəн диагоналы илə кичик тəрəфи арасындакы бучаг β вə бөјүк тəрəфлəри арасындакы мəсафə h олсун. Паралелограмын α ити бучағынын тəпəсиндəн кечиб, һəмин диагонала паралел олан ох əтрафында фырланмасындан алынан чисмин һəчмини тапын.

VIII. ЧƏБРИН ТƏТБИГИ ƏСАСЫНДА КООРДИНАТ ҮСУЛУ ИЛƏ ҺƏНДƏСƏ МƏСƏЛƏЛƏРИНИН ҺƏЛЛИ

247. $A(-1)$ нөгтəсиндəн 7 узунлуг ваһиди гəдəр мəсафəдə вə координаты мүсбəт олан B нөгтəсини тапын вə нəтичəни гурма илə јохлајын.

248. AB парчасы C нөгтəси илə $m:n=\lambda$ нисбəтдə бөлүндүјүнү билəрəк, C нөгтəсинин координатыны тапын.

249. $A(2)$ вə $B(-7)$ нөгтəлəри илə һүдудланмыш AB парчасы үзəриндə елə C нөгтəси тапын ки, $AC:CB=1:2$ олсун.

250. $A(4)$ нөгтəси $B(-3)$ нөгтəсинə нəзəрəн симметрик олан C нөгтəсини тапын.

251. $A(3, 1)$ нөгтəсини абсис охуна; ординат охуна нəзəрəн симметрик нөгтəнин координатларыны тапын.

252. Тəпə нөгтəлəринин координатлары
1) $A(1; 0)$, $B(7; 0)$ вə $C(9; 3)$; 2) $A(-3; -2)$, $B(1; -2)$ вə $C(1; 1)$; 3) $A(-3; 1)$; $B(-5; 4)$ вə $C(-1; 4)$ олан үчбучаглардан һансынын дүзбучаглы; итибучаглы вə корбучаглы үчбучаг олдуғуну көстəрин.

253. $M(2, 3)$, $N(5, 2)$ вə $P(-3; -4)$ нөгтəлəринин бир дүз хəтт үзəриндə олуб-олмадығыны ајдынлашдырын вə бунлардан һансынын координат мəркəзинə јахын олдуғуну тапын.

254. $A(1; -4)$, $B(6; 1)$ вə $C(4; 6)$ үчбучағын тəпə нөгтəлəринин координатлары олдугда бу үчбучағын харичинə чəкилмиш чеврəнин радиусуну тапын.

255. $A(2; 1)$, $B(5; y)$ вə $C(5; 1)$ үчбучағын тəпə нөгтəлəринин координатлары олдугда, бу үчбучағын саһəсинин 6-ја бəрабəр олдуғуну билəрəк, y ординатыны тапын.

256. Үчбучағын тəпə нөгтəлəринин ординатлары $A(-2; -3)$, $B(-4; 3)$ вə $C(3; 1)$ олдугда AC тəрəфинə паралел орта хəттин узунлуғуну вə C нөгтəсиндəн чəкилмиш медианын узунлуғуну тапын.

257. $(1; 1)$; $(-1; 1)$; $(-1; -1)$; $(1; -1)$ координатлары $ABCD$ квадратынын тəпə нөгтəлəри олдуғуну билəрəк, бу квадратын саһəсини тапын.

258. Ики охшар үчбучаг $A(2; 2)$ ортаг тəпəјə маликдир. Кичик үчбучағын тəпəлəри $B(5; 4)$ вə $C(5; 2)$. Охшарлыг əмсалы $k=\frac{10}{3}$ олдугда бөјүк үчбучағын тəпə нөгтəлəрини тапын.

259. $ABCD$ дөрдбучаглысынын тəпə нөгтəлəринин координатлары $(0; 250)$, $(200; 50)$, $(500; 300)$, $(100; 700)$-дүр. Өлчүлəр м илə верилдикдə дөрдбучаглынын саһəсини һесаблајын.

260. ABC үчбучағынын тəпə нөгтəлəринин координатлары $A(3; 1)$, $B(6; 5)$, $C(15; 1)$. Бу үчбучағын AC тəрəфинə чəкилмиш һүндүрлүјүн, медианын вə тəнбөлəнин узунлуғуну тапын.

261. $A(-7)$, $B(2)$ вə $C(-3)$ нөгтəлəрини гурун, AB, BC вə AC парчаларынын узунлугларыны тапын вə $AB=BC+AC$ бəрабəрлијини јохлајын.

262. Тəпə нөгтəлəри $A(-3; 1)$, $B(0; -2)$ вə $C(3; -2)$ олан үчбучағы гурун, онун периметрини вə саһəсини тапын.

263. Тəпə нөгтəлəринин координатлары $A(-2; -1)$, $B(-3; 3)$, $C(4; 5)$ вə $D(3; -1)$ олан дөрдбучаглынын саһəсини һесаблајын.

264. Тəпə нөгтəлəринин координатлары $A(-1; 1)$, $B(1, 2)$, $C(4; 2)$ вə $D(4; -1)$ олан трапесин саһəсини һесаблајын.

265. Тəпə нөгтəлəринин координатлары $A(-4; 1)$, $B(-2, 4)$, $C(4, 4)$ вə $D(2, 1)$ олан паралелограмын саһəсини һесаблајын.

266. Тəпə нөгтəлəринин координатлары $A(-7; -1)$, $B(-9, 3)$, $C(-4, 6)$, $D(1, 5)$ вə $F(-1; 1)$ олан бешбучаглынын саһəсини һесаблајын вə гурун.

267. Тәпә нөгтәләринин координатлары $A(3; 2, 0)$, $B(5, 11, 0)$, $C(3, 13, 0)$, $D(3; 7, 6)$ олан пирамиданы гурун. Онун һәчмини һесаблајын.

268. Тәпә нөгтәләринин координатлары $A(1; 1; -1)$, $B(0; 0; 3)$, $C(1, 4, 1)$, $B_1(1, -1, 1)$ олан $ABCA_1B_1C_1$ призмасы верилир. 1) $|A_1C|$; 2) $\cos\angle AC_1C$ һесаблајын.

IX. ЧОХҮЗЛҮЛӘРИН КӘСИКЛӘРИНИН ГУРУЛМАСЫ

269. Үчбучаглы $ABCD$ пирамидасынын AB, AD вә CD тилләри үзәриндә M, N, F нөгтәләри верилир. Верилмиш нөгтәләрдән кечән мүстәвинин пирамида илә кәсијини гурмалы.

270. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелепипединдә M, N вә P нөгтәләри ујғун олараг CC_1, BB_1 вә AA_1 тилләринә аид олуб, $PN \nparallel AB$ вә $NM \nparallel BC$ шәртләри өдәнир. M, N, P нөгтәләриндән кечән кәсији вә MNP илә ABC мүстәвиләринин кәсишмә хәттини гурун.

271. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубун B тәпәсиндән вә CC_1 вә A_1D_1 тилләринин ортасындан кечән мүстәвинин әмәлә кәтирдији кәсији гурун.

272. Кубун габаг үзүндә јерләшән R нөгтәсиндән вә арха үзүн BB_1 вә B_1C_1 тилләри үзәриндә јерләшән P вә Q нөгтәләриндән кечән кәсији гурун.

273. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу верилир. A тәпәсиндән, BC тилинин ортасындан (E) вә CC_1D_1D үзүнүн мәркәзиндән (O) кечән мүстәви һәчмләри һансы нисбәтдә бөлүндүјүнү тапын вә кәсији гурун.

274. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунун A тәпәсиндән, үст отурачағын, $A_1B_1C_1D_1$-ин (O_1) мәркәзиндән вә BB_1C_1C јан үзүнүн Q мәркәзиндән кечән мүстәви B_1C_1 тилини E нөгтәсиндә кәсдији үчүн B_1E-нин EC_1-ә нисбәтини тапын.

275. MNP мүстәвиси илә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелепипединин кәсишмәсини гурун. M, N, P нөгтәләри ујғун олараг AA_1B_1B вә DD_1C_1C үзүнә вә AD тилинә аиддир.

X. ВЕКТОРЛАРЫН ҺӘНДӘСӘ МӘСӘЛӘЛӘРИ ҺӘЛЛИНӘ ТӘТБИГИ

276. Үчбучағын медианларынын бир нөгтәдә кәсишдијини вә тәпәдән һесабланмагла $2:1$ нисбәтиндә бөлүндүјүнү исбат един.

277. Трапесијанын орта хәтти отурачаглара паралел олуб, онларын чәминин јарысына бәрабәр олдуғуну исбат един.

278. ABC үчбучағында A_1, B_1, C_1 нөгтәләри ујғун олараг BC, AC, AB тәрәфләринин ортасыдыр. O нөгтәсинин ихтијари сечилмәсиндән асылы олмајараг

$$\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

бәрабәрлијин доғрулуғуну исбат един.

279. Үчбучағын тәнбөләни онун тәрәфини јан тәрәфләрлә мүтәнасиб һиссәләрә бөлдүјүнү исбат един.

280. ABC үчбучағы верилир. K нөгтәси AB парчасы үзәриндәдир. $|AK|:|KB| = 3:10$ олдугда $\vec{CK}$ векторуну $\vec{CA} = a$ вә $\vec{CB} = b$ векторлары илә ифадә един.

281. ABC үчбучағы верилир. K нөгтәси AB парчасы үзәриндә вә $|AK|:|KB| = m:n$ олдугда CK векторуну $\vec{CA} = a$ вә $\vec{CB} = b$ векторлары илә ифадә един.

282. ABC үчбучағынын мүстәви үзәриндә паралел пројексијасы $A_1B_1C_1$ үчбучағыдыр. $|AA_1| = a$, $|BB_1| = b$, $|CC_1| = c$ мә'лум олдугда бу үчбучагларын медианларынын кәсишмә нөгтәләри арасындакы мәсафәни тапын.

283. Призманын отурачағы, тәрәфи a олан дүзкүн үчбучагдыр. Јан тил b-јә бәрабәр олуб, отурачағын бу тили кәсдији тәрәфләр илә ујғун олараг α вә β бучаглары әмәлә кәтирир. Призманын һәчмини тапын.

284. Дүз үчбучаглы призманын бүтүн тилләринин узунлуглары еjнидир: 1) BC_1 вә AC дүз хәтләри вә 2) BC_1 вә A_1C дүз хәтләри арасында галан бучагларын гијмәтини тапын.

285. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелепипеди верилир: $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ABB_1 = \beta$, $\angle B_1BC = \gamma$. BD_1 вә AC_1 тапын.

286. Дүз паралелепипедин отурачаг тәрәфләри 4 дм вә 5 дм олуб, бунлар арасындакы бучаг 30°-дир. Паралелепипедин бүтүн јан тилләрини кәсән вә онун

отурачаг мүстәвиси илә 45° бучаг әмәлә кәтирән кәсијин саһәсини тапын.

287. Паралелепипедин диагоналларынын квадратлары чәми онун тилләринин квадратлары чәминә бәрабәр олдуғуну исбат един.

288. Пирамиданын отурачағы, јан тәрәфләрин узунлуғу a вә тәпә бучағы α олан бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Отурачағын тәрәфләриндән әмәлә кәлән бүтүн икиүзлү бучаглар β-ја бәрабәрдир. Пирамиданын там сәтһини тапын.

289. Тетраедрин бир тәпәдән чыхан тилләринин узунлуғу a, b, c, галан тилләрин узунлуғу a_1, b_1, c_1 вә онун харичинә чәкилмиш күрәнин радиусу R исә, $a_1^2+b_1^2+c_1^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+4R$ олдуғуну исбат един.

290. $ABCD$ тетраедринин ABC үзүнүн AA_1 медианыны M нөгтәси $AM:MA=3:7$ нисбәтиндә бөлүр. $\vec{DM}$ векторуну $\vec{DA}$, $\vec{DB}$, $\vec{DC}$ векторларына ајырын.

291. $ABCD$ тетраедриндә M_1 вә M_2 нөгтәләри ујғун олараг ADB вә BDC үзләриндәки медианларын кәсишмә нөгтәләридир. M_1M_2 вә AC векторларынын коллинеарлығыны исбат едән вә онларын узунлуглары нисбәтини тапын.

292. Отурачаг мүстәвисини $\vec{AC}$ вәтәри үзрә кәсән бәрабәртәрәфли конусун тәпәсиндән кечән мүстәви отурачаг чеврәсиндән 60° гөвс ајырыр, $\triangle ASB$ ох кәсијидир. AC вәтәри илә SB доғураны арасындакы мәсафә $2\sqrt{15}$ см-ә бәрабәрдир. Конусун там сәтһини вә һәчмини тапын.

XI. САҺӘЛӘРИН ИНТЕГРАЛ ИЛӘ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

293. $y=2x^2$ параболу, $x=3$, $x=6$ дүз хәтләри вә абсис оху илә һүдудланмыш әјрихәтли трапесијасынын саһәсини һесаблајын.

294. $5x+6y-30=0$, $y=1$, $y=4$ вә $x=0$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш трапесијанын саһәсини һесаблајын.

295. $y-x+1=0$, $y=0$, $2y=7x-42$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш үчбучағын саһәсини интегралын көмәји илә һесаблајын.

296. $y=x+1$, $4y+3x-32=0$, $y=2$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш үчбучағын саһәсини һесаблајын.

297. $x^2+y^2=25$ чеврәси, $x=\frac{5}{2}$ вә $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш фигурун саһәсини һесаблајын.

298. $y=8x^3$, $y=1$ вә $x=2$ хәтләри илә һүдудланмыш фигурун саһәсини һесаблајын.

299. $y=x^2-6x+5$ вә $y=-x^2+6x-5$ әјриләри илә һүдудланмыш саһәни тапын.

300. $y=-x^2+10x-19$ параболу вә $5y+3x-24=0$ дүз хәтти илә һүдудланмыш фигурун саһәсини һесаблајын.

301. $x-y^2=0$ параболун абсиси 16 олан нөгтәләринә тохунанлар чәкилмишдир. Бу тохунанлар вә парабола илә һүдудланмыш фигурун саһәсини тапын.

302. $y=2^x$, $y=-x^2$ вә $x=-3$, $x=3$ хәтләри илә һүдудланмыш фигурун саһәсини һесаблајын.

303. $y=\frac{1}{1+x^2}$ вә $y=\frac{x^2}{2}$ әјриләри илә һүдудланмыш саһәни һесаблајын.

304. Әјрихәтли трапес $y=4x^3$, $y=0$ вә ординат охуна паралел дүз хәтлә һүдудланмышдыр. Әјрихәтли трапесин саһәси 16 олдуғуну биләрәк, бу дүз хәттин тәнлијини тапын.

305. Әјрихәтли трапесин саһәси $\int\limits_{a-1}^{a+1}(1+x^2)\,dx=7(2a+1)$ бәрабәрлији илә тә'јин едилдијини биләрәк, бу трапесијанын саһәсини тапын.

XII. ҺӘЧМ ВӘ СӘТҺЛӘРИН ИНТЕГРАЛ ИЛӘ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

306. $y=3x$, $y=0$, $x=4$ вә $x=0$ хәтләри илә һүдудланмыш фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини һесаблајын.

307. $y=3x$, $y=2$, $y=4$ вә ординат оху илә һүдудланмыш трапесин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини һесаблајын.

308. $y=\frac{4}{x}$ һиперболу вә $x=3$, $x=12$ дүз хәтлә-

ри илә һүдудланмыш әјрихәтли трапесин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

309. $y=\frac{1}{4}x^2$ әјрисинин $y=1$-дән $y=5$-ә гәдәр олан парчадакы һиссәнин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

310. $x^2+y^2=25$ тәнлији илә I рүбдә верилмиш чеврә гөвсү вә $x=1$, $x=4$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

311. $y^2=2x$ параболу вә $y=\frac{1}{2}x$ дүз хәттинин кәсишмәсиндән алынан фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини вә сәтһини һесаблајын.

312. Чеврәсинин тәнлији $x^2+y^2=16$ олан даирәдән $x+y-4=0$ дүз хәттинин ајырдығы сегменти Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчм вә сәтһини тапын.

313. $y=2^x$ вә $y=2x$, $x=1$ вә $x=2$ хәтләри илә һүдудланмыш фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

314. $y=2\sin x$ синусоидин јарымдалғасы вә абсис охунун $0\leqslant x\leqslant\pi$ парчасы илә һүдудлашмыш фигурун Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчмини тапын.

XIII. МАКСИМУМ ВӘ МИНИМУМА АИД МӘСӘЛӘЛӘР

315. Дүзбучаглы үчбучағын дахилинә бир тәпәси дүзбучаг тәпәси үстүнә дүшән ән кичик диагоналы олан дүзбучаглы гурун.

316. ABC бучағынын дахилиндәки M нөгтәсиндән елә дүз хәтт чәкин ки, үчбучаг ән кичик саһәјә малик олсун.

317. Дүзбучаглынын харичинә саһәси ән бөјүк олан дүзбучаглы чәкин.

318. Дүзбучаглыдан вә бәрабәртәрәфли үчбучагдан ибарәт фигурун периметри P вә саһәси ән бөјүк олдугда онун өлчүләрини тапын.

319. Пәнчәрәнин баш һиссәси гөвсү 20° олан сегмент олмагла ашағысы дүзбучаглы шәклиндәдир. Пәнчәрәнин периметри P олдугда онун өлчүләри нечә олмалыдыр ки, максимум ишыгланма јаратсын?

320. Даирәдән нечә сектор кәсмәк лазымдыр ки, галан һиссәни бүкдүкдә ән бөјүк һәчмә малик олан гыф алынсын?

321. $y=x^2$ функсијасы $0\leqslant x\leqslant 1$ парчасында верилир. t нөгтәсинин һансы вәзијјәтиндә S_1 вә S_2 саһәләринин чәми ән бөјүк вә ән кичик гијмәт алыр.

322. $A(0;3)$ вә $B(4;5)$ нөгтәләри верилир. Абсис оху үзәриндә елә M нөгтәси тапын ки, $S=AM+MB$ мәсафәси минимум олсун.

323. R радиуслу күрәнин дахилинә чәкилмиш силиндрин ән бөјүк һәчмини тапын.

324. R радиуслу күрәнин дахилинә чәкилмиш силиндрин ән бөјүк там сәтһини тапын.

325. Силос гүлләсинин отурачағы силиндр вә баш һиссәси R радиуслу даирәдән кәсилиб һазырланмыш ән бөјүк һәчмли конусдур. Силиндрин диаметрини тапын.

326. Догураны l олан конусун ән бөјүк һәчмини тапын.

МӘСӘЛӘЛӘРИН ҺӘЛЛИ

ПРИЗМА

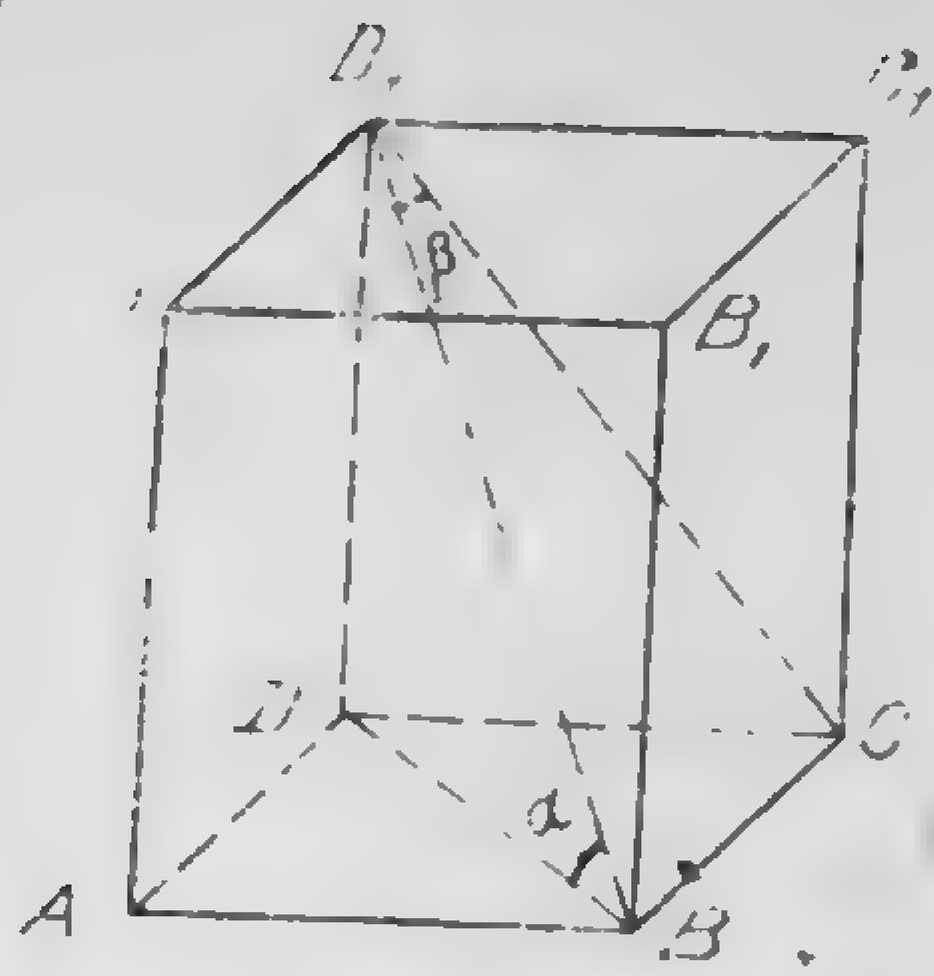
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – дүзбучаглы паралелепипеддир. $BD_1=a$, $\angle D_1BD=\alpha$, $\angle BD_1C=\beta$ (шәкил 1). $BC\perp DC$, $BC\perp CC_1$ олдугу үчүн $BC\perp(D_1DC)$ вә BCD_1 дүзбучаглы үчбучаг олур. Бурада $\angle BCD_1=90°$.

Паралелепипедин һәчми $V=AD\cdot DC\cdot DD_1$ дүстуру илә ифадә едилир.

$$\triangle BD_1C\text{-дән: } BC=BD_1\sin\beta=a\sin\beta.$$

$$\triangle BDD_1\text{-дән: } DD_1=BD_1\sin\alpha=a\sin\alpha,$$

$$BD=BD_1\cos\alpha=a\cos\alpha,$$



Шәкил 1.

△BDC-дән: $DC^2=BD^2-BC^2=(a\cos\alpha)^2-(a\sin\beta)^2=a^2(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)=a^2\cos(\alpha+\beta)\times\cos(\alpha-\beta)$;

$$DC=a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\times\cos(\alpha-\beta)}.$$

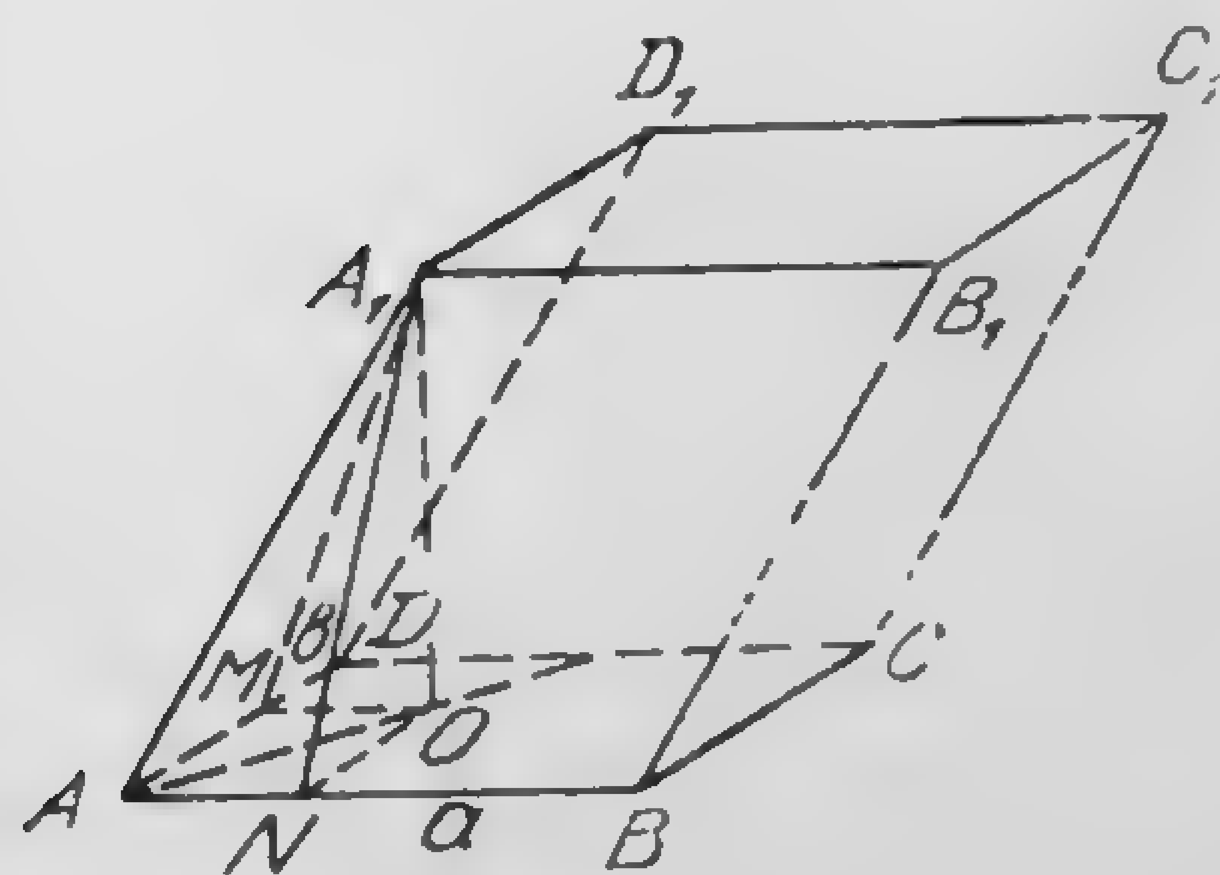
$$V=AD\cdot DC\cdot DD_1$$

$AD=BC$ олдуғуну нәзәрә алыб, мә'лумлары јеринә јазсаг аларыг:

$$V=a^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелепипеддир. $AB\perp AD$, $AB=a$, $AD=b$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\alpha$ верилир (шәкил 2).

Паралелепипедин A_1 тәпәсиндән онун A_1O һүндүрлүјүнү, $ON\perp AB$, $OM\perp AD$ чәкәк. M вә N нөгтәләрини A_1 нөгтәси илә бирләшдирәк. ON парчасы A_1N маилинин, OM парчасы исә A_1M маилинин проjексиjасыдыр. Үч перпендикулјар теоремине көрә $A_1N\perp AB$, $A_1M\perp AD$. AA_1N вә AA_1M дүзбучаглы үчбучагларында $\angle A_1AN=\angle A_1AM$ вә AA_1 тәрәфи ортаг олдуғу үчүн бу үчбучаглар бәрабәрдир. Она көрә $AN=AM$, $A_1N=A_1M$ олур. $ANOM$ дүзбучаглысында $AN=AM$ олдуғу үчүн бу дүзбучаглы квадратдыр.



Шәкил 2.

△ AA_1N-дән:

$AN=AA_1\cos\alpha=c\cos\alpha$; △$ANO$-дан: $AO=AN\sqrt{2}=c\sqrt{2}\cos\alpha$;

△ AA_1O-дан: $A_1O=\sqrt{AA_1^2-AO^2}=\sqrt{c^2-(\sqrt{2}c\cos\alpha)^2}=$

$=c\sqrt{1-2\cos^2\alpha}=c\sqrt{-\cos2\alpha}$

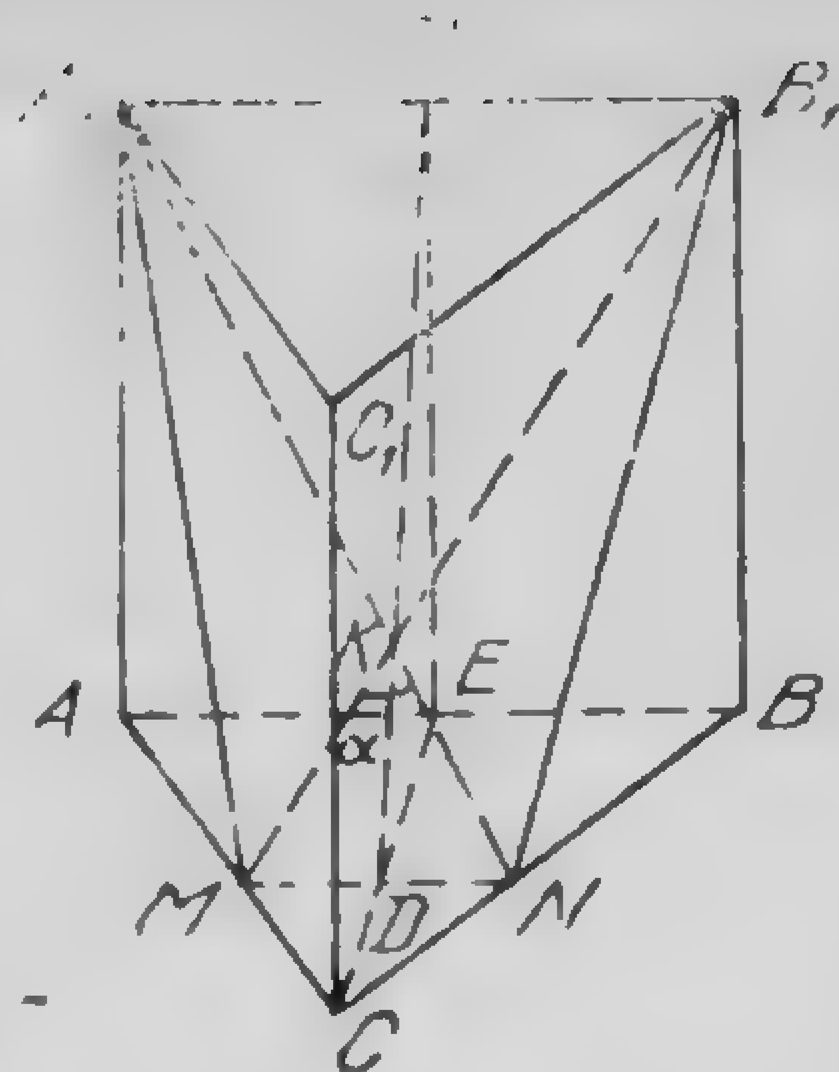
$V=S_{от}\cdot A_1O=abc\sqrt{-\cos2\alpha}$;

△ A_1AO-дан: $AO=AA_1\cos\angle A_1AO$,

$$\cos\angle A_1AO=\frac{AO}{AA_1}=\frac{c\sqrt{2}\cos\alpha}{c}=\sqrt{2}\cos\alpha \text{ вә}$$

$$\angle A_1AO=\arccos(\sqrt{2}\cos\alpha).$$

3. $ABCA_1B_1C_1$ дүзкүн үчбучаглы призмадыр. $AB=a$, MN парчасы ABC үчбучағын орта хәттидир, $\angle MKN=\angle A_1KB_1=\alpha$ (шәкил 3).



Шәкил 3.

Орта хәттин хассәсинә көрә, $MN\parallel AB$, $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$, дикәр тәрәфдән $AB\parallel A_1B_1$ олдуғундан $MN\parallel A_1B_1$. Бурадан, MNB_1A_1 дөрдбучаглысы трапесиjадыр. AA_1M вә BB_1N дүзбучаглы үчбучагларында уjғун катетләр бәрабәр олдуғу үчүн бу үчбучаглар бәрабәрдир. Она көрә $A_1M=B_1N$ олур. Демәли, трапесиjа бәрабәрјанлыдыр. $\triangle A_1MN \cap \triangle B_1MN=MN$, бәрабәрјанлы трапесиjанын диагоналлары олдуғу үчүн $MB_1=A_1N$ вә $A_1M=B_1N$ олдуғуна көрә бу үчбучаглар бәрабәрдир. Она көрә $\angle A_1NM=\angle B_1MN$. Онда, MKN вә A_1KB_1 үчбучагларынын бәрабәрјанлы олдуғу алыныр. ED парчасы DD_1 маилин проjексиjасыдыр вә үч перпендикулјар теоремине көрә $ED\perp MN$.

$$MD=\frac{1}{2}MN=\frac{a}{4},\ CE=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$ED=\frac{1}{2}CE=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Призманын һәчми:

$$V=S_{от}\cdot D_1E$$

△ MKD-дән: $KD=MD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

△ A_1KD_1-дән: $KD_1=A_1D_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ вә

$$DD_1 = KD + KD_1 = \frac{3}{4} a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ аларыг.}$$

$$\triangle DD_1E\text{-дән: } D_1E = \sqrt{DD_1^2 - ED^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{4} a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} =$$

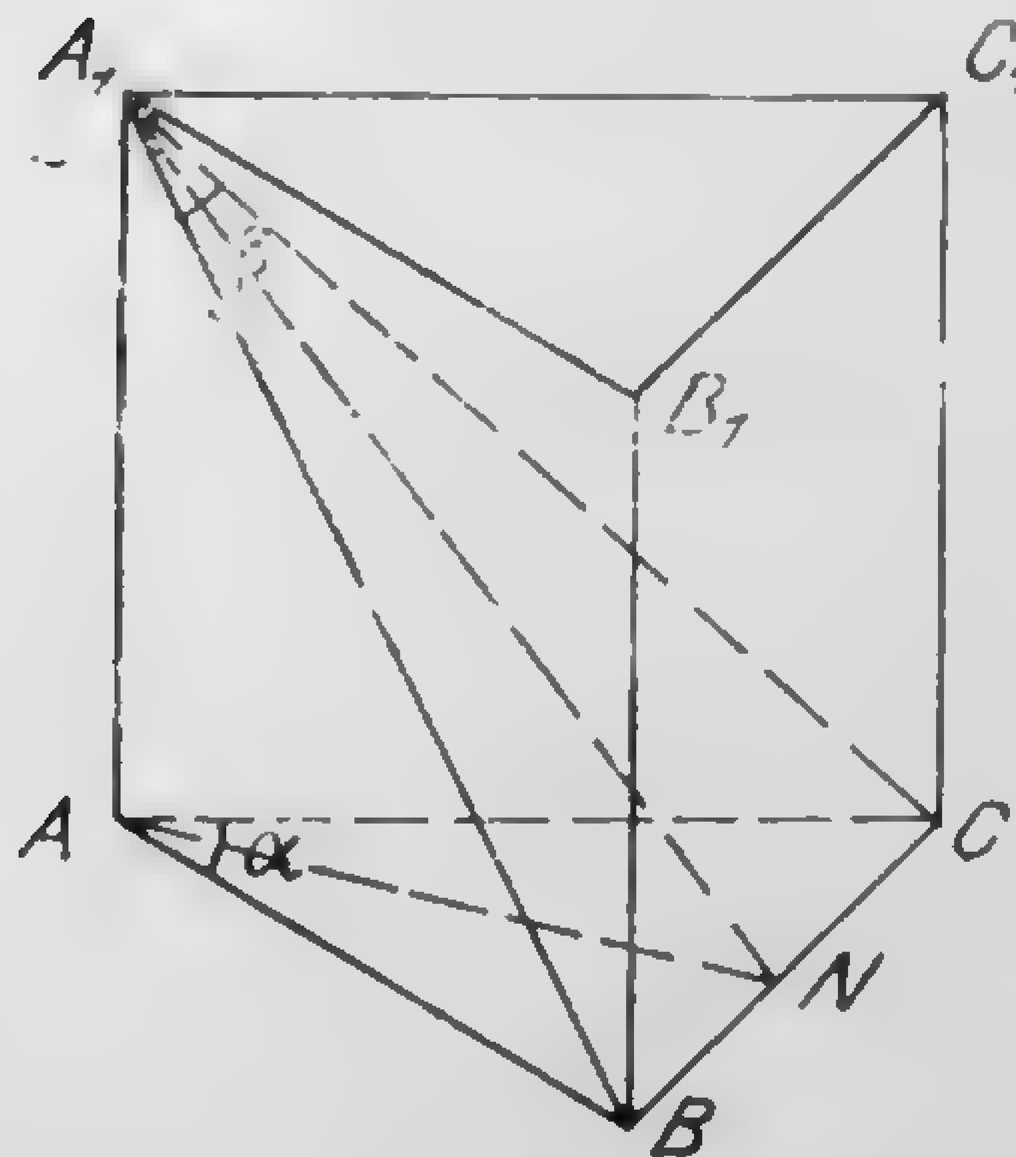
$$= \frac{3a}{4}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{3a}{4}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 60^\circ} =$$

$$= \frac{3a\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin 60^\circ}.$$

Бурадан һәчм:

$$V = \frac{3a^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

4. $ABCA_1B_1C_1$ дүз үчбучаглы призмадыр, $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BA_1C = \beta$ (шәкил 4). $A_1B = A_1C$ (дүзбучаглыларын диагоналлары олдугу үчүн). Она көрә BA_1C үчбучағы бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Тутаг ки, N нөгтәси BC парчасынын орта нөгтәсидир. AN вә A_1N парчалары бәрабәрјанлы үчбучагларын медианлары олдугундан бу парчалар һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир. Она көрә дә $AN \perp BC$,



Шәкил 4.

$$A_1N \perp BC, \quad \angle BAN = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\angle BA_1N = \frac{1}{2}\angle BA_1C = \frac{1}{2}\beta.$$

$$\triangle ABN\text{-дән: } BN = AB\sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Бурадан $BC = 2BN = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$.

$$\triangle A_1BN\text{-дән: } A_1B = \frac{BN}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$$\triangle AA_1B\text{-дән: } AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 - a^2} = \frac{a}{\sin\frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Призманын отурачағынын периметри:

$$2AB + 2BC = 2a + 2a\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2a\left[1 + \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 4a\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right).$$

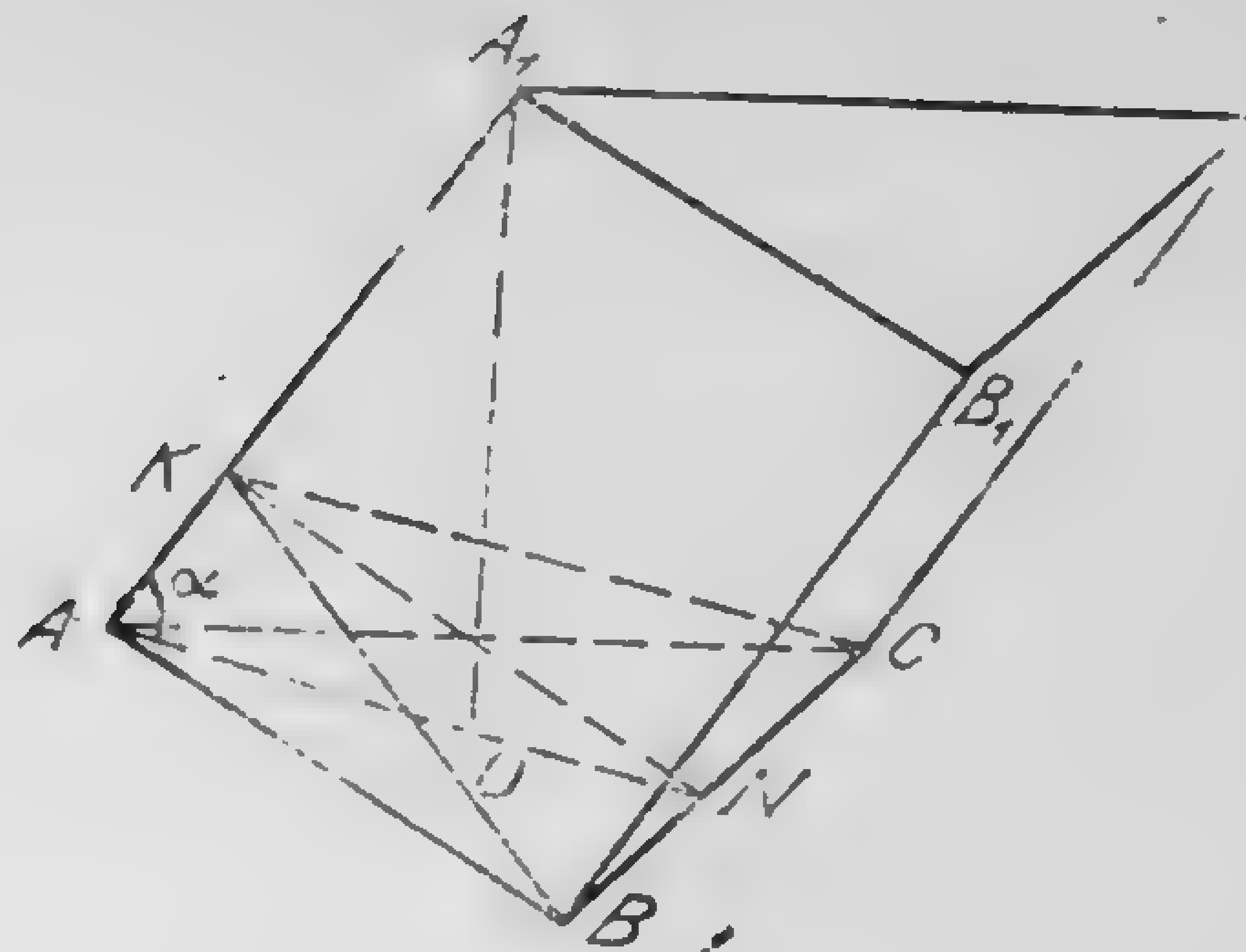
Призманын јан сәтһинин саһәси:

$$S_{јан} = 4a\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\cdot\frac{a}{\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} =$$

$$= \frac{4a^2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

5. $ABCA_1B_1C_1$ призмасында $AB = AC = BC = a$, $\angle A_1AN = \alpha$, A_1 тәпәси ABC отурачағынын O мәркәзинә проjексиjаланыр (шәкил 5).

BC тилиндән AA_1 јан тилинә перпендикулјар мүстәви кечирәк. Онда BCK үчбучағы перпендикулјар кәсик олачагдыр. Бурадан $A_1A \perp BK$, $A_1A \perp CK$. $\triangle ABK = \triangle ACK$ (AK катети ортаг, $AB = AC$ олдугу үчүн).



Шәкил 5.

Онда $BK = CK$ олур. Демәли, BCK үчбучағы бәрабәрјанлы үчбучагдыр. N нөгтәси BC тәрәфинин орта нөгтәсидир. $\triangle ABC$ дүзкүн вә $\triangle BKC$ бәрабәрјанлы олуб, бу үчбучагларда AN вә KN медианлары һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир. Демәли, AN парчасы ABC дүзкүн үчбучағын O мәркәзиндән кечир вә AO парчасы AA_1 маилин проjексиjасыдыр. Буна көрә дә A_1AN бучағы јан тил илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучагдыр.

$$\triangle AKN\text{-дән: } KAN = \alpha,\quad AN = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$KN = AN\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

$$\triangle BKN\text{-дән: } BK = \sqrt{KN^2 + BN^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3\sin^2\alpha + 1}.$$

Перпендикулјар кәсијин периметри: $KB + KC + BC =$

$$= 2BK + BC = 2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + a =$$

$$= a\left(\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + 1\right).$$

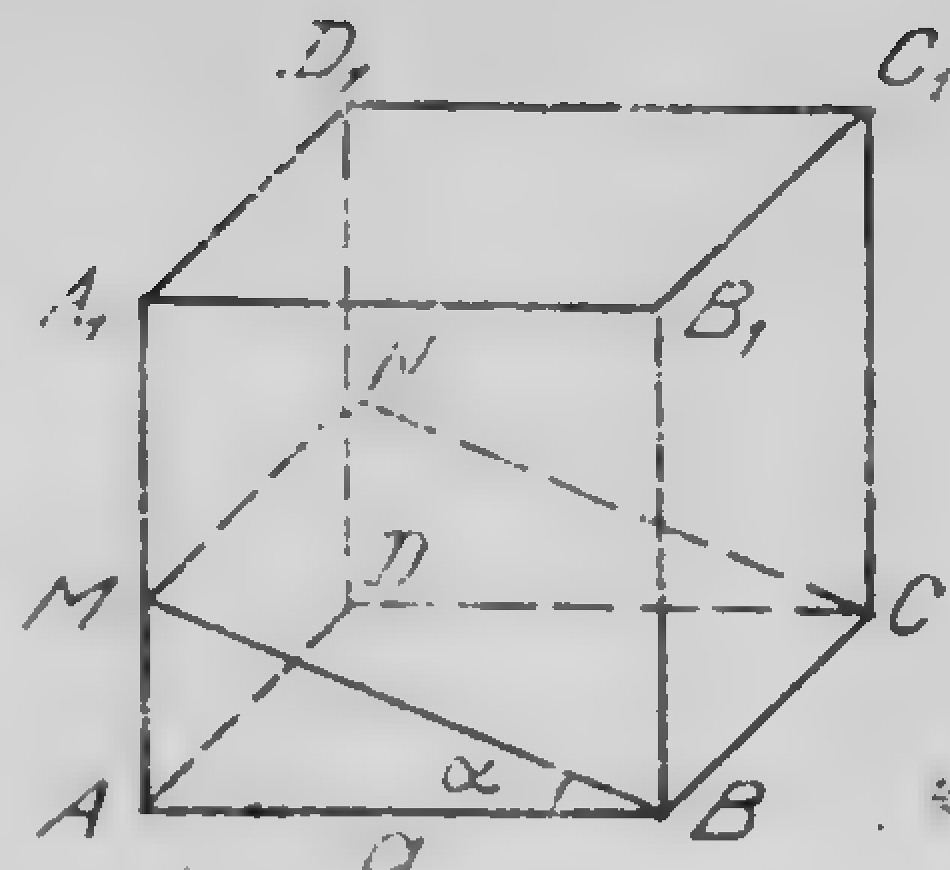
$$\triangle AA_1O\text{-дан: } AO = \frac{a}{\sqrt{3}},\quad AA_1 = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

$$S_{\text{јан}} = a\left(\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + 1\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{a^2\left(\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} + 1\right)}{\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдур, $BCMN$ дөрдбучаглысы BC тилиндән кечән кәсикдир, $\angle MBA = \alpha$, $AB = a$ (шәкил 6).

$\triangle ABM$-дән: $AM = AB\times \operatorname{tg}\alpha = a\operatorname{tg}\alpha$ вә $S = \frac{1}{2}\times AB_1AM = \frac{1}{2}a\cdot a\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha.$

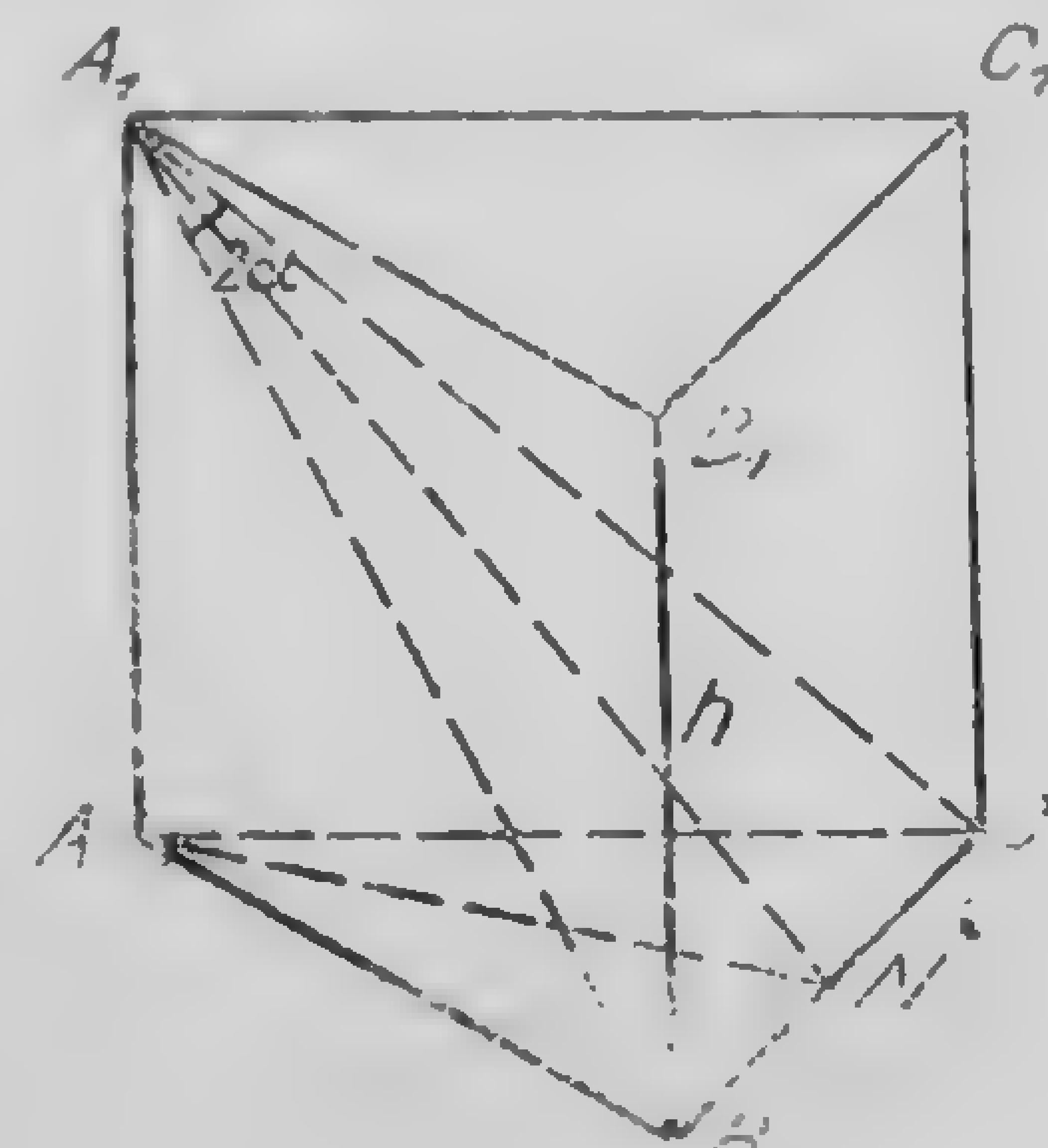


Шәкил 6.

Үчбучаглы призманын һәчми $V_1 = \frac{1}{2}a^3\operatorname{tg}\alpha$, дөрдбучаглы призманын һәчми исә $V_2 = a^3 - \frac{1}{2}a^3\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3(2 - \operatorname{tg}\alpha)}{2}$.

7. $ABCA_1B_1C_1$—дүзкүн үчбучаглы призмадыр, $AA_1 = h$, $\angle BA_1C = 2\alpha$ (шәкил 7). $\triangle A_1AB = \triangle A_1AC$ (катетләр бәрабәр олдуғу үчүн). Онда $A_1B = A_1C$. Демәли, A_1BC үчбучағы бәрабәрјанлыдыр. ABC вә A_1BC бәрабәрјанлы үчбучагларында AN вә A_1N медианлары һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир. $AB = x$ олсун. Онда $AN = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle A_1BN$-дән: $\angle BA_1N = \alpha$, $A_1N = BN\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. $\triangle AA_1N$-дән: $AA_1^2 = A_1N^2 - AN^2, h^2 = \left(\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2$, бурадан $x^2 = \frac{4h^2}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 3} =$



Шәкил 7.

$$=\frac{h^2\sin^2\alpha}{\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}.$$

$$S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}BC\cdot A_1N=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{1}{4}x^2\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{4}\cdot\frac{h^2\sin^2\alpha}{\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\frac{h^2\sin 2\alpha}{8\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}.$$

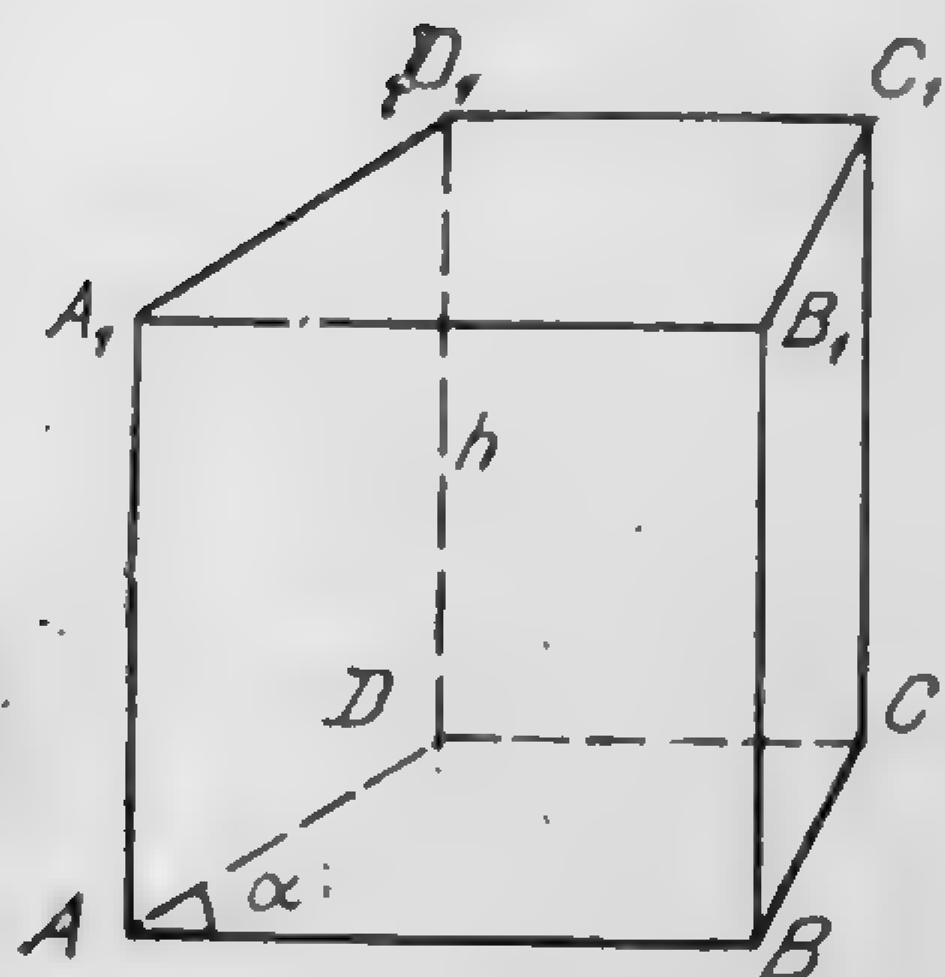
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүз призмадыр. $ABCD$ трапесиіасы (0, r) чеврәсинин харичинә чәкилмишдир. $DD_1=h$, $\angle DAB=\alpha$, $\angle ABC=90^\circ$, $OK=r$ (шәкил 8, *а*, *б*). O мәркәзини K вә P тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк. Онда $OK\perp AB$ вә $OP\perp DC$ (шәкил 8, *б*). $DC\parallel AB$ олдуғу үчүн OK вә OP парчалары бир дүз хәтт үзәриндәдир. Демәли, PK парчасы чеврәнин диаметридир. $DN\perp AB$ чәкәк. $DN=PK$ вә $DC+AB=AD+BC$ (харичә чәкилмиш дөрдбучаглынын хассәсинә көрә)

$$V=\frac{AB+DC}{2}\cdot BC\cdot DD_1=\frac{AD+BC}{2}\cdot BC\cdot DD_1.$$

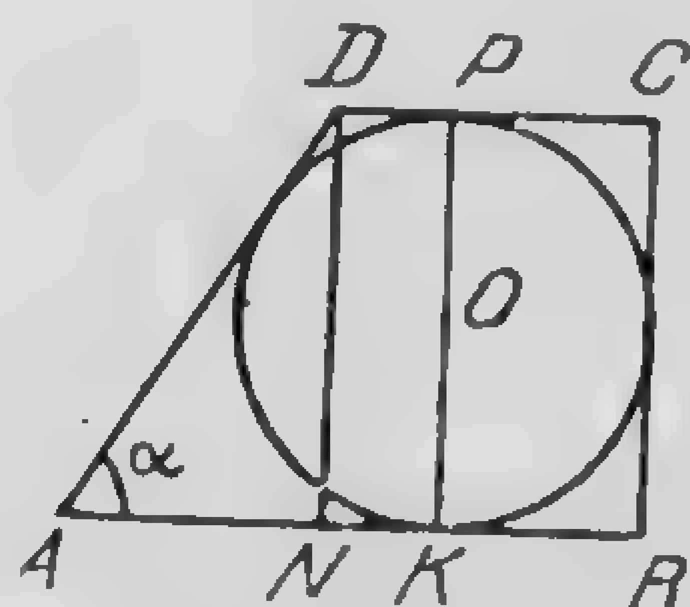
$\triangle ADN$-дән: $AD=\frac{DN}{\sin\alpha}=\frac{2r}{\sin\alpha}$. Онда $AD+BC=$

$$=\frac{2r}{\sin\alpha}+2r=2r\left(\frac{1}{\sin\alpha}+1\right)=$$

$$=2r\cdot\frac{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$



а



б

Шәкил 8.

Сонунчу ифадәни һәчм дүстурунда јазаг:

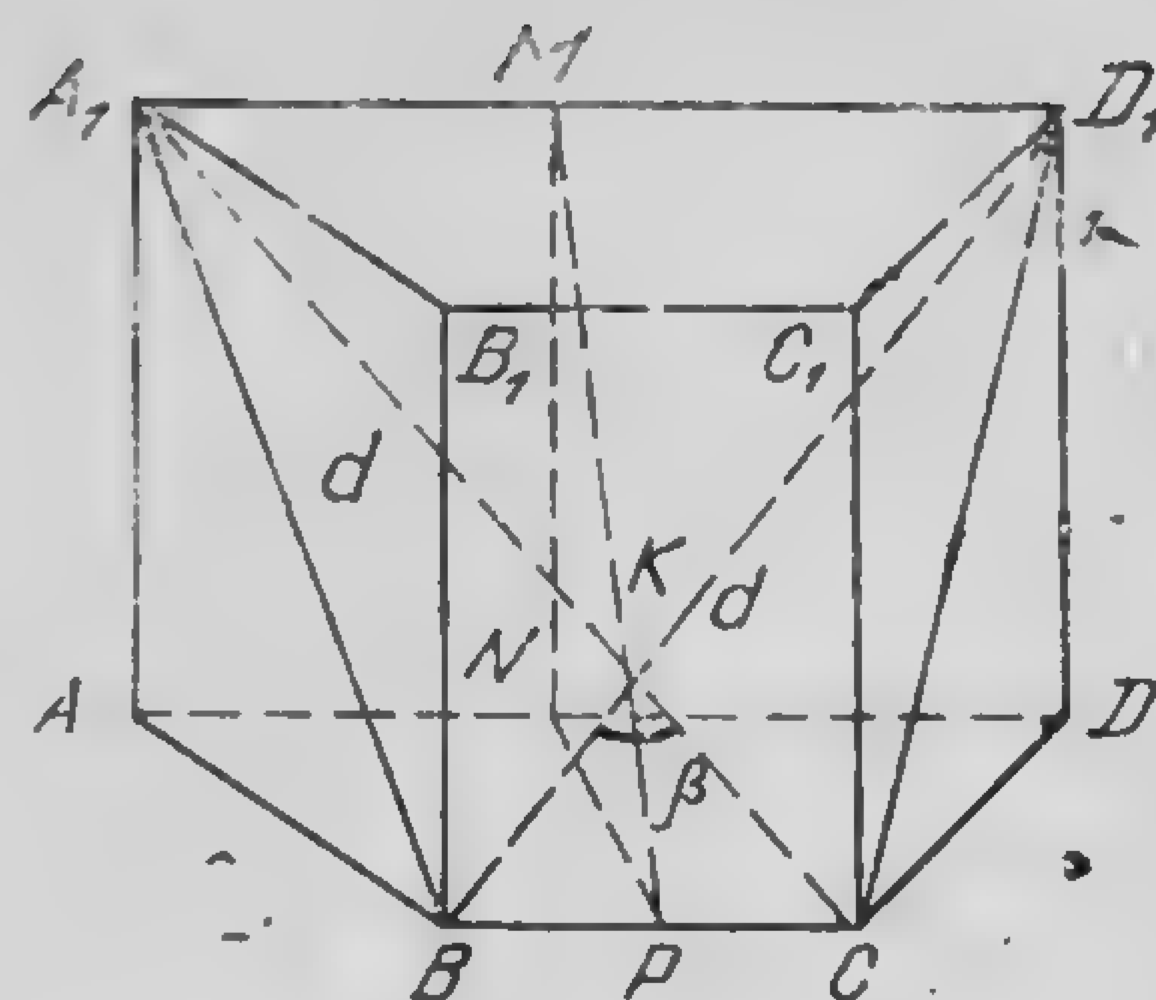
$$V=\frac{AD+BC}{2}\cdot BC\times$$

$$\times DD_1=$$

$$=\frac{4r\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot h$$

$$=\frac{4r^2h\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$



Шәкил 9

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дүз призмадыр, $BD_1=CA_1=d$, $\angle BKC=\beta$, $\angle MPN=\alpha$ (шәкил 9). $BC\parallel AD$, $A_1D_1\parallel AD$ олдуғу үчүн BCD_1A_1 кәсији трапесијадыр. Онун диагоналлары бәрабәр олдуғу үчүн трапесија бәрабәрјанлыдыр. Демәли, $A_1B=D_1C$. $\triangle A_1BC=\triangle D_1BC$. Она көрә $\angle A_1CB=\angle D_1BC$. Онда $\triangle BKC$ вә $\triangle A_1KD_1$ бәрабәрјанлы үчбучаглардыр. K нөгтәсиндән $MP\perp BC$ чәкәк, $A_1D_1\parallel BC$, $MP\perp BC$ олдуғу үчүн $PM\perp A_1D_1$, MN призманын һүндүрлүјүдүр. NP парчасы MP маилинин пројексијасыдыр. Үч перпендикулјар теореминә көрә $NP\perp BC$ олур. $\angle MPN$ верилән α бучағы олачагдыр. BKC вә A_1KD_1 бәрабәрјанлы үчбучагларында KP вә KM һүндүрлүкләри һәм медиан вә һәм дә тәнбөләндир.

A_1KM дүзбучаглы үчбучағында: $\angle A_1KM=\frac{\beta}{2}$.

$A_1K=x$ гәбул едәк, $A_1M=A_1K\sin\frac{\beta}{2}=x\sin\frac{\beta}{2}$, $KM=$

$=A_1K\cos\frac{\beta}{2}=x\cos\frac{\beta}{2}$.

BKP дүзбучаглы үчбучағында: $\angle BKP=\frac{\beta}{2}$, $BK=$

$=d-x$, $BP=BK\sin\frac{\beta}{2}=(d-x)\sin\frac{\beta}{2}$, $KP=BK\times$

$\times\cos\frac{\beta}{2}=(d-x)\cos\frac{\beta}{2}$.

193—4

Призма отурачағындакы трапесиіанын отурачаглары чәминин јарысы:

$$BP + A_1M = (d-x)\sin\frac{\beta}{2} + x\sin\frac{\beta}{2} = d\sin\frac{\beta}{2},$$

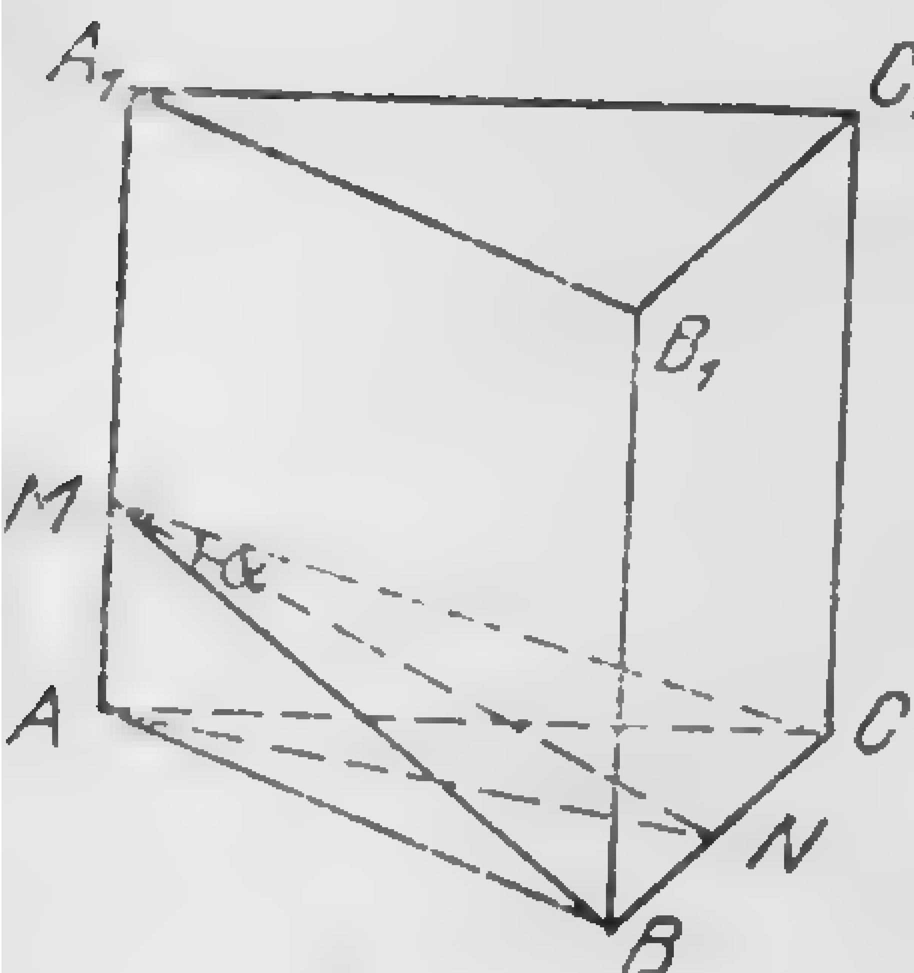
$$MP = PK + KM = (d-x)\cos\frac{\beta}{2} + x\cos\frac{\beta}{2} = d\cos\frac{\beta}{2}.$$

MNP дүзбучаглы үчбучағында: $MN = MP\sin\alpha = d\cos\frac{\beta}{2}\sin\alpha$, $PN = MP\cos\alpha = d\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha$.

$$V = \frac{BC+AD}{2}\cdot PN\cdot MN = (BP + A_1M)\cdot PN\cdot MN =$$

$$= d\sin\frac{\beta}{2}\cdot d\cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha\, d\cos\frac{\beta}{2}\sin\alpha =$$

$$= \frac{d^3\sin\beta\sin 2\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{4}.$$



Шәкил 10

10. Призманын отурачағынын тәрәфини x гәбул едәк: $AN = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ (шәкил 10).

$\triangle BMN$-дән: $\angle BMN = \frac{\alpha}{2}$, $BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$,

$MN = BN\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

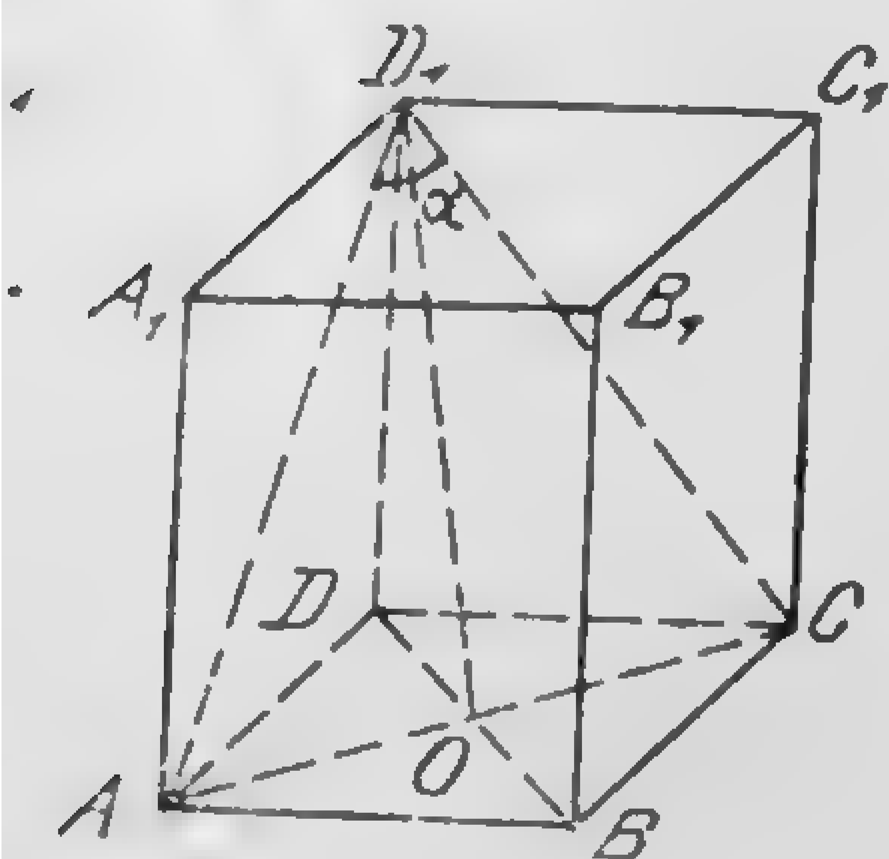
AMN дүзбучаглы үчбучағында: $AN = MN \times \cos\angle ANM$, AN вә MN-нин гијмәтләрини бу бәрабәрликдә јеринә јазсаг:

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\angle ANM,$$

бурадан

$$\cos\angle ANM = \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}},$$

$$\angle ANM = \arccos\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right).$$



Шәкил 11

11. AD_1C кәсији (шәкил 11) бәрабәрјанлы үчбучагдыр. D_1O парчасы бәрабәрјанлы үчбучағын медианы олдугундан һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир.

$$S_{от} = AB^2 = a^2.$$

$$\triangle ABC\text{-дән: } AC = a\sqrt{2},\ AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$DO = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\triangle AD_1O\text{-дан: } \angle AD_1O = \frac{\alpha}{2},\ AD_1 = \frac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\triangle ADD_1\text{-дән: } DD_1 = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ вә } V = a^2\cdot\frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

12. Кәсијин саһәсини ашағыдакы кими (шәкил 12) һесаблајаг:

$$S = \frac{MN + PK}{2}\cdot OF + \frac{1}{2}PK\cdot LF =$$

$$= \frac{1}{2}MN\cdot OF + \frac{1}{2}PK\cdot LO.$$

ABC дүзбучаглы үчбучағында:

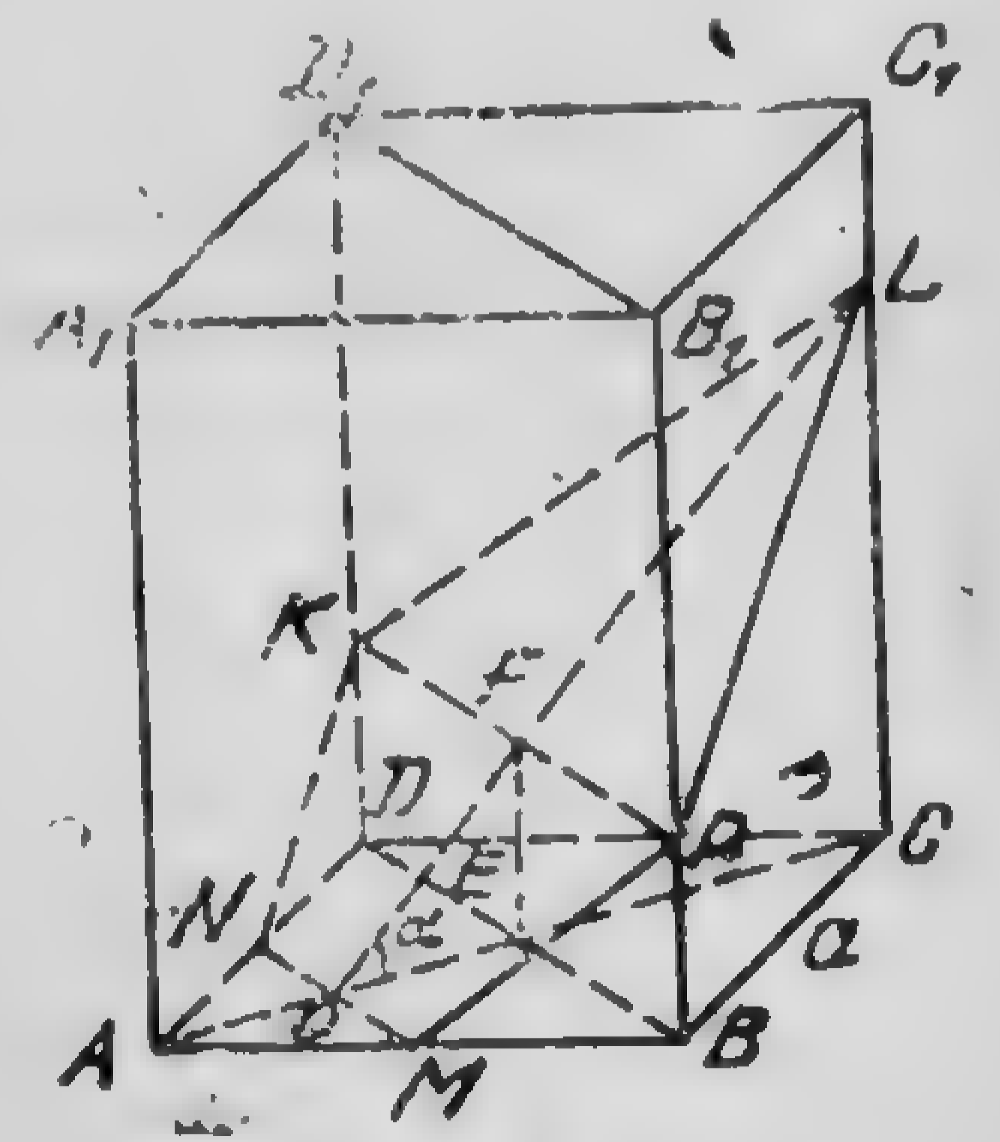
$$BD = AC = a\sqrt{2}.$$

$$MN = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$PK = BD = a\sqrt{2};$$

$$AE = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$OE = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$



Шәкил 12

$\triangle OLC$-дән: $OC = OE + EC =$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a; \quad OL = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{2}a}{4\cos\alpha}.$$

$\triangle OEF$-дән: $OF = \frac{OE}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{4\cos\alpha}$.

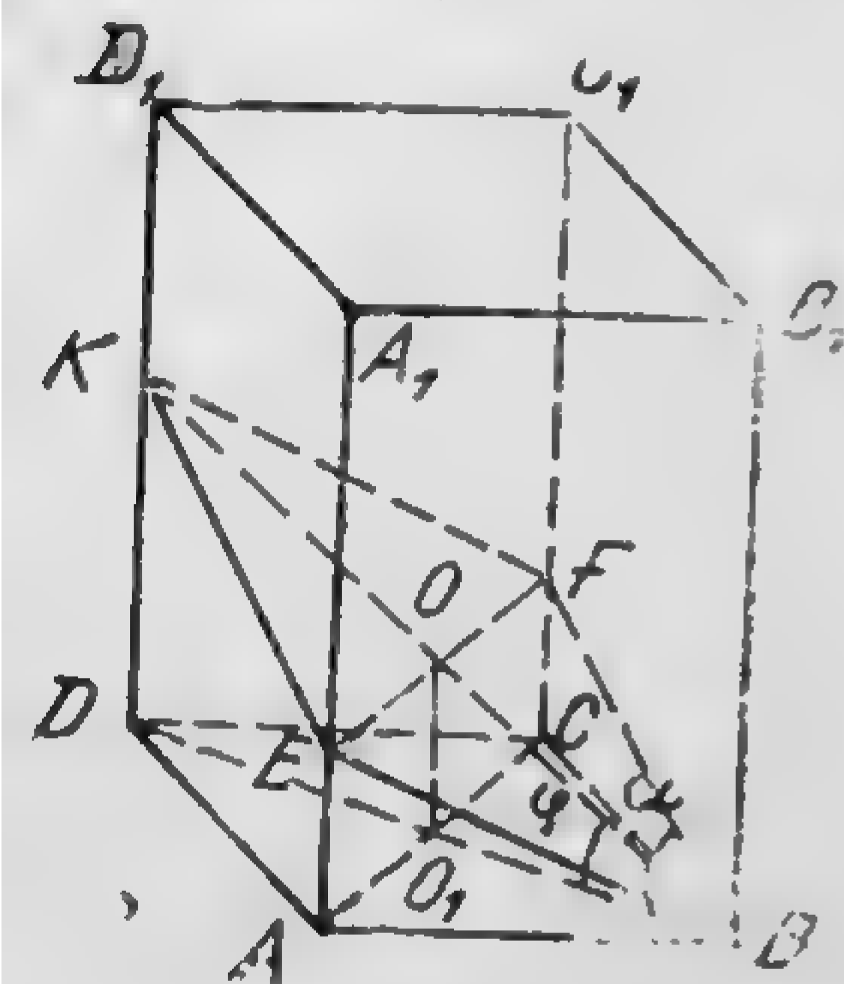
Бурадан

$$S = \frac{1}{2}MN\cdot OF + \frac{1}{2}PK\cdot OL = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4\cos\alpha} + $$

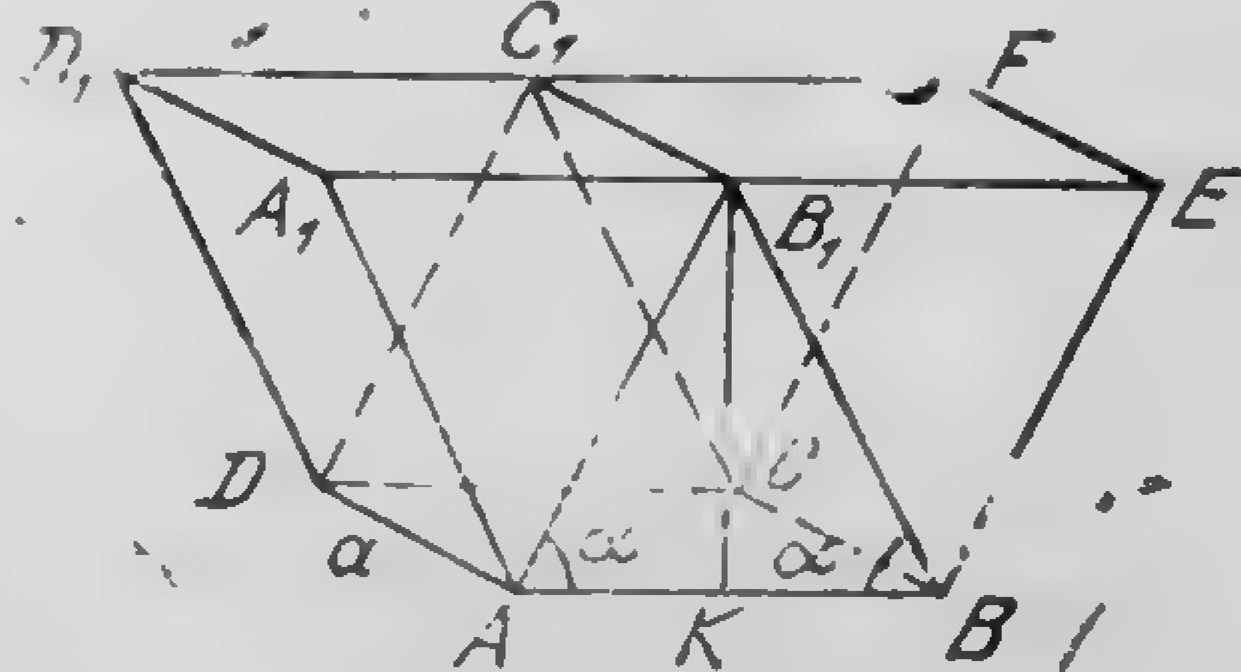
$$+ \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}a}{4\cos\alpha} = \frac{7a^2}{8\cos\alpha}.$$

13. Көстәриш. $AEFC$ паралелограм олдугу үчүн $EF = AC$ (шәкил 13).

14. ABB_1C_1DC чохүзлүсү һәр ики паралелепипед үчүн ортаг олан һиссәдир. Бу чохүзлү отурачағы ABB_1 үчбучағы олан (шәкил 14) призмадыр. Паралелепипедин B_1K һүндүрлүјүнү чәкәк, B_1K парчасы гаршылыглы перпендикулјар олан ики мүстәвинин биринә о бири мүстәви илә ортаг нөгтәси олан перпендикулјар олдуғундан тамамилә ABB_1 мүстәвиси үзәринә дүшәчәкдир. $AK \perp AD$, AK парчасы B_1A маилин пројексијасыдыр вә үч перпендикулјар теореминә көрә $B_1A \perp DA$ олур. Демәли, $\angle B_1AK$ бучағы јан үз илә отурачаг мүстәвиси арасындакы икиүзлү бучағын хәтти бучағыдыр. Аналожи оларaг $\angle B_1BA$ бучағынын хәтти бучаг олдуғуну тә'јин едирик. $DA \perp AB_1$, $DA \perp AB$ олдуғу үчүн DA парчасыны AB_1BDC_1C призмасынын һүндүрлүјү көтүрмәк олар.



Шәкил 13



Шәкил 14

$\angle B_1AB = \angle B_1BA$ олдуғу үчүн AB_1B бәрабәрјанлы үчбучаг вә онун KB_1 һүндүрлүјү һәм дә медиандыр. AB_1K үчбучағында:

$$B_1K = AK\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha, \quad S_{AB_1B} = \frac{1}{2}AB\cdot B_1K = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

$$V = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\cdot a = \frac{a^3}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

15. Призманын һәчмини V илә ишарә едәк, онун бир һиссәси олан B_1ABC пирамидасынын һәчми: $V_1 = \frac{1}{3}V$, икинчи һиссәсинин һәчми исә $V_2 = \frac{2}{3}V$.

$\triangle ABC$-дән: $AB = \frac{BC}{\cos\alpha}$, $BC + AB = m$, $BC + \frac{BC}{\cos\alpha} = m$, бурадан $BC = \frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ (шәкил 15).

$$S_{\text{от}} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}BC^2\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\alpha =$$

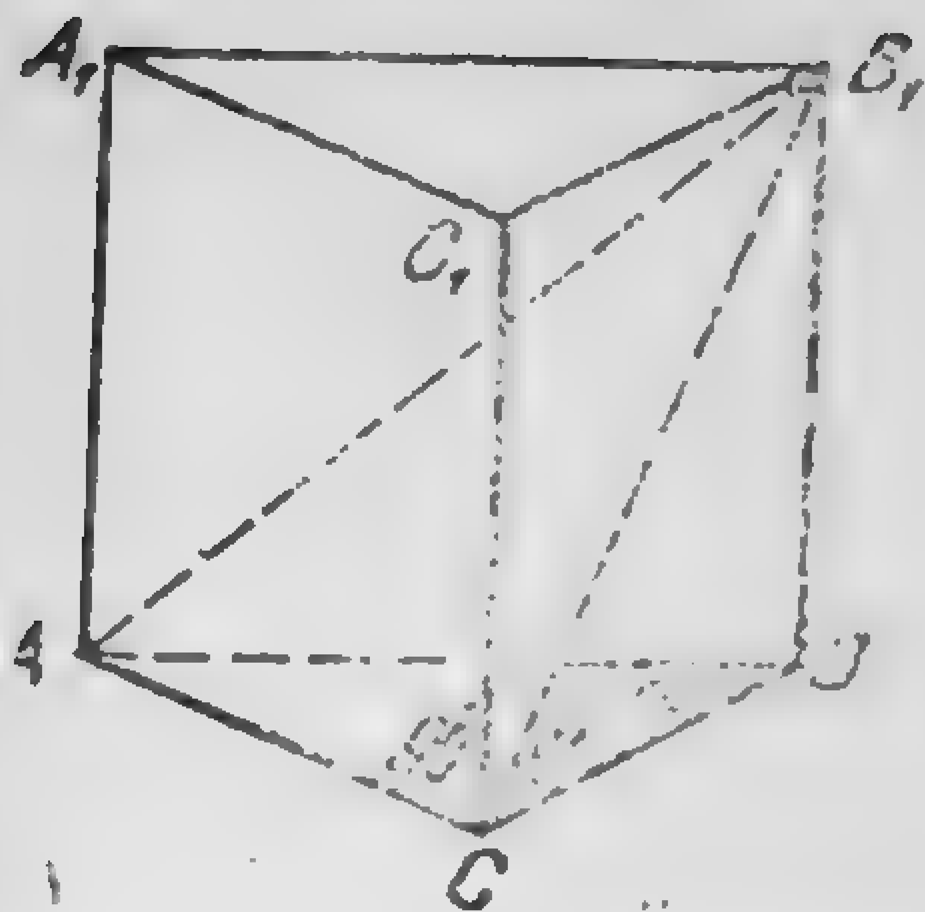
$= \frac{m^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{8\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. $V_1 = \frac{1}{3}S_{\text{от}}\cdot BB_1$, $S_{\text{от}}$ вә BB_1-и тә'јин едәк:

$$\triangle BB_1C\text{-дән: } BB_1 = BC\operatorname{tg}\beta = \frac{m\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}};$$

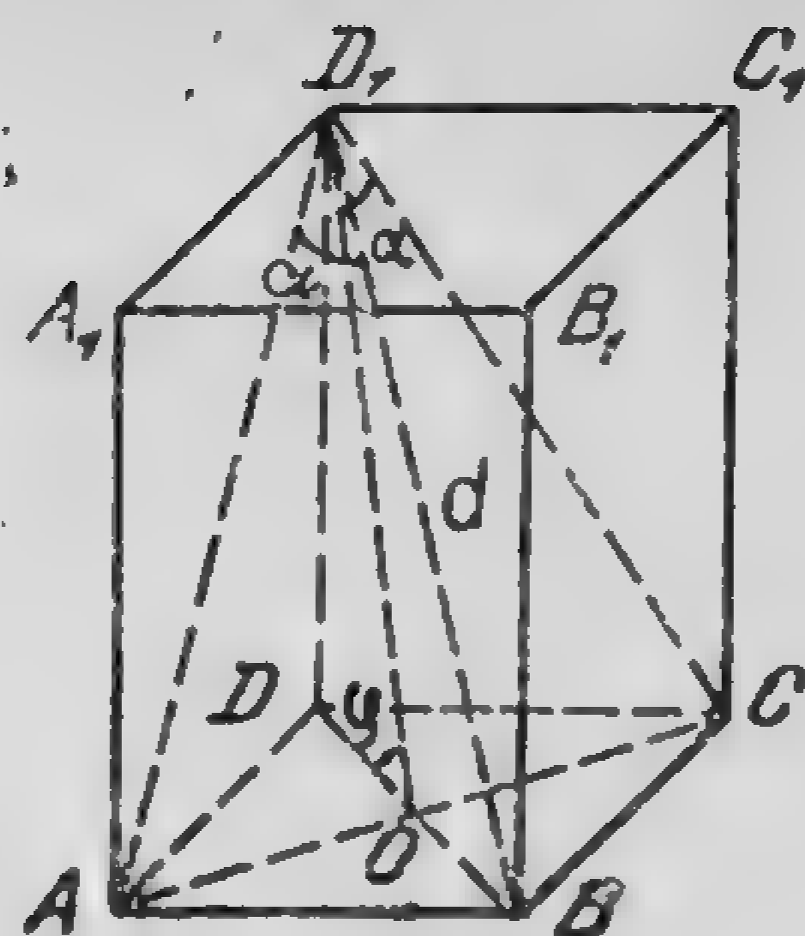
$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{m^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{8\cos^4\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{m\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{m^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{48\cos^6\frac{\alpha}{2}},$$

$$V_2 = \frac{m^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

16. $BA \perp AD$ вә $BA \perp AA_1$ (шәкил 16) олдуғундан $BA \perp (AA_1D_1)$, она көрә дә $BA \perp D_1A$, беләликлә ABD_1



Шәкил 15



Шәкил 16

дүзбучаглы үчбучаг олар. Һәмин гајда үзрә BD_1C дүзбучаглы үчбучаг, BD_1C вә AD_1B бучаглары диагоналы илә јан үзләр арасындакы верилмиш бучаг олдуғу исбат едилир. $\triangle AD_1B = \triangle BD_1C$ (һипотенузу вә ити бучаглары бәрабәрдир). Она көрә $AB = BC$ олур. Демәли, $ABCD$ квадратдыр.

$\triangle AD_1B$-дә $\angle AD_1B = \alpha$, $|BD_1| = d$ олдугда $AB = BD_1\sin\alpha = d\sin\alpha$, $AD_1 = BD_1\cos\alpha = d\cos\alpha$ олур.

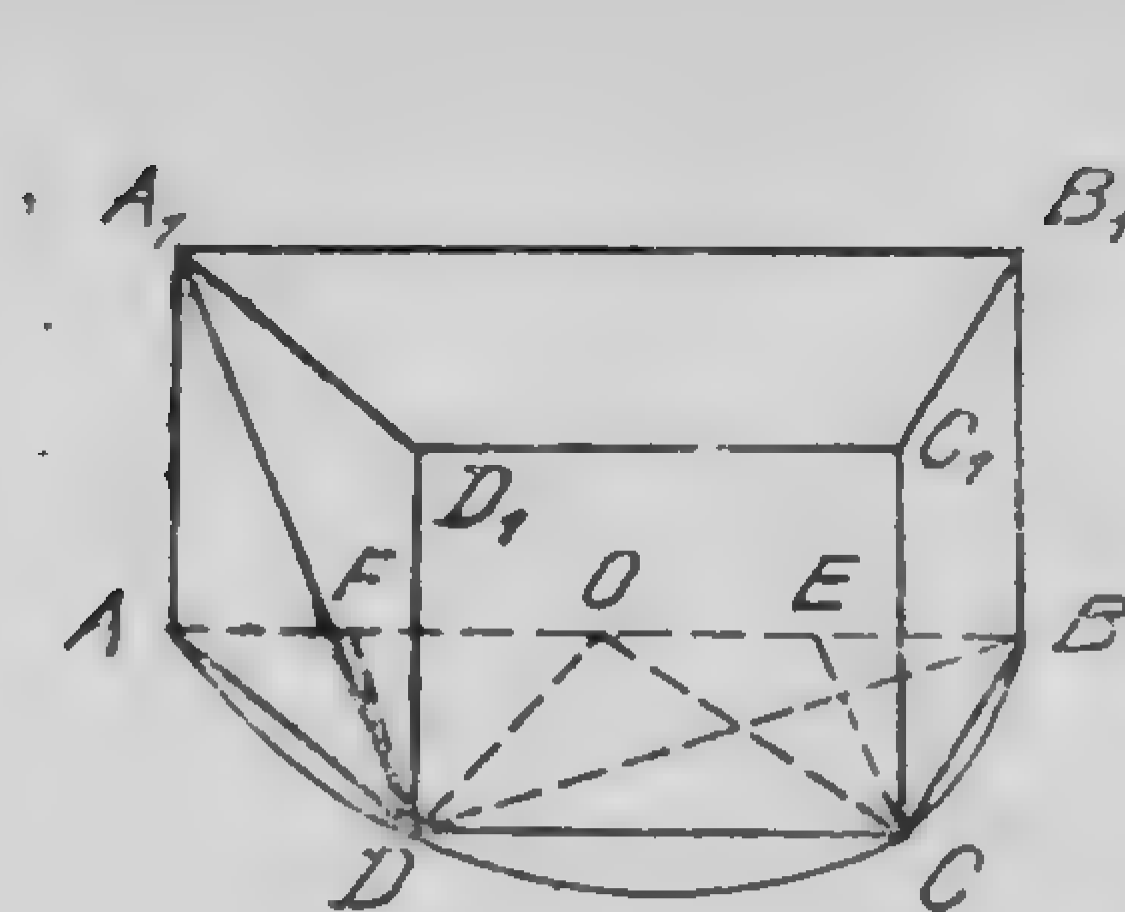
$\triangle AD_1D$-дән: $DD_1 = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{AD_1^2 - AB^2} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}$. $S_{от} = AB^2 = d^2\sin^2\alpha$.

$$V = d^2\sin^2\alpha\cdot d\sqrt{\cos 2\alpha} = d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

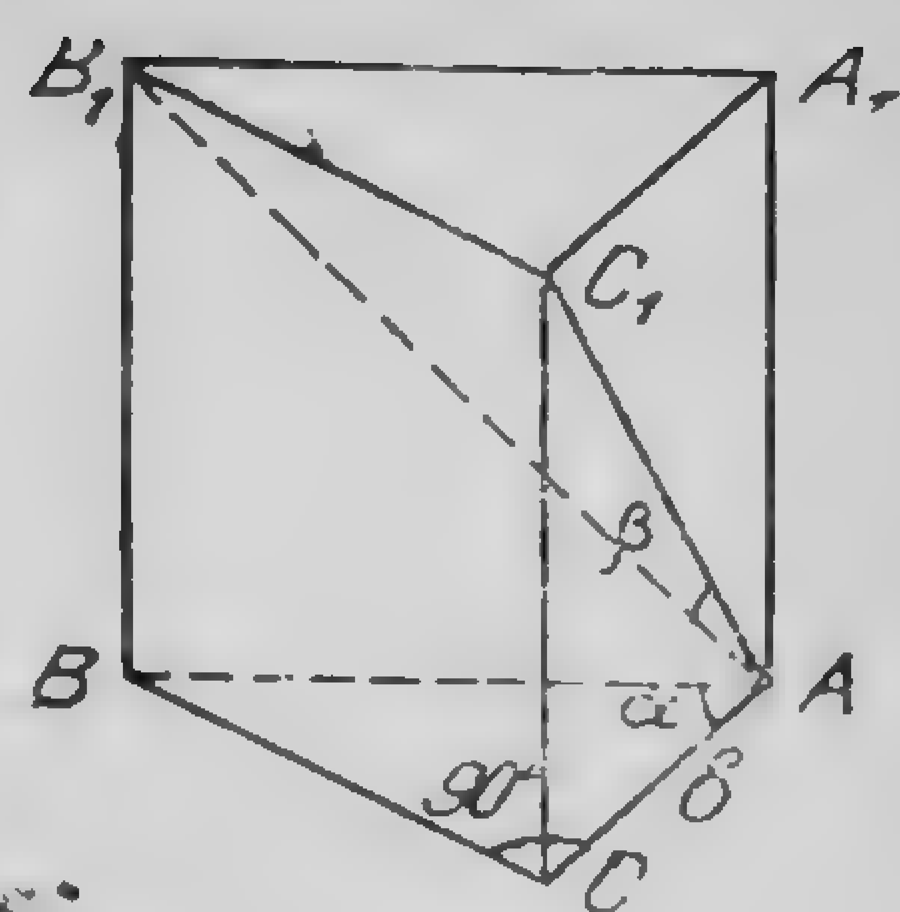
ACD_1 мүстәвисинин отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучаг:

$$\varphi = \angle DOD_1,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{DD_1}{OD} = \frac{\sqrt{2}\,DD_1}{AB} = \frac{\sqrt{2}\,d\sqrt{\cos 2\alpha}}{d\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}\right).$$

17. $\smile CD = 2\alpha$, $AB = 2R$ (шәкил 17). $DF \perp AB$, $CE \perp AB$ чәкәк, O мәркәзини D вә C нөгтәләри илә бирләшдирәк. $\smile CD = 2\alpha$ олдуғундан $\angle CBD = \alpha$ вә синуслар теореминә көрә $CD = 2R\sin\alpha$. ODC үчбучағында $OD = OC$ (радиуслары олдуғу үчүн), $\angle ODC = \angle OCD$ олур, бурадан $\angle ODC + \angle OCD + \angle DOC = 180°$, $2\angle ODC = 180° - 2\alpha$, $\angle ODC = 90° - \alpha$. Лакин $\angle AOD = \angle ODC$ (чарпаз бучаглары олдуғундан). Демәли, $\angle AOD = 90° - \alpha$, $\smile AD = 90° - \alpha$.



Шәкил 17



Шәкил 18

$\triangle DFO$-да: $DF = OD\sin(90° - \alpha) = R\cos\alpha$,

$\triangle ABD$-дән: $\angle ABD = \frac{1}{2}\smile AD = \frac{1}{2}(90° - \alpha) = 45° - \frac{\alpha}{2}$, $AD = AB\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

$\triangle AA_1D$-дән: $AA_1 = AD\operatorname{tg}\alpha = 2R\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

$$V = \frac{AB + CD}{2}\cdot DF\cdot AA_1 = \frac{2R + 2R\sin\alpha}{2}\cdot R\cos\alpha \times 2R\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha = 2R^3(1 + \sin\alpha)\times \cos\alpha\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha = R^3\sin 2\alpha\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

18. $B_1C_1 \perp A_1C_1$ (шәртә көрә), $B_1C_1 \perp CC_1$ (BB_1C_1C — дүзбучаглы олдуғуна көрә). B_1C_1 парчасы CC_1A_1A мүстәвисинә перпендикулјардыр. Одур ки, AC_1 парчасы AB_1 маилинин проjексиjасыдыр. Демәли, $\angle B_1AC_1 = \beta$ верилмиш бучагдыр (шәкил 18).

$\triangle ABC$-дән: $BC = AC\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\alpha$.

$\triangle AB_1C_1$-дән: $AC_1 = B_1C_1\operatorname{ctg}\beta = b\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

$\triangle ACC_1$-дән: $CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{b\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - b^2} = b\operatorname{ctg}\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{b\sqrt{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}}{\cos\alpha\sin\beta}$.

$$V = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{b \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha \sin\beta} =$$

$$= \frac{b^3 \operatorname{tg}\alpha \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{2\cos\alpha\sin\beta}.$$

19. Тутаг ки, $AD \perp (BB_1C_1)$ (шәкил 19). Перпендикулјар ики мүстәвидән биринә (BB_1C_1C), о бири мүстәви илә ортаг нөгтәси олан перпендикулјар олдуғундан бу парча ABC мүстәвиси үзәриндә олачагдыр. Демәли, $AD \perp BC$, $AD \perp B_1D$, онда B_1D парчасы AB_1 диагоналынын BB_1C_1C мүстәвиси үзәриндәки проjексиjасы, AB_1D верилмиш α бучағы олачагдыр. $AD \perp BC$ вә $BD = DC$ олдуғундан $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ олар.

$\triangle AB_1D$-дән: $AB_1 = \frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$.

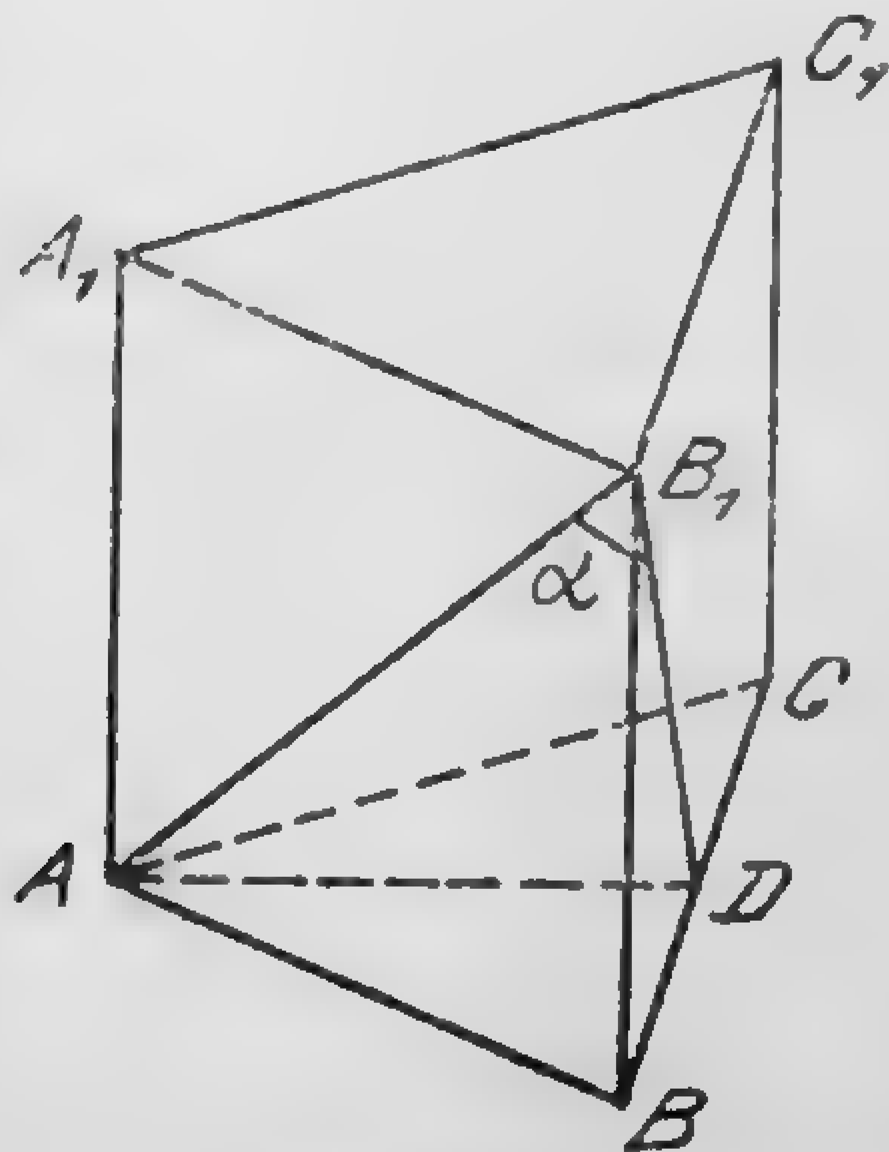
$\triangle ABB_1$-дән: $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2\sin\alpha}\right)^2 - a^2} =$

$$= \frac{a\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha}.$$

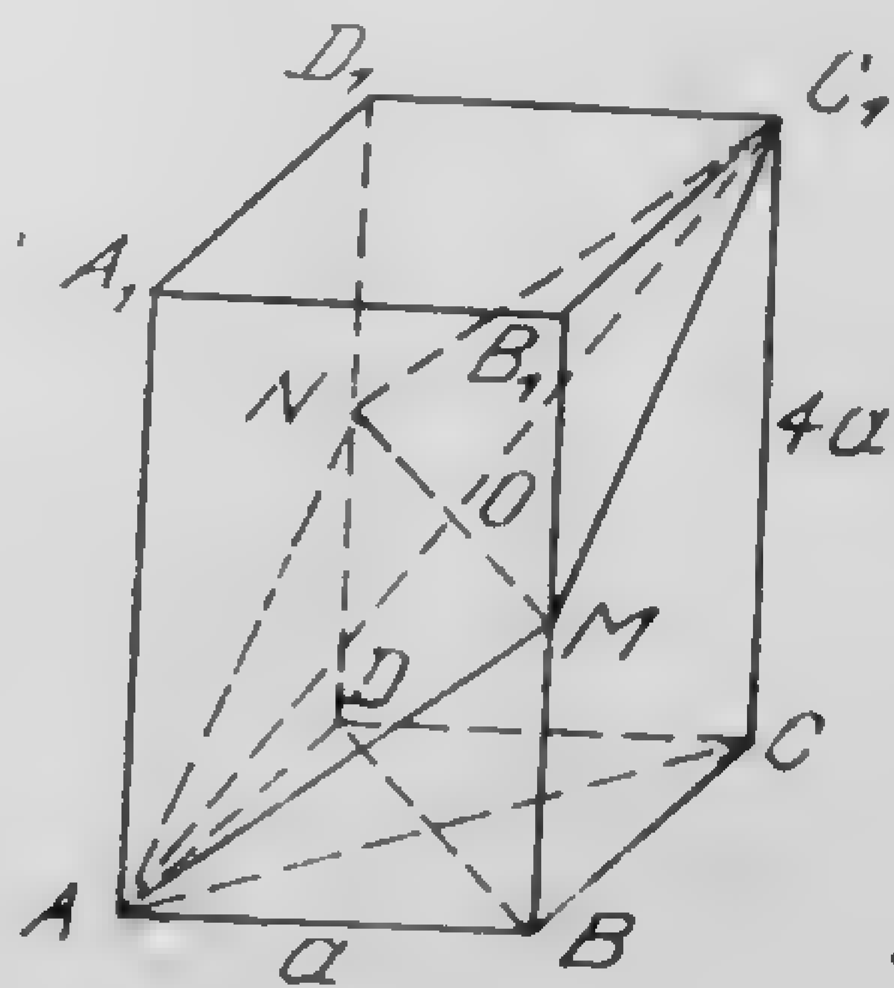
$$S_{\text{јан}} = 3a \cdot \frac{a\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha}.$$

20. Тутаг ки, призманын AC_1 диагоналындан (шәкил 20) кечән AMC_1N кәсиjи отурачағын BD диагоналына паралелдир. Онда $MN \parallel BD$ (12 №-ли мәсәләjә бахын), $BMND$ паралелограмда $MN = BD$ олур. $CA \perp BD$ олдуғу үчүн үч перпендикулјар теореминә көрә $C_1A \perp BD$ олур. $MN \parallel BD$ олдуғундан $C_1A \perp MN$ олур. Кәсиjин саһәси: $S = \frac{1}{2} MN \cdot AC_1$.



Шәкил 19



Шәкил 20

$\triangle ABD$-дән: $BD = a\sqrt{2}$.

$\triangle ACC_1$-дән: $\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (4a)^2} =$

$= 3a\sqrt{2}$. Бурадан $S = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot 3a\sqrt{2} = 3a^2$ алырыг.

21. Отурачаг квадрат олдуғундан $DO \perp AC$ вә DO парчасы D_1O маилинин проjексиjасы олачаг (шәкил 21), һәмчинин $AO = OD$, $AO = x$ гәбул едәк. Онда $AD = DC = x\sqrt{2}$ олачагдыр. $AD_1 = CD_1$ (бәрабәр дүзбучаглыларын диагоналларыдыр). Демәли, $\triangle AD_1C$ бәрабәрјанлы, D_1O парчасы онун медианы олдуғу үчүн һәм дә тәнбөләндир.

$\triangle AD_1O$-дан: $D_1O = AO \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$\triangle ODD_1$-дән: $DD_1 = \sqrt{OD_1^2 - OD^2} = \sqrt{\left(x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - x^2} =$

$= x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}$.

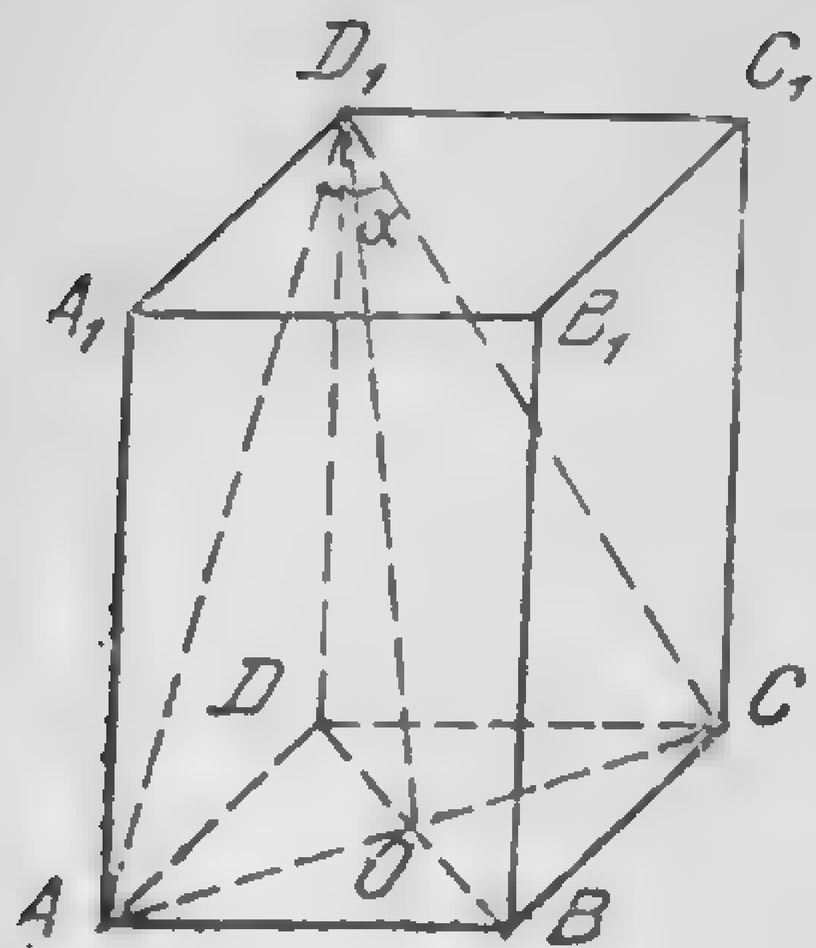
D_1ADC пирамидасынын там сәтһинин верилмиш саһәси:

$$S = S_{ADC} + 2S_{ADD_1} + S_{AD_1C} = DO_1AO + AD_1DD_1 +$$

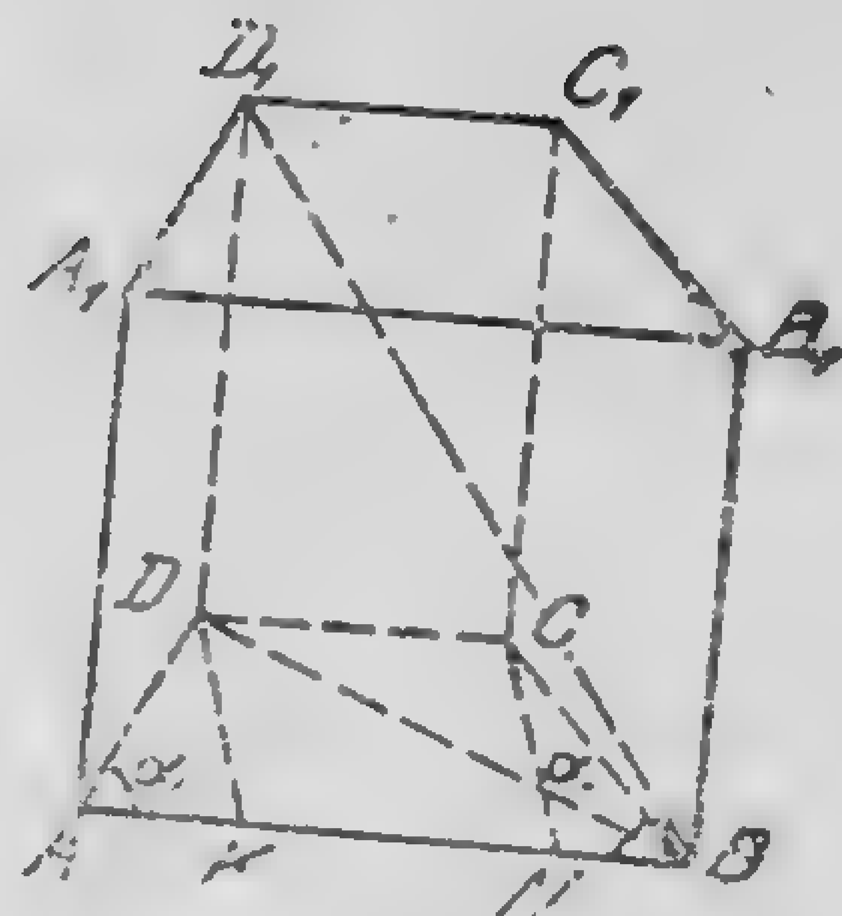
$$+ AO_1OD_1 = x^2 + x\sqrt{2}\cdot x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} +$$

$$+ x \cdot x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = x^2\left(1 + \frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= x^2 \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$



Шәкил 21



Шәкил 22

вә бурадан:

$$x^2 = \frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Призманын там сәтһи:

$$S_т = 2AB^2 + 4AB\cdot DD_1 = 2\left(x\sqrt{2}\right)^2 +$$

$$+4x\sqrt{2}\cdot x\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1} = 4x^2 + 4x^2\sqrt{2}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{4S\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

22. DCB үчбучағында (шәкил 22) $DC = CB$ олдуғу үчүн $\angle CDB = \angle CBD$ олур. Лакин $\angle DBA = \angle CDB$ (чарпаз бучаглар олдуғундан). Бурадан $\angle CBD = \angle DBA$ олур. Она көрә $\angle CBD = \angle DBA = \angle CDB = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\alpha$. $DK \perp AB$, $CN \perp AB$ чәкәк. Отурачағын BD диагоналыны x илә ишарә едәк.

$\triangle DCB$-дән: $$\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{\sin(180-\alpha)},$$

$$DC = \frac{x\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{x}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$\triangle ADK$-дан: $$DK = AD\sin\alpha = \frac{x\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = x\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$AK = AD\cos\alpha = \frac{x\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$AB = AK + KN + NB = 2AK + DC,$$

$$S_{от} = \frac{AB+CD}{2}\cdot DK = \frac{2AK+CD+CD}{2}\cdot DK =$$

$$= (AK+CD)\,DK = \left(\frac{x\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{x}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot x\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= x^2\cdot\frac{\cos\alpha+1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = x^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Лакин $x^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = S$ вә $\angle DBD_1 = \frac{\alpha}{2}$ олдуғу шәртдә верилмишдир. Бурадан $x = \sqrt{\frac{S}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

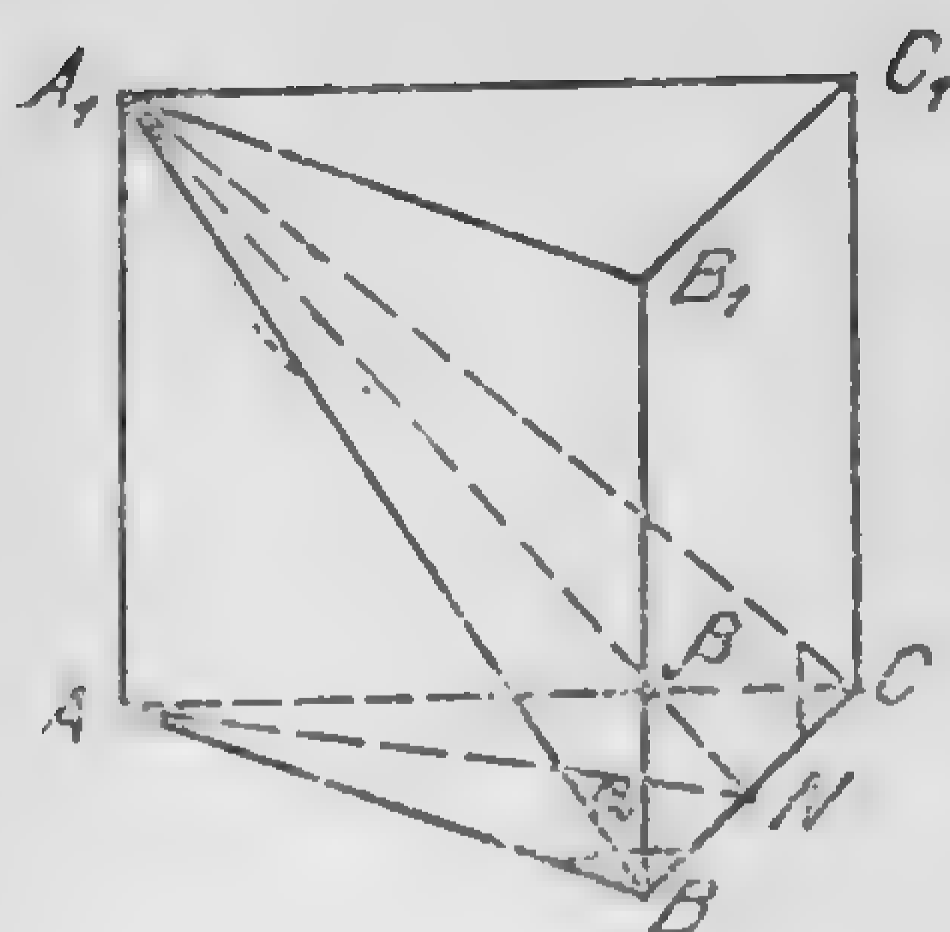
$\triangle BDD_1$-дән: $$DD_1 = BD\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{S}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{S^{\frac{1}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

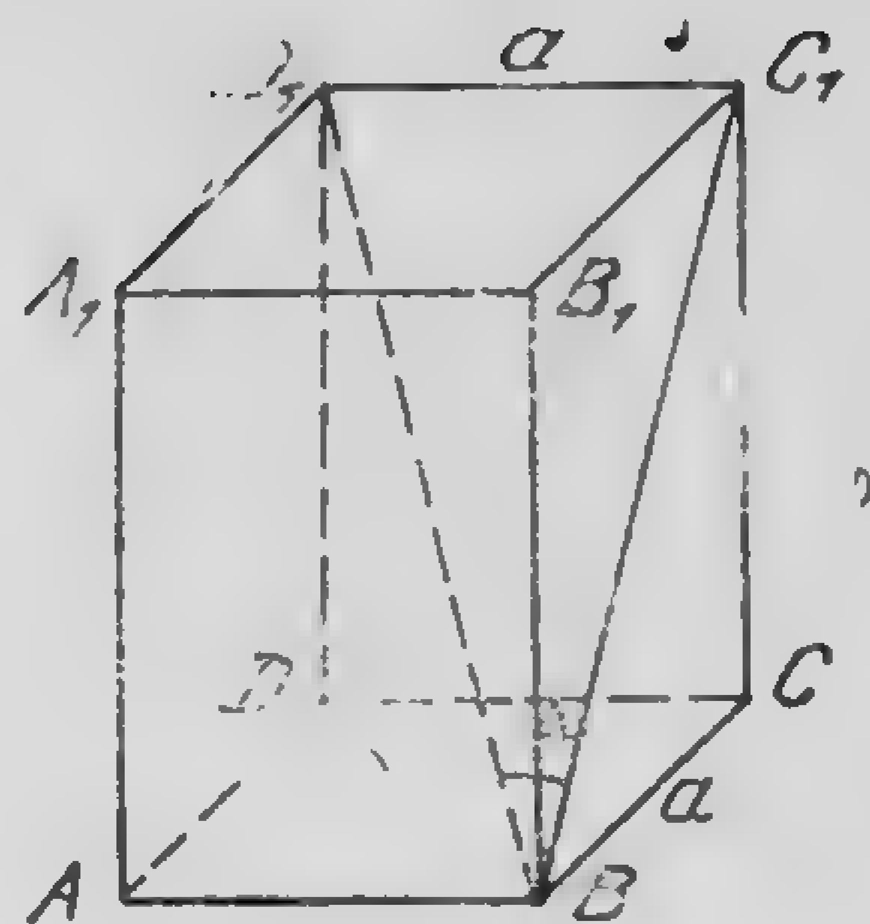
$$= S^{\frac{1}{2}}\sec\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

$$V = S\cdot S^{\frac{1}{2}}\sec\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = S^{\frac{3}{2}}\sec\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

23. Бәрабәр үзләрин диагоналлары олдуғу үчүн $A_1B = A_1C$, јә'ни $\triangle A_1BC$ бәрабәрјанлыдыр (шәкил 23).



Шәкил 23



Шәкил 24

AN вә A_1N медианлары һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләни олачагдыр. $BC = x$ гәбул едәк. $\triangle ABN$-дә:

$$BN = \frac{1}{2}BC = \frac{x}{2}\ AN = \frac{1}{2}x\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ AB = \frac{x}{2\cos\alpha},$$

$$2\cdot\frac{x}{2\cos\alpha} + x = 2P$$

верилмишдир. Бурадан $x = \dfrac{P\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, $S_{от} = \dfrac{1}{2}BC\cdot AN =$

$$= \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

$\triangle A_1BN$-дән: $A_1N = BN\cdot\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta.$

$\triangle AA_1N$-дән: $AA_1 = \sqrt{A_1N^2 - AN^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta - \mathrm{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{x\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

$S_{от}$ вә AA_1-ин тапдығымыз гиjмәтләрини $V = S_{от}\times$ $\times AA_1$ бәрабәрлиjиндә jеринә jазсаг: $V = \dfrac{1}{4}x^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\times$

$$\times\frac{x\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\alpha\cos\beta} = x^3\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{8\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \left(\frac{P\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^3\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{8\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{P^3\sin 2\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{16\cos^6\frac{\alpha}{2}\cos\beta}.$$

24. $D_1C_1 \perp CC_1$, $D_1C_1 \perp B_1C_1$ олдуғу үчүн (шәкил 24) $D_1C_1 \perp (BB_1C_1)$, BC_1 парчасы BD_1 диагоналын бу мүстәви үзәриндәки проjексиjасы олачагдыр. $\angle D_1BC_1$ диагонал илә jан үз арасындакы верилмиш бучагдыр.

BD_1C_1 үчбучагында $\angle D_1BC_1 = \alpha$, $D_1C_1 = a$, $BC_1 = D_1C_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. $\triangle BCC_1$-дән: $CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \sqrt{(a\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^2 - a^2} = a\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1} = a\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$

$$= \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

$$V = a^2\cdot\frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

25. Тутаг ки, A_1O паралелепипедин һүндүрлүjүдүр (шәкил 25). $OK \perp AB$, $ON \perp AD$ чәкәк. K вә N нөгтәләрини A_1 илә бирләшдирәк. Үч перпендикулjар теореминә көрә $A_1N \perp AD$, $A_1K \perp AB$. $\triangle AA_1K = \triangle AA_1N$ (AA_1 һипотенузу ортаг вә ити бучаглары бәрабәрдир). Она көрә $A_1K = A_1N$ олур. A_1K вә A_1N маилләри бәрабәр олдуғундан OK вә ON проjексиjалары да бәрабәр олачагдыр. Демәли, A вә O нөгтәләриндән кечән хәтт BAD бучағынын тәнбөләнидир.

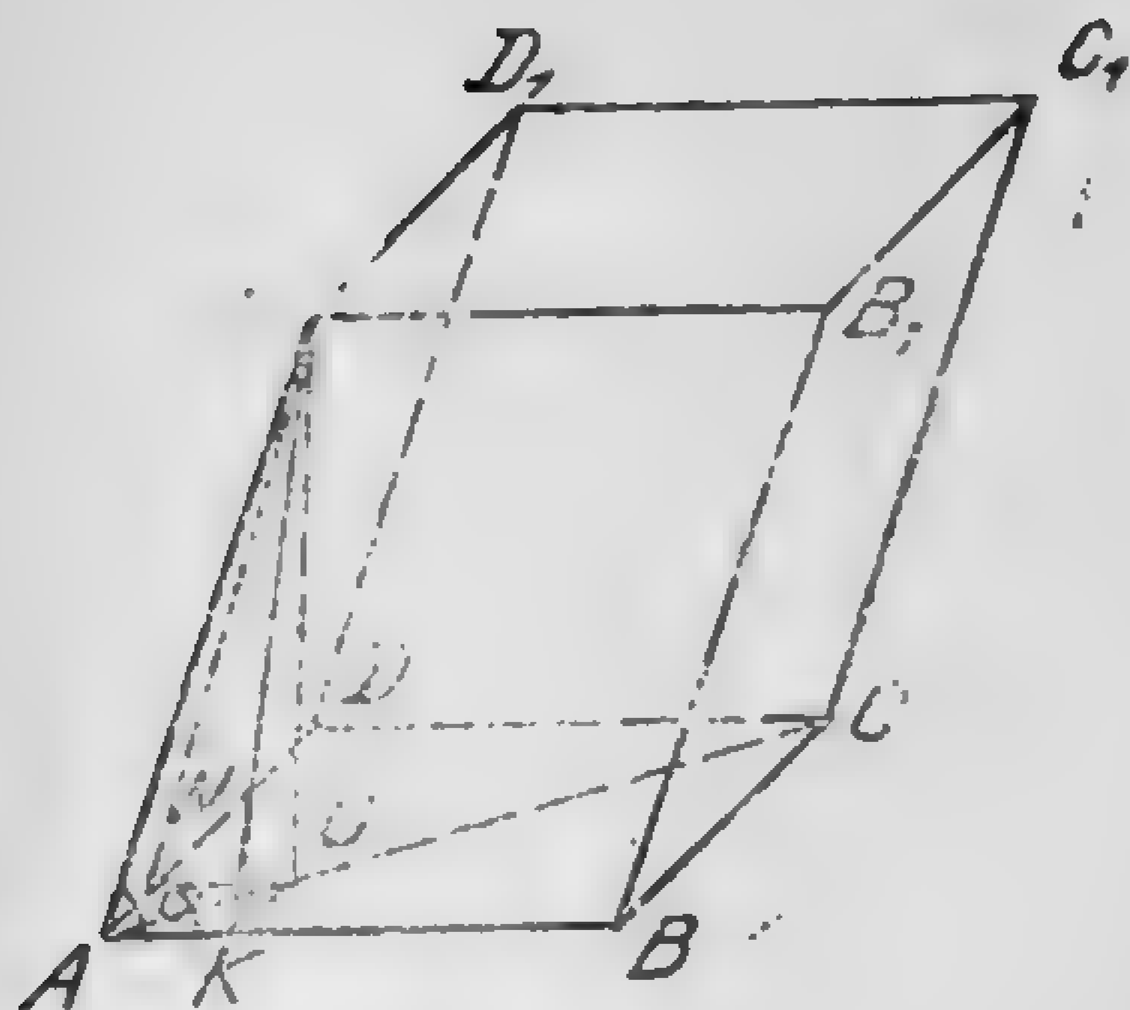
$\triangle AA_1K$-дан: $AK = AA_1\cos\alpha = a\cos\alpha.$

$\triangle AKO$-дан: $AK = AO\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $AO = \dfrac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$

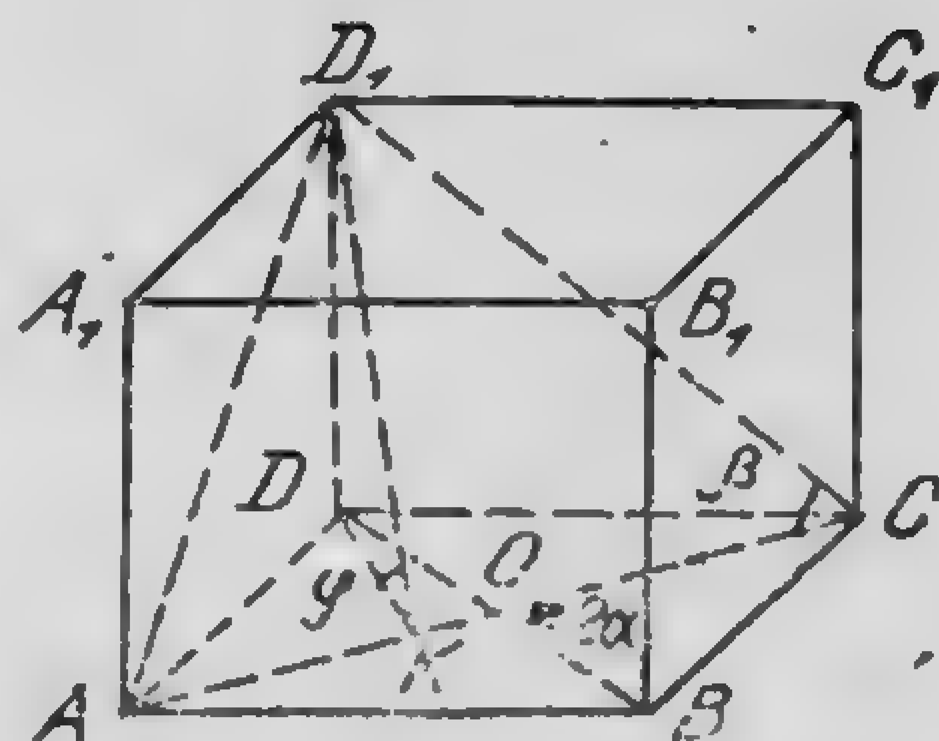
$\triangle AA_1O$-дан: $A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} =$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = a\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$



Шәкил 25



Шәкил 26

олур. $S_{от} = a^2 \sin\alpha$, $V = S_{от}\cdot A_1O = a^2 \sin\alpha \times$

$$\times \frac{a\sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

26. $AB > BC$ гәбул едәк (шәкил 26). $DK \perp AC$ чәкәк. Үч перпендикулјар теореминә көрә $D_1K \perp AC$. $\angle D_1KD$ кәсиклә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучагдыр, ону φ илә ишарә едәк. $AO = OB$ (дүзбучаглынын диагоналларынын јарысыдыр). Онда $\angle OAB = \angle OBA$ вә BOC харичи бучағы олдуғундан $\angle BOC = \angle OAB + \angle OBA$ олар. Бурадан $\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}\angle BOC = \alpha$ олур. ABC үчбучағындан $BC = AC\sin\alpha = 2R\sin\alpha$, $AB = AC\cos\alpha = 2R\cos\alpha$. DKC үчбучағында: $\angle DCA = \angle CAB$ (паралел дүз хәтләрин чарпаз бучагларыдыр). Лакин $\angle CAB = \alpha$, бурадан $\angle DCA = \alpha$. $DK = DC\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha$, $CK = DC\cos\alpha = 2R\cos\alpha\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha$.

CD_1K дүзбучаглы үчбучағында: $D_1K = KC\cdot \operatorname{tg}\beta = 2R\cos^2\alpha \operatorname{tg}\beta$, D_1DK үчбучағында: $DD_1 = \sqrt{D_1K^2 - DK^2} = \sqrt{(2R\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta)^2 - (2R\cos\alpha\sin\alpha)^2} = 2R\cos^2\alpha \times \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha} = 2R\cos\alpha\sec\beta\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$. $S_{јан} = 2(AB + BC)\,DD_1 = 2(2R\cos\alpha + 2R\sin\alpha)\cdot 2R \times$

$\times \cos\alpha\sec\beta\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)} = 8R^2\cos\alpha\sec\beta\cos(45° - \alpha)\sqrt{2\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$. Кәсијин саһәси: $S = \frac{1}{2}AC\cdot D_1K = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta = 2R^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

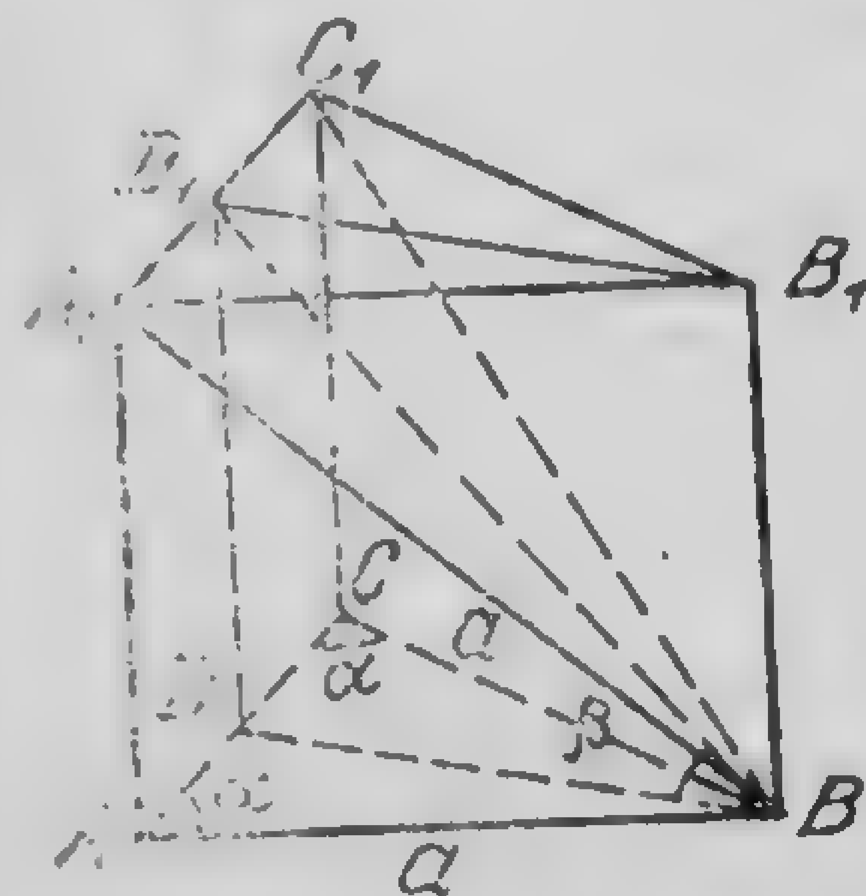
D_1KD үчбучағында: $\cos\varphi = \frac{DK}{D_1K} = \frac{2R\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Бурадан $\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)$.

27. $ABCA_1B_1C_1$ дүз үчбучаглы призмадыр. $AB = BC = a$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle DBD_1 = \beta$ (шәкил 27).

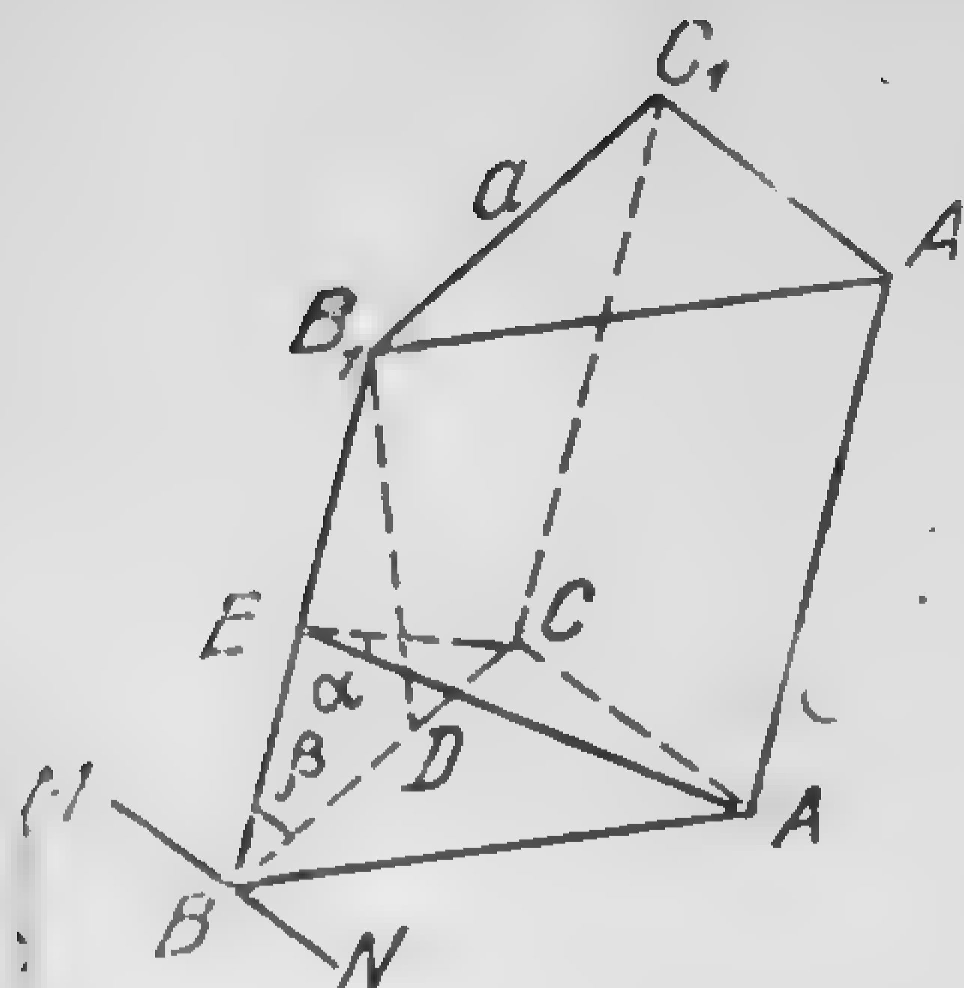
Тутаг ки, D_1 нөгтәси A_1C_1 тилинин орта нөгтәсидир. D_1 нөгтәсиндән $DD_1 \parallel C_1C$ чәкәк. $C_1C \perp (ABC)$ олдуғундан $DD_1 \perp (ABC)$. BD медианы һүндүрлүкдүр. $\angle BDD_1 = 90°$ (дүз икиүзлү бучағын хәтти бучағыдыр). Демәли, $BACC_1A_1$ пирамидасынын һүндүрлүјү BD олсун. BD парчасы BD_1-ин проjексиjасыдыр. Она көрә дә D_1BD бучағы A_1C_1B илә ABC мүстәвиләри арасындакы верилмиш β бучағыдыр. Призманын јан сәтһи: $S_{јан} = (2AB + AC)\,DD_1$. $\triangle ABD$-дән: $AD = AB\cos\alpha = a\cos\alpha$; $BD = AB\sin\alpha = a\sin\alpha$, $AC = 2AD = 2a\cos\alpha$. BDD_1 дүзбучаглы үчбучағында: $DD_1 = BD\operatorname{tg}\beta = a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. Онда $S_{јан} = (2a + 2a\cos\alpha) \times a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta = 2a(1 + \cos\alpha)\, a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta = 4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} \times \sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3}(AC\cdot DD_1)\cdot BD = \frac{1}{3} \times 2a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\cdot a\sin\alpha = \frac{1}{3}\sin 2\alpha\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

28. AC тилиндән BB_1 јан тилинә перпендикулјар мүстәви кечирәк. Онда AEC үчбучағы перпендикулјар кәсик, AEC бучағы исә BB_1 тилиндәки икиүзлү бучағын хәтти бучағы олачагдыр. B_1D парчасы ABC мүстәвисинә (шәкил 28) перпендикулјар олдуғу үчүн бу дүз хәтдән кечән BB_1C_1C мүстәвиси дә һәмин



Шәкил 27



Шәкил 28

мүстәвијә перпендикулјар олачагдыр (ики мүстәвинин перпендикулјарлыг әламәтинә көрә). B нөгтәсиндән $MN \parallel AC$ чәкәк. $BC \perp AC$ (шәртә көрә), $MN \parallel AC$ олдуғу үчүн $BC \perp MN$ олур. BD парчасы BB_1 маилин проjексиjасыдыр. Она көрә дә B_1BC бучағы jан тил илә отурачаг мүстәвиси арасындакы верилмиш β бучағыдыр. Үч перпендикулјар теоремина көрә $B_1B \perp MN$ олур. $MN \perp BC$, $MN \perp B_1B$ олдугу үчүн $MN \perp (BB_1C_1)$ вә $AC \parallel MN$ олдугу үчүн $AC \perp (BB_1C_1)$ олачагдыр. Демәли, AEC үчбучағы дүзбучаглы үчбучагдыр.

$$\triangle BB_1D\text{-дән: } BB_1 = \frac{BD}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\cos\beta} = \frac{a}{2\cos\beta}.$$

$$\triangle BEC\text{-дән: } EC = BC\sin\beta = a\sin\beta.$$

$$\triangle AEC\text{-дән: } AC = EC\operatorname{tg}\alpha = a\sin\beta\operatorname{tg}\alpha,$$

$$AE = \frac{CE}{\cos\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Перпендикулјар кәсијин периметри:

$$CE + AC + AE = a\sin\beta + a\sin\beta\operatorname{tg}\alpha + \frac{a\sin\beta}{\cos\alpha} =$$

$$= a\sin\beta\left(1 + \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = a\sin\beta\cdot\frac{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,a\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Призманын јан сәтһи: $S = \dfrac{a^2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

29. $AD \perp BC$ чәкәк (шәкил 29). AD һәм медиан вә һәм дә тәнбөлән олмагла харичә чәкилән чеврәнин O мәркәзиндән кечәчәкдир. Лакин AD парчасынын бир һиссәси олан AO парчасы AA_1 тилинин проjексиjасыдыр вә үч перпендикулјар теоремина көрә $A_1A \perp BC$ олар. Һәмин сәбәбә көрә $BB_1 \perp BC$, $C_1C \perp BC$ олар. Она көрә дә BB_1C_1C дөрдбучаглысы дүзбучаглыдыр. AA_1B_1B вә AA_1C_1C үзләринин бәрабәр олдуғуну исбат едәк. $OE \perp AB$, $OF \perp AC$ чәкәк вә E, F нөгтәләрини A_1 илә бирләшдирәк. Үч перпендикулјар теоремина көрә $A_1E \perp AB$, $A_1E \perp AC$ олачагдыр. Бурада $OE = OF$, OE вә OF проjексиjалары бәрабәр олдуғу үчүн A_1E вә A_1F маилләри дә бәрабәр олачагдыр.

$\triangle AA_1E = \triangle AA_1F$. Она көрә $\angle A_1AC = A_1AB$ олур. Демәли, AA_1C_1C вә AA_1B_1B дөрдбучаглылары бәрабәрдир. OAB бәрабәрјанлы үчбучағында $OE \perp AB$ олдуғу үчүн OE парчасы һәм дә медианыдыр.

ABC үчбучағында: $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \alpha$, синуслар теоремина көрә $AB = 2R\sin(90^\circ - \alpha) = 2R\cos\alpha$, $AC = AB = 2R\cos\alpha$, $BC = 2R\sin 2\alpha \cdot S_{от} = \frac{1}{2}ABAC\sin 2\alpha = \frac{1}{2}AB^2\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cdot 4R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha = 2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha$.

$$\triangle AA_1E\text{-дән: } AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha = R\cos\alpha,$$

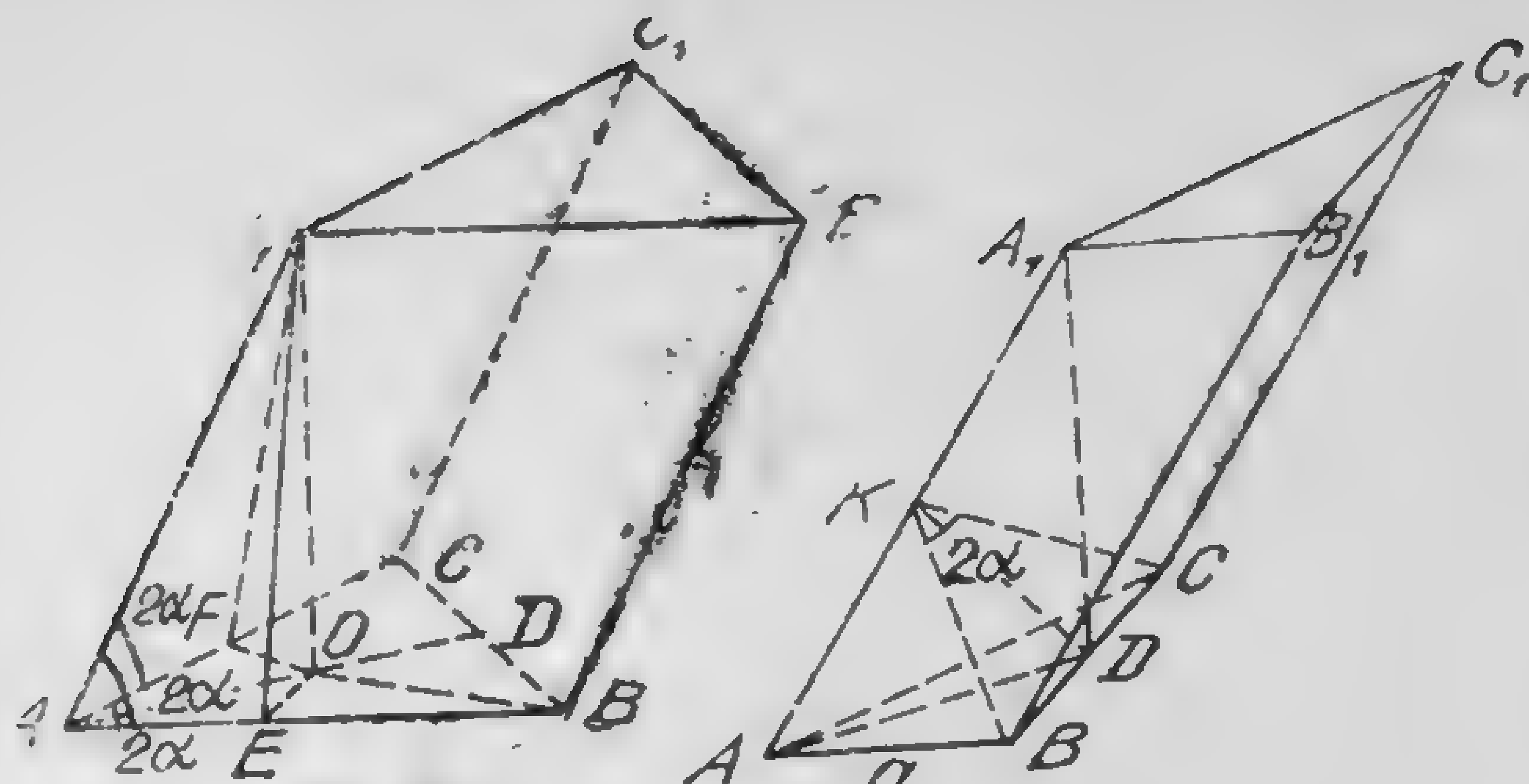
$$AA_1 = \frac{AE}{\cos 2\alpha} = \frac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha}, \quad A_1E = AE\operatorname{tg}2\alpha = R\cos\alpha\operatorname{tg}2\alpha.$$

$$\triangle AA_1O\text{-дан: } A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)^2 - R^2} = R\sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}},$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 4\alpha}{2} = \sin 3\alpha\sin\alpha,$$

бурадан $A_1O = \dfrac{R\sqrt{\sin 3\alpha\sin\alpha}}{\cos 2\alpha}$ олур. $S_{јан} = 2AB\cdot A_1E + BC \times BB_1 = 2\cdot 2R\cos\alpha\cdot R\cos\alpha\operatorname{tg}2\alpha + 2R\sin 2\alpha\cdot\dfrac{R\cos\alpha}{\cos 2\alpha} =$



Шәкил 29 Шәкил 30

$$= \frac{4R^2\cos^2\alpha\sin2\alpha}{\cos2\alpha} + \frac{4R^2\cos^2\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha} = \frac{4R^2\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}\cdot(\sin2\alpha+\sin\alpha) =$$

$$= \frac{8R^2\cos^2\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos2\alpha}.$$

$$V = 2R^2\cos^2\alpha\sin2\alpha\cdot\frac{R\sqrt{\sin3\alpha\sin\alpha}}{\cos2\alpha} = 2R^3\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha\sqrt{\sin3\alpha\sin\alpha}.$$

30. BC тилиндән (шәкил 30) AA_1 тилинә перпендикулјар мүстәви кечирәк. Онда $\angle BKC = 2\alpha$, $\triangle BKC$ исә перпендикулјар кәсикдир. BC тәрәфинин D орта нөгтәси ејни заманда үст отурачағынын A_1 тәпәсинин пројексијасыдыр. $\triangle AKB = AKC$ (AK катети ортаг, $AB = AC$ олдуғу үчүн). Она көрә $BK = CK$, јә'ни $\triangle BKC$ бәрабәрјанлыдыр. AD вә KD медианлары һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир. $\triangle ABD$-дән:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},\quad AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

BKD-дән: $KD = BD\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; $AK =$

$$= \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{a\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}}{2\sin30^\circ\sin\alpha};$$

$$KB = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

A_1AD үчбучағында дүзбучаг тәпәсиндән һипотенуза чәкилән перпендикулјарларын хассәсинә көрә $AA_1\cdot AK = AD^2$ олур,

$$AA_1 = \frac{AD^2}{AK} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 : \frac{a\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}}{2\sin30^\circ\sin\alpha} =$$

$$= \frac{3a\sin\alpha}{4\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}}.$$

Перпендикулјар кәсијин саһәси:

$$S = \frac{1}{2}BC\cdot KD = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{4}a^2\,\mathrm{ctg}\alpha.$$

$$V = S\cdot AA_1 = \frac{1}{4}a^2\,\mathrm{ctg}\alpha\cdot\frac{3a\sin\alpha}{4\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}} =$$

$$= \frac{3a^3\cos\alpha}{16\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}}.$$

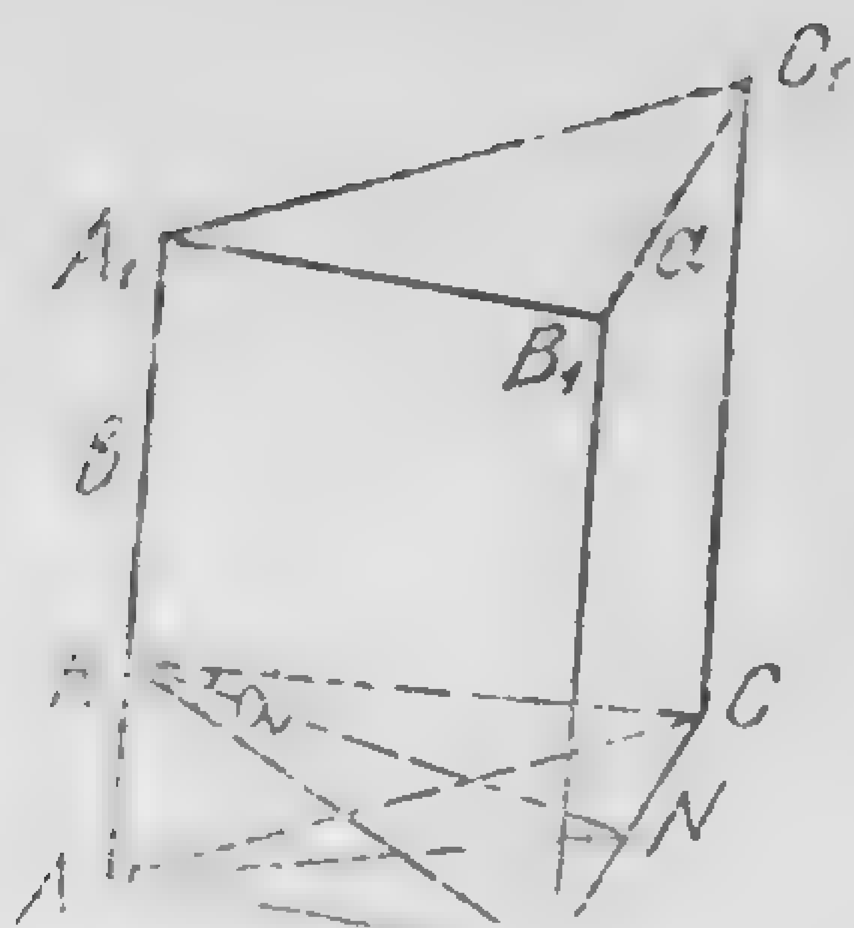
Кәсијин периметри:

$$2BK + BC = 2\cdot\frac{a}{2\sin\alpha} + a = a\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$$

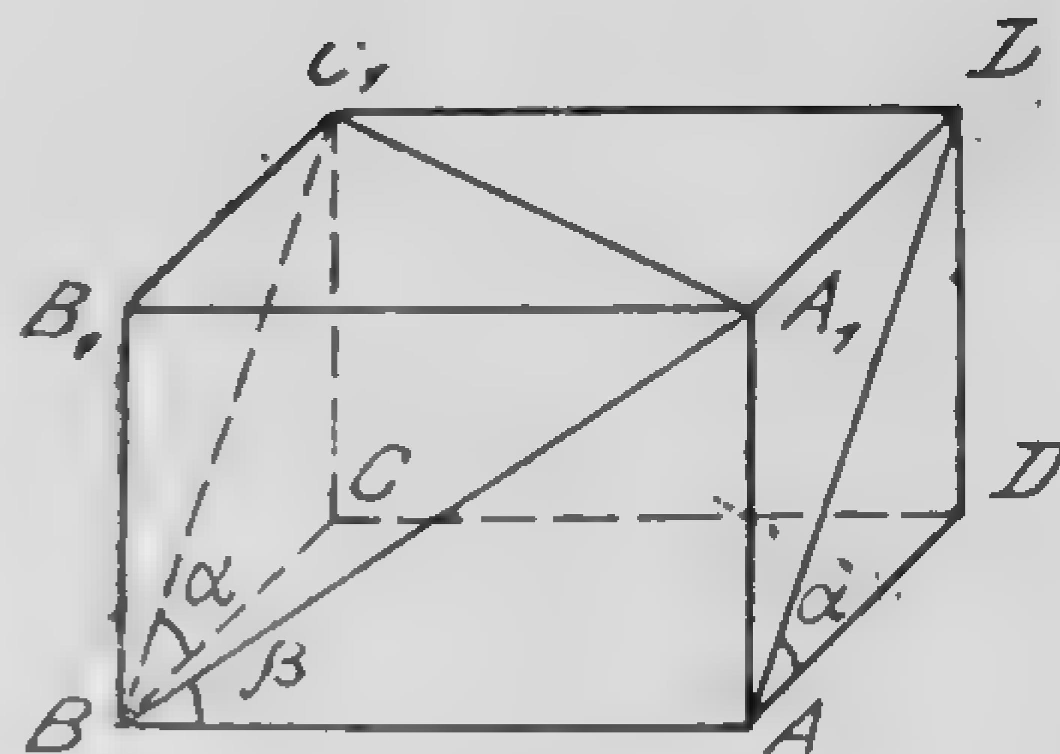
$$S_{јан} = \frac{2a\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}\cdot\frac{3a\sin\alpha}{4\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}} =$$

$$= \frac{3a^2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}}$$

31. BC тилиндән (шәкил 31) AA_1 тилинә перпендикулјар мүстәви кечирәк. Онда $\angle BKC$ бучағы, AA_1 тилиндәки икиүзлү бучағын хәтти бучағы, BKC үчбучағы исә перпендикулјар кәсик олур. $AA_1 \perp BK$ вә $AA_1 \perp CK$ олдуғу үчүн ABK вә ACK үчбучаглары дүзбучаглы үчбучаглардыр. AK катети ортаг, $AB = AC$ олдуғундан $\triangle ABK = \triangle ACK$, бурадан $BK = CK$, јә'ни $\triangle BKC$ бәрабәрјанлыдыр. Онда ABC вә KBC бәрабәрјанлы үчбучагларында AN вә KN медианлары һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир.



Шәкил 31



Шәкил 32

$\triangle BKN$-дән: $\angle BKN = \frac{\alpha}{2}$, $BN = \frac{a}{2}$, $KN = BN \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{BC}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\ S_{BKC} = \frac{1}{2} BC \cdot KN = \frac{1}{2} a \times$$

$$\times \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};\ V = S_{BKC} \cdot AA_1 = \frac{a^2}{4} b \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

32. Ики гоншу јан үзүн кәсишмәјән диагоналлары AD_1 вә A_1B (шәкил 32). Верилән бучаглар $\angle DAD_1 = \alpha$, $\angle A_1BA = \beta$ олачагдыр. О бири үзүн BC_1 диагоналыны чәкәк. AB вә D_1C_1 тилләри DC тилинә бәрабәр вә паралел олдуғу үчүн $AB = D_1C_1$, $AB \parallel D_1C_1$ вә ABC_1D_1 паралелограмдыр. Она көрә $BC_1 \parallel AD_1$, $BC_1 = AD_1$ вә $\angle C_1BC = \angle D_1AD$ олачагдыр. AD_1 вә A_1B диагоналлары арасындакы ахтарылан бучаг A_1BC_1. Бу бучагы φ илә ишарә едәк. $\triangle A_1BC_1$-дән: $BA_1^2 + BC_1^2 - 2BA_1 \cdot BC_1 \cos\varphi = A_1C_1^2$, лакин $A_1C_1^2 = B_1A_1^2 + B_1C_1^2$ олдуғу үчүн $BA_1^2 + BC_1^2 - 2BA_1 \cdot BC_1 \cos\varphi = B_1A_1^2 + B_1C_1^2$, бурадан $2BA_1 \cdot BC_1 \cos\varphi = (BA_1^2 - B_1A_1^2) + (BC_1^2 - B_1C_1^2) = 2BB_1^2$, $\cos\varphi = \frac{BB_1^2}{BA_1 \cdot BC_1}$. $\triangle ABA_1$-дән:

$$BA_1 = \frac{AA_1}{\sin\beta} = \frac{BB_1}{\sin\beta}.$$

$$\triangle BCC_1\text{-дән: } BC_1 = \frac{CC_1}{\sin\alpha} = \frac{BB_1}{\sin\alpha}.$$

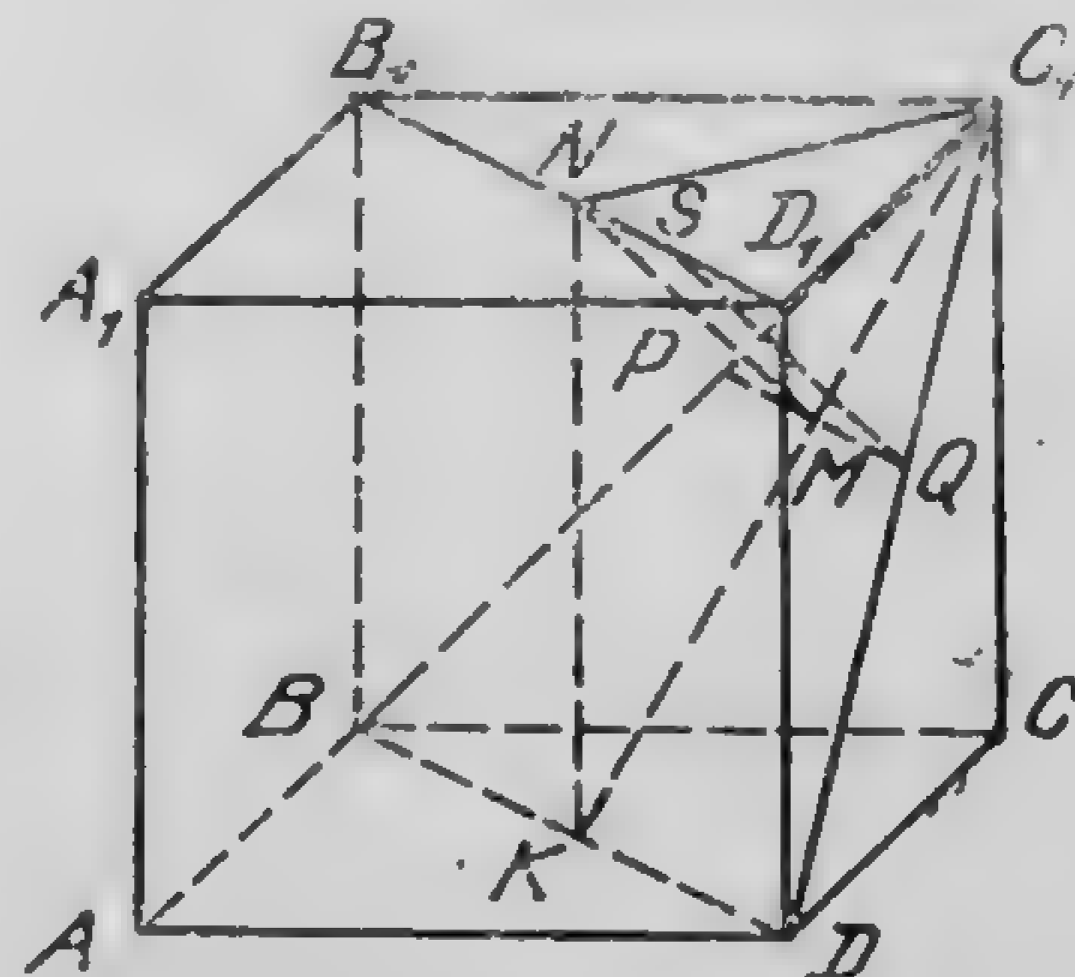
$$\cos\varphi = \frac{BB_1^2}{\frac{BB_1}{\sin\beta} \cdot \frac{BB_1}{\sin\alpha}} = \sin\alpha \sin\beta.$$

33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунда $AB = a$, D_1B_1 вә DC_1 ики гоншу үзүн чарпаз диагоналларыдыр (шәкил 33). BD вә DC_1 диагоналларындан мүстәви кечирәк. $B_1D_1 \parallel DB$ D_1B_1 диагоналы BDC_1 мүстәвисинә паралел олачагдыр.

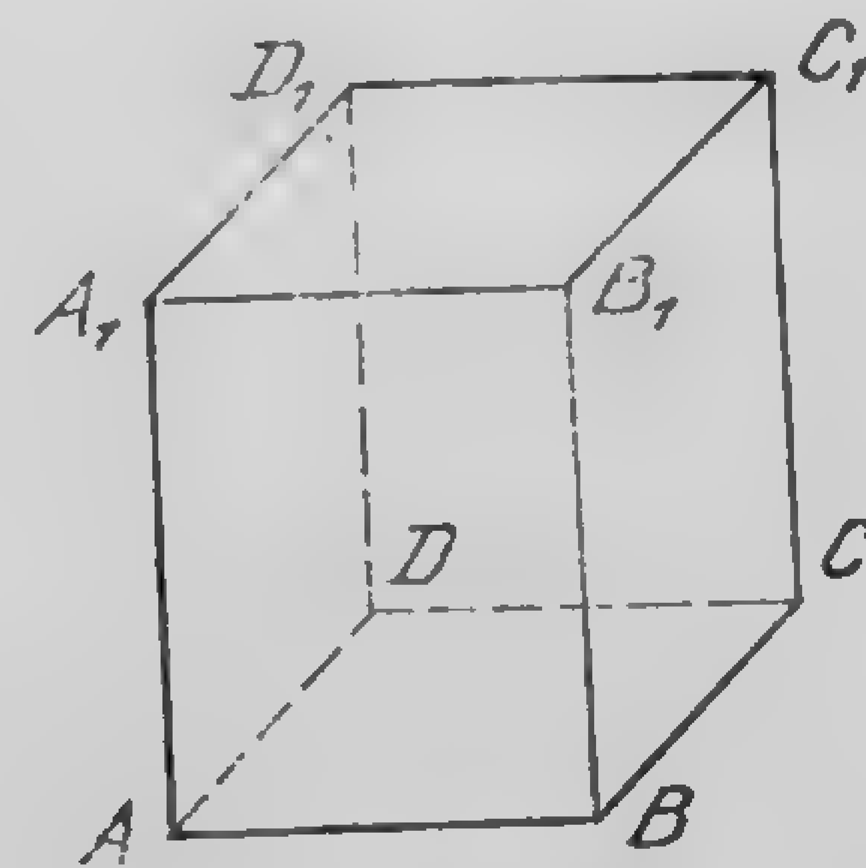
Гурмаја көрә онда $C_1N \perp B_1D_1$, $C_1K \perp BD$ олар. N илә K-ны бирләшдирәк. KDD_1N-дә $KD = ND_1$, $KD \parallel ND_1$ вә $DD_1 \perp BD$ олдуғундан $NK \perp BD$ олур. Буна көрә дә $BD \perp (NKC_1)$. Лакин $B_1D_1 \parallel BD$ олдуғуна көрә $B_1D_1 \perp (NKC_1)$. Демәли, $(NKC_1) \perp (BDC_1)$. Она көрә дә N нөгтәсиндән $NM \perp (BDC_1)$ чәкилмиш NM перпендикулјары бүтүнлүклә NKC_1 мүстәвиси үзәриндә олар. Бурада NM тәләб олунан мәсафәдир. Доғрудан да $PQ \parallel BD$ чәкдикдә $B_1D_1 \parallel BD$ олдуғундан $PQ \parallel B_1D_1$ олур. $QS \parallel NM$ чәкәк. Онда $NMQS$ паралелограм олур. NM парчасы BDC_1 үчбучаг мүстәвисинә перпендикулјар вә $SQ \parallel NM$ олдуғундан $SQ \perp (BDC_1)$. Бурадан $SQ \perp B_1D_1$, $SQ \perp DC_1$, $\triangle KMN \backsim \triangle KNC_1$ олдуғуна көрә $MN = KN_1 \frac{NC_1}{KC_1}$, $KN = a$, $NC_1 =$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2},\ KC_1 = \sqrt{KN^2 + NC_1^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2},$$

беләликлә $MN = a\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Шәкил 33



Шәкил 34

34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүзбучаглы паралелепипеддир, $AB + AD + AA_1 = 5$, $AB \cdot AD = 1$ (шәкил 34). $AB = x$, $AD = y$, $AA_1 = z$ гәбул едәк, онда $x + y + z = 5$, $xy = 1$ олар. Паралелепипедин јан сәтhи: $S_{јан} = 2(x+y)z$, отурачагларын саhәләри әәмн: $S = 2xy$, $S_{там} = 2(x + y)z + 2xy$ олачагдыр. $xy = 1$ вә $x + y = 5 - z$ олдуғуна көрә $S_т = 2(5 - z)z + 2$ јаза биләрик. $S_{там} = 2(5z - z^2 + 1) = -2(z^2 - 5z - 1)$; z-ин hансы гијмәтиндә паралелепипедин там сәтhи ән бөјүк олар? Там сәтhин ифадәсини $S_т = -2\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$ шәклинә кәтирсәк, $z = \frac{5}{2}$ оланда там сәтh ән бөјүк гијмәт алыр. $z = \frac{5}{2}$ олдуғуну нәзәрә алсаг $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy = 1 \end{cases}$ системиндән $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ вә ја $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$ гијмәтләри тапылыр.

35. $C_1D_1 \perp (AA_1B_1)$ чәкәк (шәкил 35). $(A_1C_1B_1) \perp \perp (AA_1B_1)$ олдуғундан C_1D_1 перпендикулјары $A_1C_1B_1$ мүстәвиси үзәриндә олуб, A_1B_1 парчасыны онун D_1 орта нөгтәсиндә кәсир. B нөгтәсини D_1 илә бирләшдирәк. BD_1 парчасы BC_1 диагоналынын проjексиjасы олачагдыр. $\angle C_1BD_1$—BC_1 диагоналы илә AA_1B_1B үзү арасындакы бучаг олачагдыр. Шәртә көрә $\angle C_1BD_1 = \alpha$, $CC_1 = H$. Тутаг ки, $BC = x$. Онда

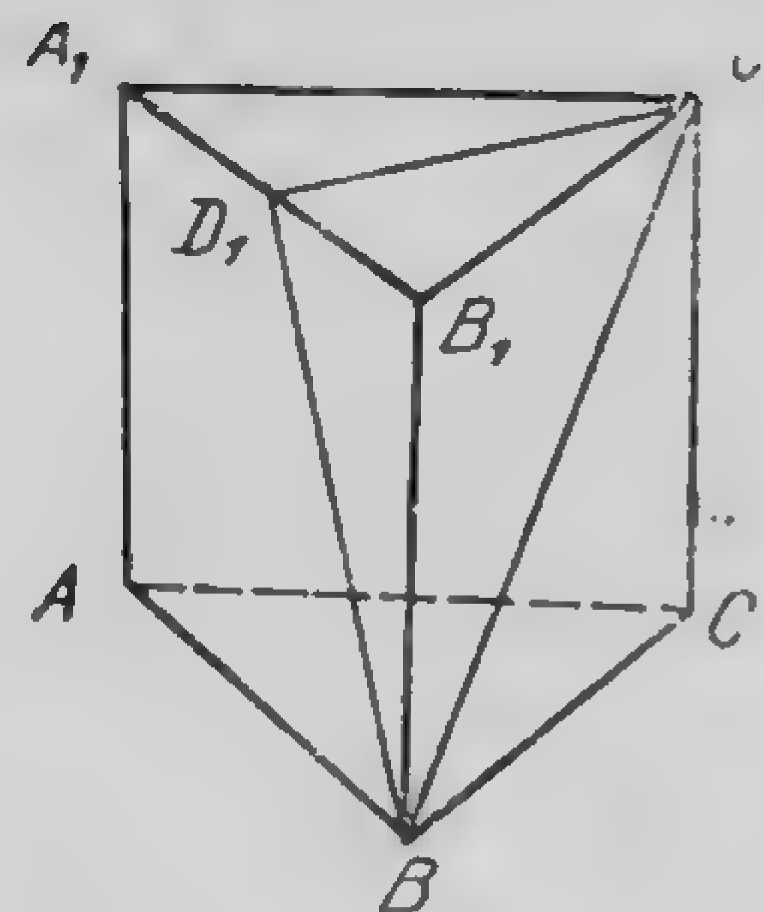
$$S_т = 3xH + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \qquad (1)$$

$D_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. $\triangle BD_1C_1$-дән: $BC_1 = \frac{D_1C_1}{\sin\alpha}$, $BC_1 = \frac{\sqrt{3}x}{2\sin\alpha}$, $\triangle BC_1C$-дән: $\left(\frac{\sqrt{3}x}{2\sin\alpha}\right)^2 = x^2 + H^2$, бурадан $x = \frac{2H\sin\alpha}{\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}}$.

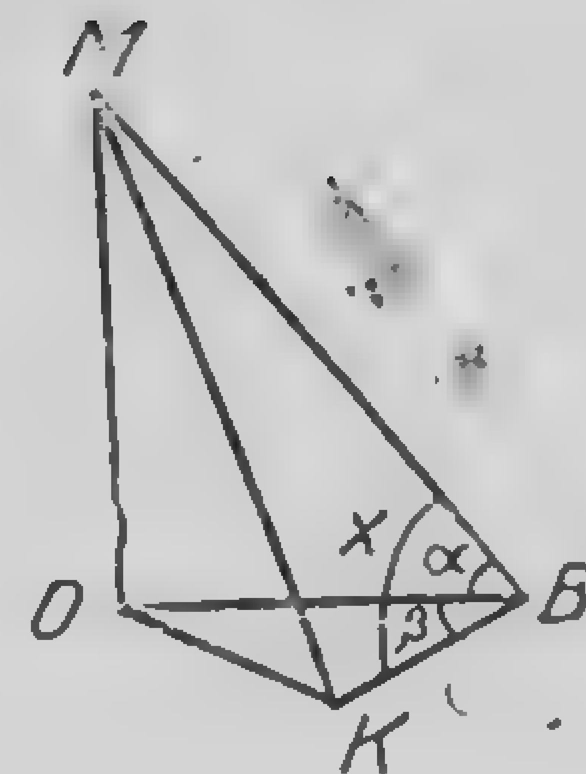
x-ин гијмәтини (1)-дә нәзәрә алсаг,

$$S_т = \frac{2\sqrt{3}H^2\sin\alpha}{\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}}\right).$$

36. $\angle MBO = \alpha$, $\angle OBK = \beta$ гәбул едәк (шәкил 36). $MK \perp BK$ вә $OK \perp BK$ чәкәк. $\triangle KMB$-дән: $KB =$



Шәкил 35



Шәкил 36

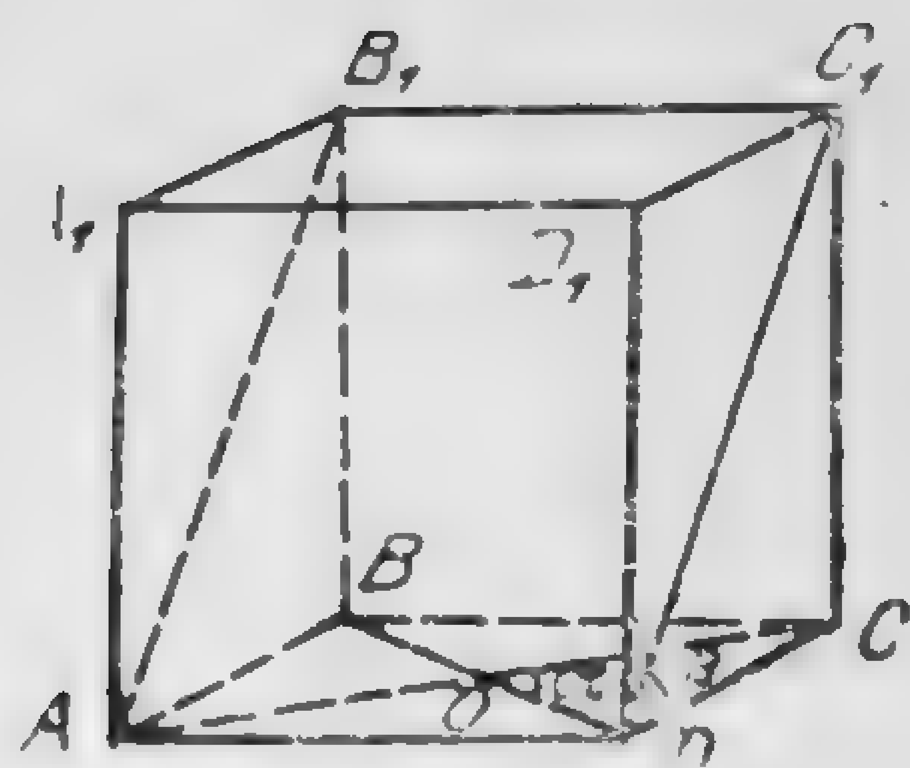
$= MB_1 \cos x$, $\triangle OBK$-дан: $KB = OB \cdot \cos\beta$, $\triangle OBM$-дән: $MB = \frac{OB}{\cos\alpha}$ олдуғундан $\cos x = \cos\alpha\cos\beta$.

37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүзбучаглы паралелепипединдә (шәкил 37) $AC = d$, $\angle COD = \alpha$, $C_1DC = \beta$ верилир. Паралелепипедин hәчми $V = S \cdot H$, бурада $S = \frac{d^2}{2}\sin\alpha$ вә $\triangle AOD$-дә: $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$ олдуғундан $\triangle CAD$-дән: $DC = d\sin\frac{\alpha}{2}$, $\triangle C_1CD$-дән: $H = C_1C = DC\operatorname{tg}\beta = d\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$ олдуғундан $V = \frac{d^3}{2}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

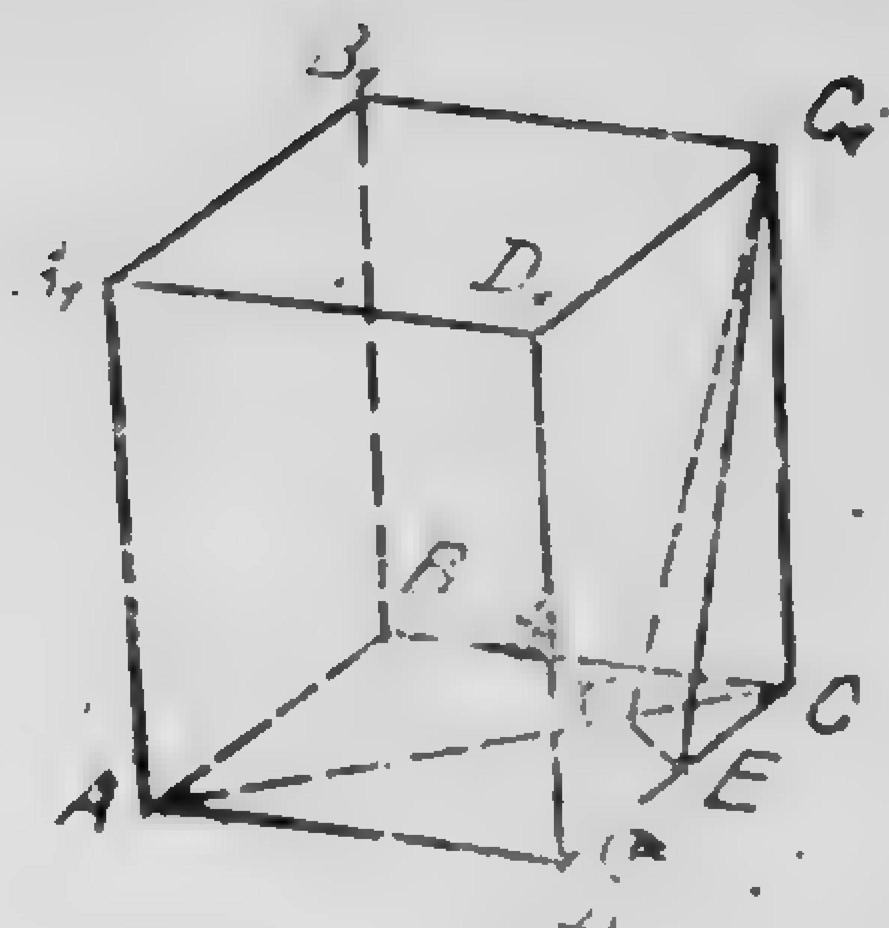
38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелепипединдә (шәкил 38) $AB = AD = AA_1 = 1$ см, $\angle C_1CD = \angle C_1CB = \angle BCD = 2\alpha$ верилир. $C_1E \perp CD$ вә $C_1K \perp AC$ чәкәк. $V = SH$, бурада $S = CB \cdot CD\sin 2\alpha$ вә $\triangle CC_1E$-дән: $EC = CC_1\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$; $\triangle KCE$-дән: $KC = \frac{EC}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$; $\triangle C_1KC$-дән:

$$C_1K = \sqrt{C_1C^2 - KC^2} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 4\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\sin 3\alpha\sin\alpha},\ H = \frac{1}{\cos\alpha} \times$$



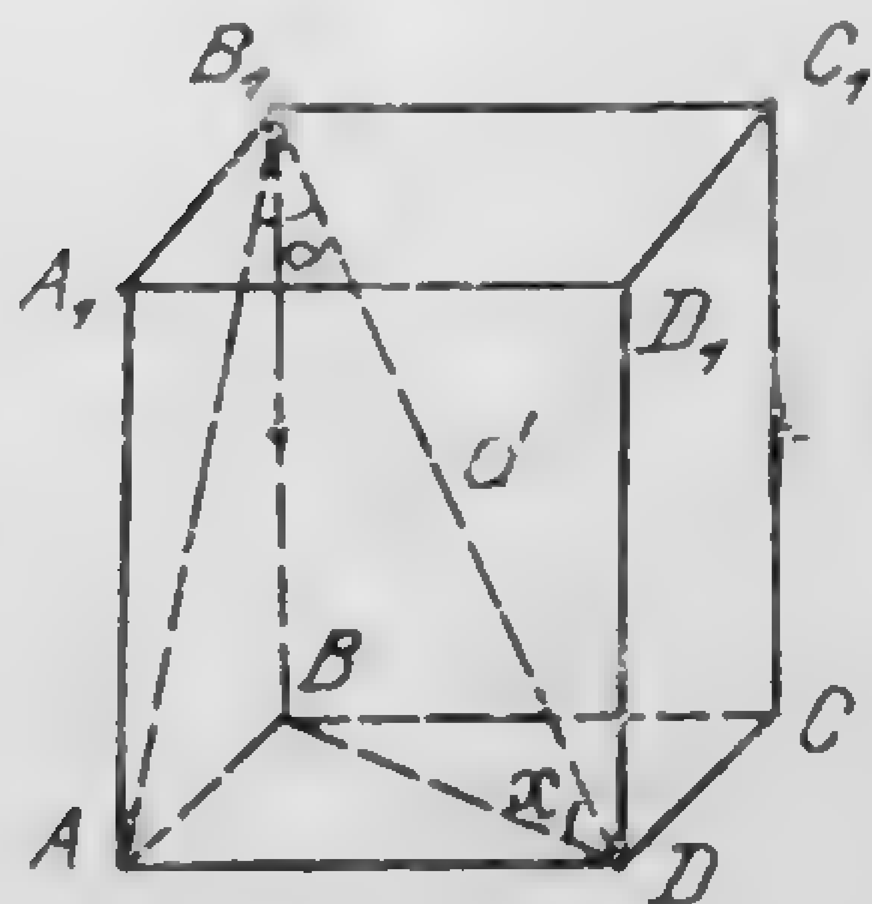
Шәкил 37



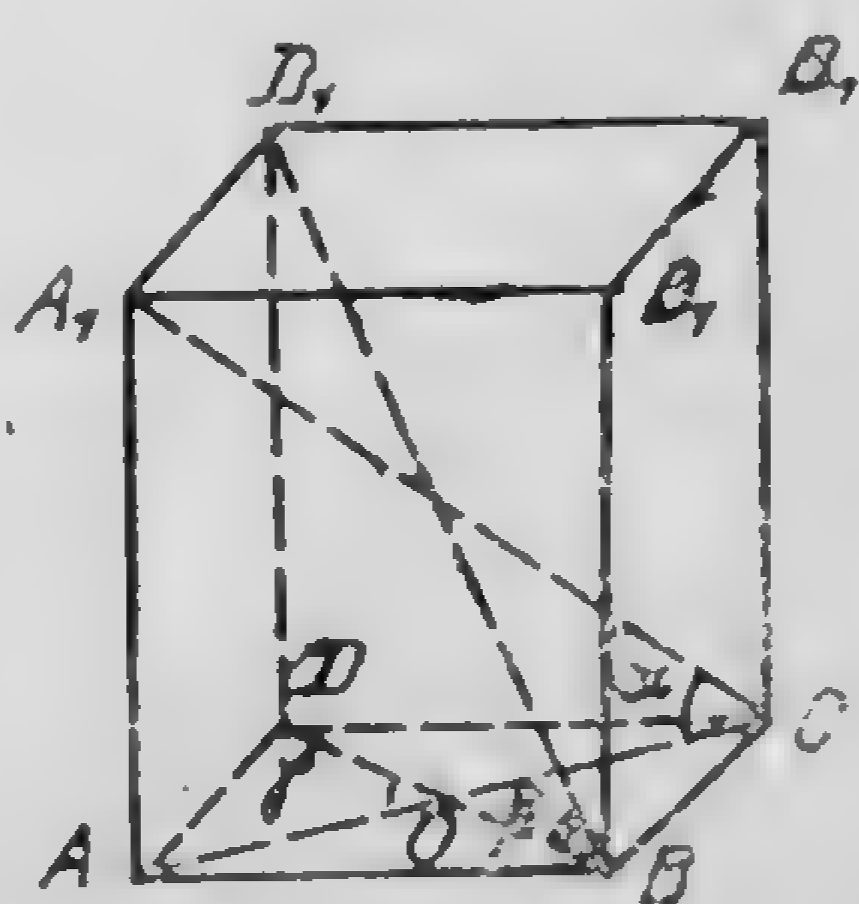
Шәкил 38

$\sqrt{\sin 3\alpha \sin \alpha}$; $V = S \cdot H = \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{\sin 3\alpha \sin \alpha} = 2\sin\alpha \times$
$\sqrt{\sin 3\alpha \sin \alpha}$, үчүзлү бучагын мүстәви бучагларынын хассәсинә көрә $2\alpha + 2\alpha + 2\alpha < 360°$, $3\alpha < 180°$ олмалыдыр. Онда $\sin 3\alpha > 0$ вә һәчм дүстурунда $\sqrt{\sin 3\alpha \cdot \sin \alpha}$ ифадәси һәгиги гијмәт алыр.

39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүзкүн дөрдбучаглы призмада $B_1D = d$, $\angle AB_1D = \alpha$ верилир (шәкил 39). $S_{jан} = 4AB \times$ $\times B_1B$. $\triangle AB_1D$-дән: $AD = d \sin \alpha$; $\triangle ABD$-дән: $BD =$ $= AD\sqrt{2} = d\sqrt{2}\sin\alpha$, $\triangle BB_1D$-дән: $B_1B^2 = DB_1^2 - BD^2 =$ $= d^2 - 2d^2\sin^2\alpha = d^2(1 - 2\sin^2\alpha) = d^2\cos 2\alpha$, $H = B_1B =$ $= d\sqrt{\cos 2\alpha}$;



Шәкил 39



Шәкил 40

$$S_{jан} = 4d\sqrt{\cos 2\alpha} \cdot d\sin\alpha = 4d^2 \sin\alpha \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

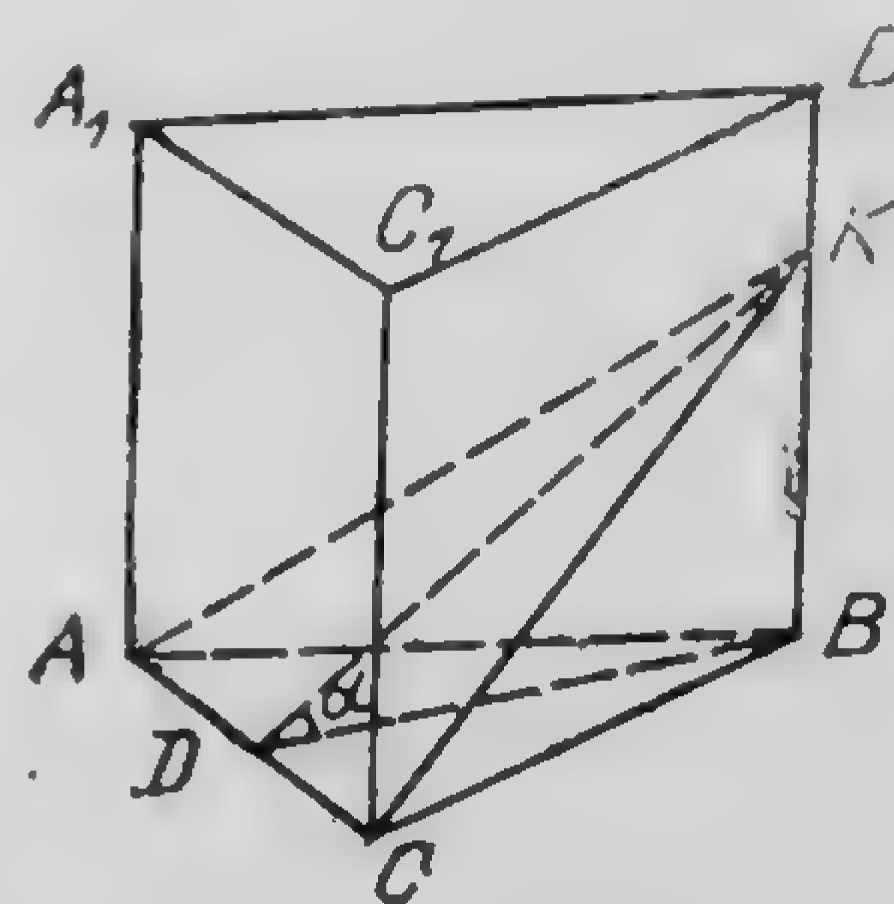
$\sqrt{\cos 2\alpha}$ мә'насы олмасы үчүн $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ олмалыдыр.

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүз призмасында (шәкил 40) $AA_1 = h$, $\angle AOD = \gamma$, $\angle D_1BD = \beta$, $\angle A_1CA = \alpha$ верилир. $V = S \cdot H$, бурада $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\gamma$. $\triangle ACA_1$-дән: $AC = h \operatorname{ctg} \alpha$, $\triangle DBD_1$-дән: $BD = h \operatorname{ctg} \beta$ олдугу нәзәрә алсаг, онда $S = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma$ вә $V = \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \times$ $\sin\gamma$ олар.

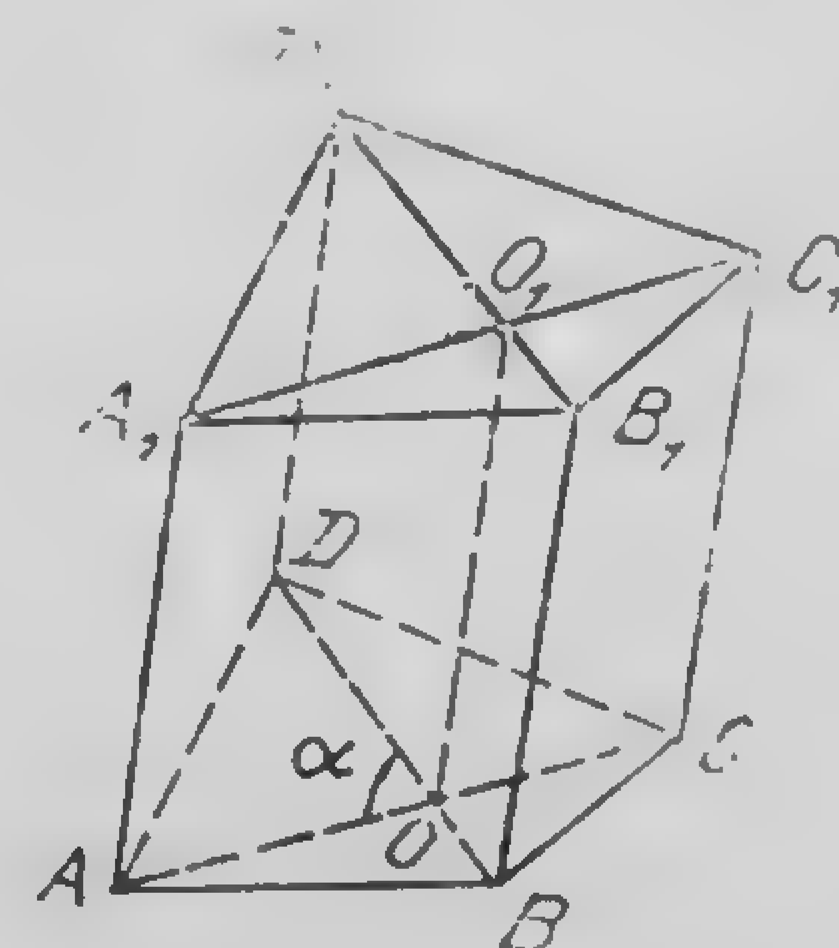
41. $ABCA_1B_1C_1$ дүзкүн призмада (шәкил 41) $\angle KDB =$ $= \alpha$ вә $AB = AC = BC = a$ верилир. $S_{AKC} = \frac{1}{2} AC$ $\cdot KD = \frac{1}{2} a \cdot KD$, $\triangle KDB$-дән: $KD = \frac{BD}{\cos\alpha}$, $\triangle ABD$-дән:

$$BD = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad KD = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}, \quad S = \frac{1}{2} a \times$$
$$\times \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}.$$

42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүз призмасында (шәкил 42) $S_{ABCD} = m$, $S_{AA_1C_1C} = P$, $S_{BB_1D_1D} = q$ вә икиүзлү бучаг $AA_1O_1ODD_1 = \alpha$ верилир. $V = S \cdot H = m \cdot H$, $S_{AA_1C_1C} = AC \times$ $\times OO_1$ вә $S_{BB_1D_1D} = BD \cdot OO_1$ ифадәләриндән $AC = \frac{P}{OO_1} =$



Шәкил 41



Шәкил 42

Шәкил 43

Шәкил 44

$= \frac{p}{H}$ вә $BD = \frac{q}{OO_1} = \frac{q}{H}$ олур, $\angle AOD = \alpha$ олдуғундан

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{H} \cdot \frac{q}{H} \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{pq}{H^2} \sin\alpha$,

$m = \frac{1}{2} \cdot \frac{pq}{H^2} \sin\alpha$, $H = \sqrt{\frac{pq}{2m} \sin\alpha}$, $V = \sqrt{\frac{1}{2} pqm \sin\alpha}$.

ПИРАМИДА

43. Пирамиданын һүндүрлүјү $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, отурачағын һүндүрлүјү $\frac{3a}{4}$ (шәкил 43). Пирамиданын тәпәсиндән јан үзә чәкилмиш һүндүрлүк $\triangle SO_1D$-дән: $SD^2 = SO_1^2 + O_1D^2$,

$$SD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4}\right)^2, \quad SD = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$\triangle SOE \backsim \triangle SDO_1\text{-дән: } \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - r\right) : r = \frac{a\sqrt{13}}{4} : \frac{a}{4}.$$

Бурадан $r = \frac{a\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{13})}$.

44. ASC кәсији бәрабәртәрәфли үчбучагдыр (шәкил 44). ASC үчбучағынын AE һүндүрлүјүнү чәкәк. ASE-дә MP—орта хәтт олур. O_2 нөгтәсиндән $NQ \parallel BD$ чәкәк. Онда $MNPQ$ ахтарылан кәсик олур. Үчбучағын орта хәттинин хассәсинә көрә:

Шәкил 45

Шәкил 46

$$MP = \frac{1}{2} AE = \frac{h}{2}.$$

Бучағын тәрәфләрини бир сыра паралел хәтләрлә кәсдикдә, онда $NQ = \frac{1}{3} BD = \frac{2h}{3\sqrt{3}}$ вә кәсијин саһәси:

$$S = \frac{1}{2} MP \cdot NQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} h = \frac{\sqrt{3}}{18} h.$$

45. Отурачағын тәрәфини a гәбул едәк (шәкил 45). Онда пирамиданын тәпәсиндән јан үзә чәкилмиш һүндүрлүк $\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$ вә јан тил исә $\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 3}$ ифадәсинә бәрабәр олур. Отурачағын тәпәсиндән јан тилә чәкилмиш јан үзүн һүндүрлүјүнү аларыг: $AD = CD = \frac{a}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$.

$\triangle ADC$-јә косинуслар теоремини тәтбиг етсәк аларыг:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\beta.$$

$$a^2 = \frac{2a^2}{1 + 3\cos^2\alpha} - 2 \cdot \frac{a^2}{1 + 3\cos^2\alpha} \cdot \cos\beta.$$

$$3\cos^2\alpha = 1 - 2\cos\beta.$$

46. Пирамиданын харичинә чәкилмиш күрәнин мәркәзи O' вә кәсән мүстәвинин BS, CS, DS тилләрини кәсдији (шәкил 46) нөгтәләр ујғун олараг P, Q вә R олсун, AQ парчасы күрәнин мәркәзиндән кечдијиндән $AO = SO$. Белә ки, $\angle ASC = 2\alpha$, $\angle OAS = \angle OSA = \alpha$,

онда $\angle AQS = \pi - 3\alpha$ олур. Синуслар теоремине көрә $AQ = \frac{l \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$, $\triangle AOS$-дән харичә чәкилмиш күрәнин радиусуну тапаг: $AO = OS = \frac{l}{2\cos\alpha}$. Нәһајәт ORS үчбучагындан $PR = 2\cdot OS\cdot \mathrm{tg}\alpha = \frac{l \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Ахтарылан кәсијин саһәси:

$$S_{\text{кәс}} = \frac{1}{2}\cdot AQ\cdot PR = \frac{1}{2} l^2\cdot \frac{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin 3\alpha} = l^2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin 3\alpha},$$

$$S_{\text{кәс}} = \frac{l^2\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin 3\alpha}.$$

47. Тетраедрин тилини a илә ишарә едәк (шәкил 47 а)

$$EN = \frac{1}{2}BC,\ EN \parallel BC.$$

$AP \parallel BC$ чәкәк, $PM = EN$ көтүрәк. Онда $PMNE$ паралелограм олачагдыр. Демәли, $PE = MN$. Беләликлә, DEP ахтарылан бучагдыр.

$$\triangle PDM\text{-дән: } AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\triangle AMC\text{-дән: } MN = \frac{1}{2}\sqrt{2AM^2 + 2MC^2 - AC^2} = \frac{1}{2}a.$$

$$DMP\text{-дән: } DP = \sqrt{PM^2 + DM^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

$\angle DEP = x$ илә ишарә едәк.

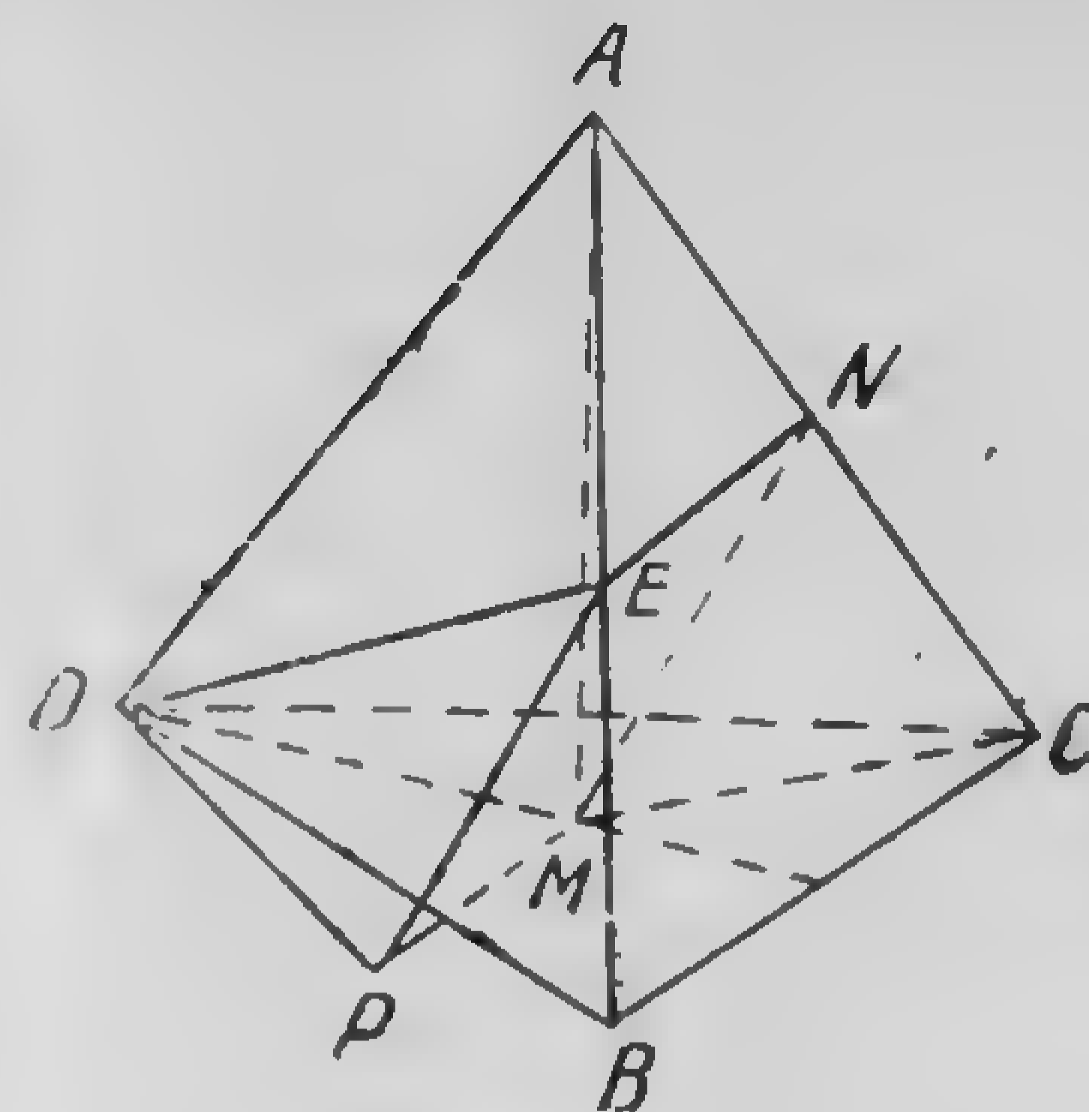
$$\triangle DEP\text{-дән: } DP^2 = DE^2 + EP^2 - 2DE\cdot EP\cos x$$

Садәләшдирдикдән сонра:

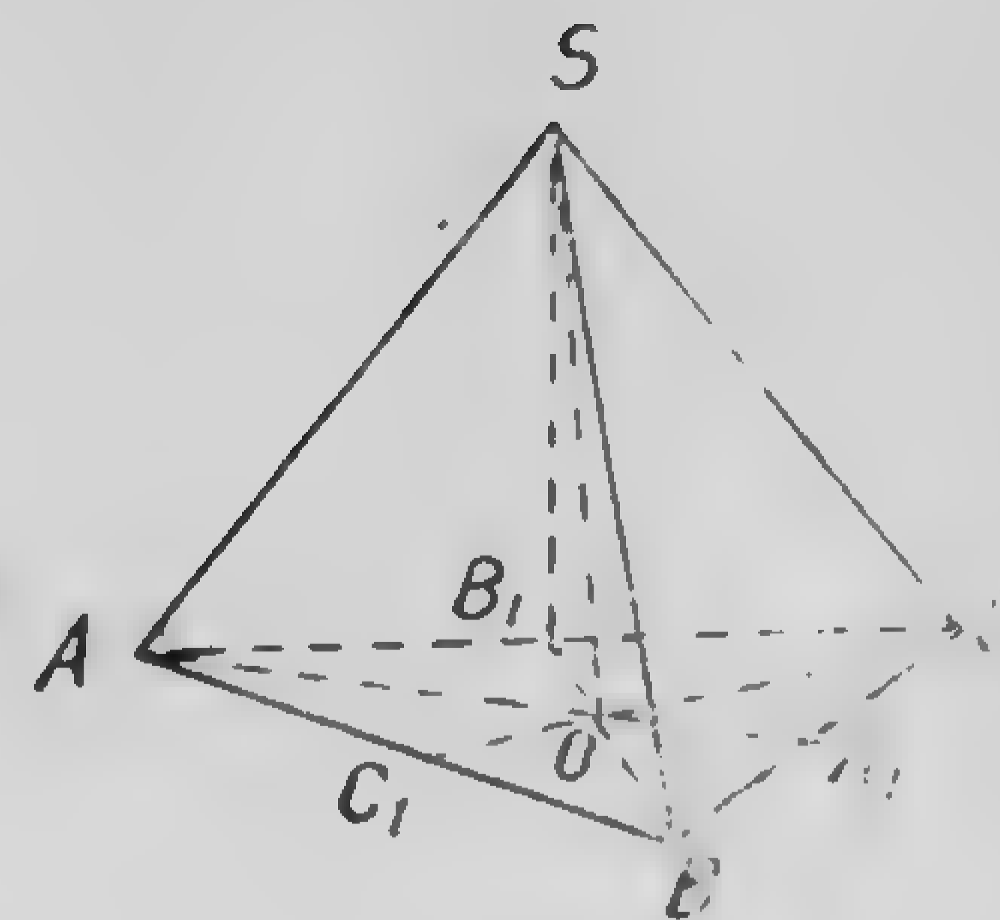
$$x = \arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}.$$

48. Фәрз едәк ки, $\angle ASB = 90$. $AC \perp SB$ (үч перпендикулјар теоремине көрә). Шәртинә көрә $BS \perp AS$. Дүз хәттин мүстәвијә перпендикулјарлыг әламәтинә көрә $SB \perp (ASC)$ (шәкил 47 б).

Демәли, $BS \perp SC$. Аналожи олараг $AS \perp SC$ олдуғуну исбат едирик. Беләликлә, пирамиданын тәпәсиндәки галан мүстәви бучаглардан һәр бири дүзбучагдыр.



Шәкил 47 а



Шәкил 47 б

49. Мәсәләнин шәртинә көрә BDP верилән кәсикдир $PO \parallel AS$ вә $OP = \frac{1}{2}b$ олур (шәкил 48). $\triangle BPC = \triangle DPC$. Онда $BP = DP$. Бурадан BDP үчбучағы бәрабәрјанлы олдуғундан PO медианы һәм дә һүндүрлүкдүр. ASC үчбучағында $\angle SAC = \angle SCA = \alpha$, $\angle ASC = 180^\circ - 2\alpha$,

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AS}{\sin\alpha},\ AC = \frac{AS\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2b\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2b\cos\alpha.$$

Кәсијин саһәси $S = \frac{1}{2}BD\cdot PO = \frac{1}{2}\cdot 2b\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}b =$

$$= \frac{1}{2}b^2\cos\alpha.$$

50. $DEFK$ кәсији паралелограмдыр (шәкил 49)

$\triangle ANC$-дән $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Медианын хассәсинә көрә

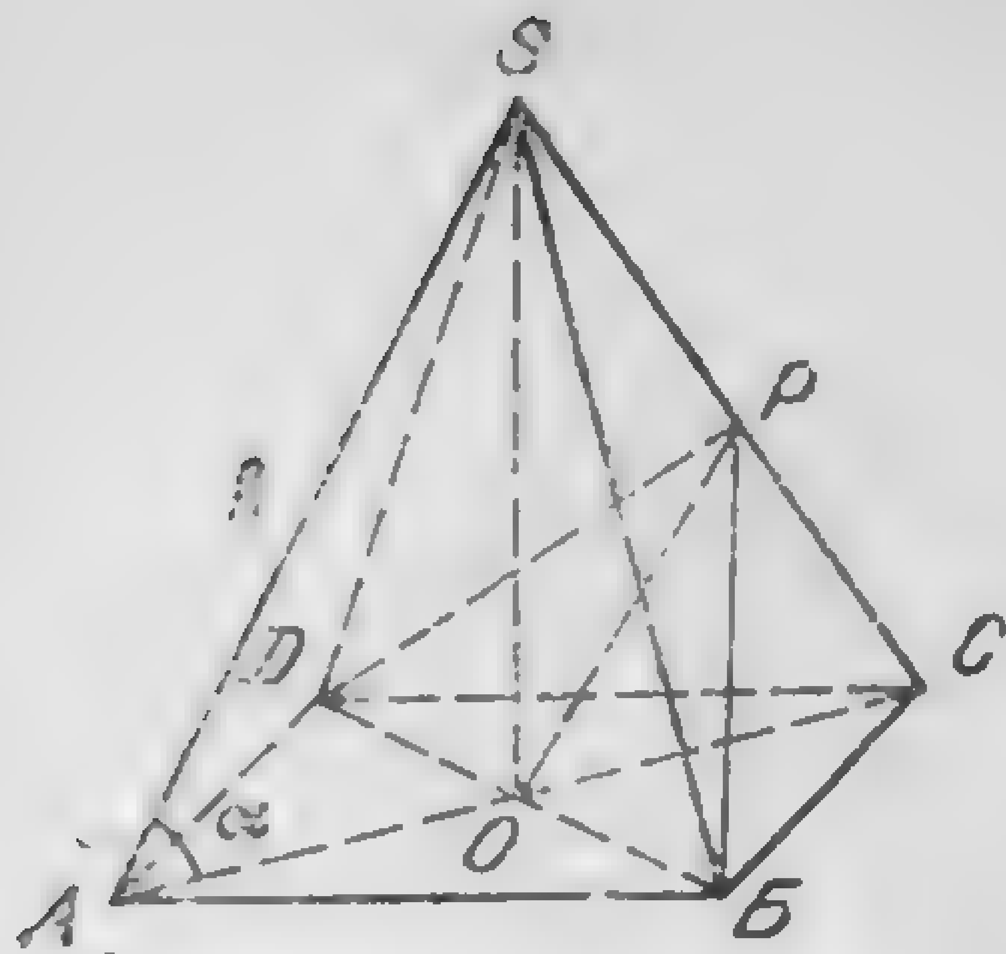
$$AO = \frac{2}{3}AN = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ вә } ON = \frac{1}{3}AN = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

ASO дүзбучаглы үчбучағында:

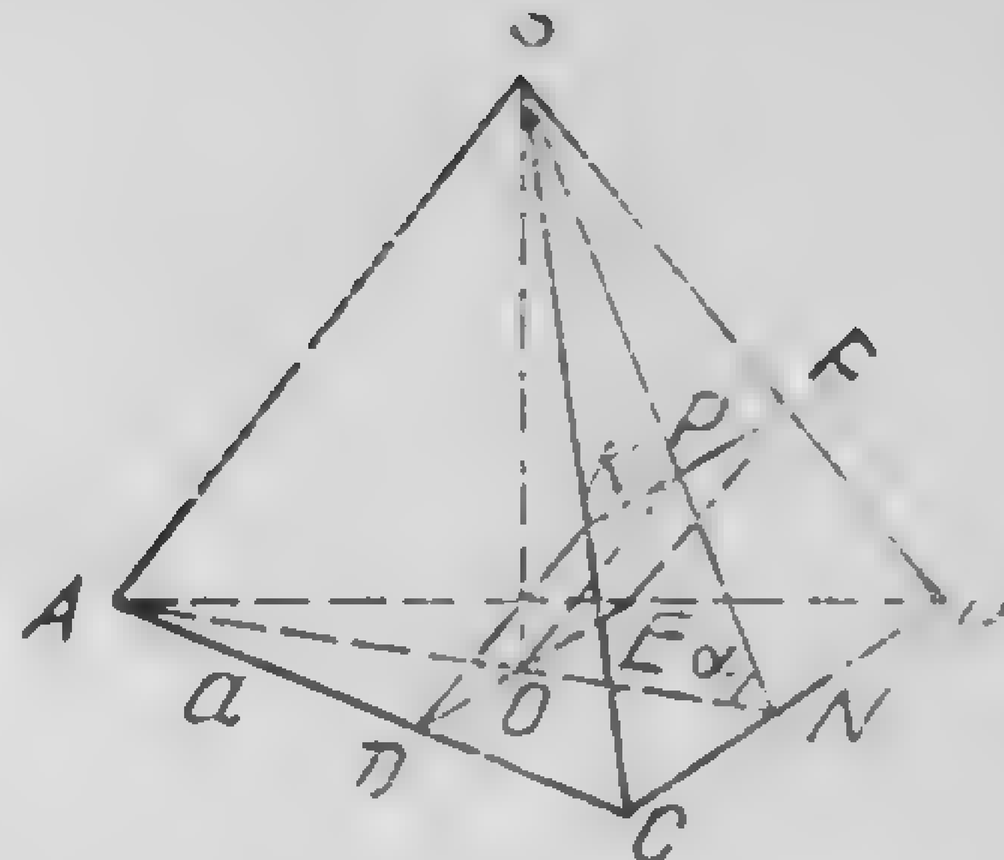
$$AS^2 = SO^2 + AO^2 = \left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2,\ AS = \frac{a\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\alpha}}{2\sqrt{3}}.$$

$PO \parallel AS$ олдуғундан $\triangle ASN \backsim \triangle NPO$-дан $OP =$

$$= AS\cdot\frac{ON}{AN} = \frac{a\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\alpha}}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{a}{2\sqrt{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\alpha}}{6\sqrt{3}},$$



Шәкил 48



Шәкил 49

$$S_{\text{кәсик}} = DE \cdot OP = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}{6\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}{9\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{12+3\operatorname{tg}^2\alpha}}{27}.$$

51. Әввәлки мәсәләдә $\angle SNA$ әвәзинә $\angle SAN = \alpha$)шәкил 49) көтүрүб, һәлл етмәклә $S = DE \cdot PO = \frac{2a}{3} \times$

$$\times \frac{a}{3\sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{27\cos\alpha}.$$

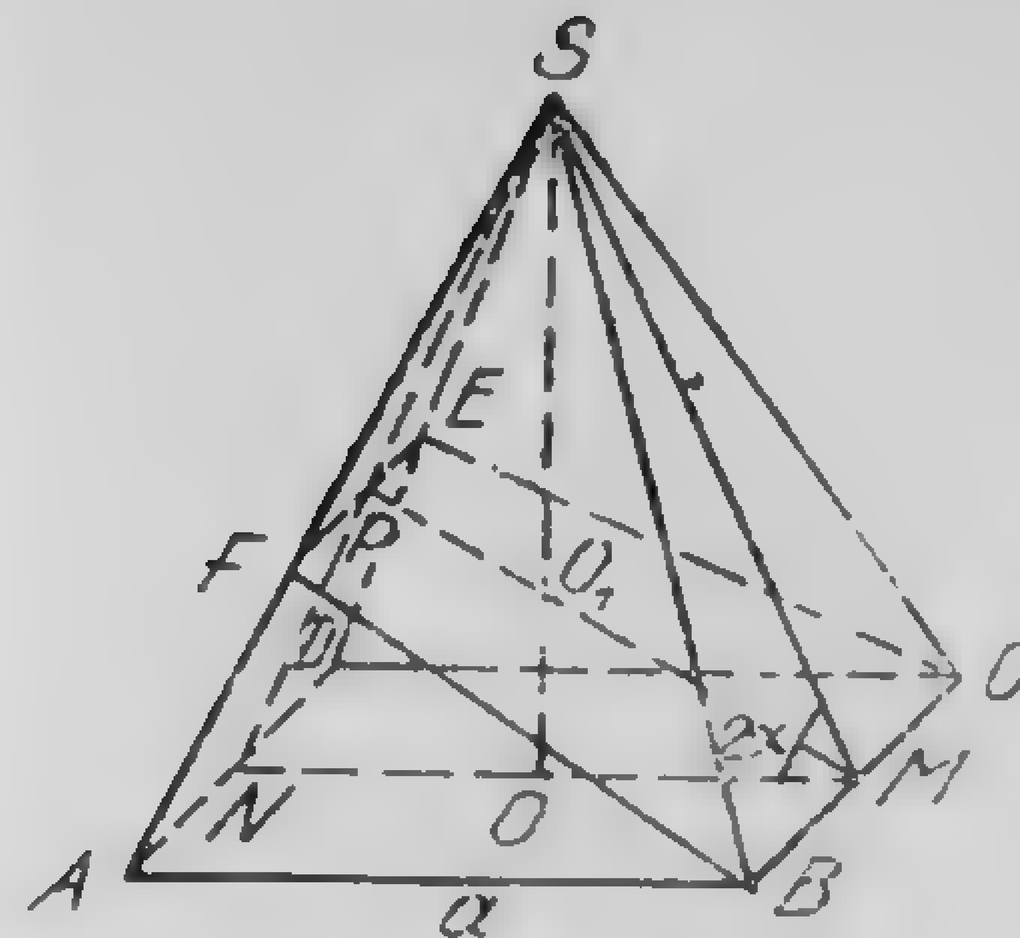
52. S_{ABCD}—дүзкүн дөрдбучаглы пирамидадыр; $AB = a$, $\angle SMN = 2\alpha$. $BCEF$ кәсији отурачаг тилиндәки икиүзлү буҹағы јарыја бөлүр (шәкил 50). Дүз хәттин мүстәвијә паралеллијинә көрә $AD \parallel EF$, $EF \parallel BC$, јә'ни $BCEF$ кәсији трапесијадыр. SO һүндүрлүјүндән BC тилинә перпендикулјар олан SNM мүстәвисини кечирәк. Онда PM трапесијанын һүндүрлүјү олачаг.

$$MN = a,\ \angle NPM = 180^\circ - (2\alpha + \alpha),\ \frac{MN}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{PM}{\sin 2\alpha},$$

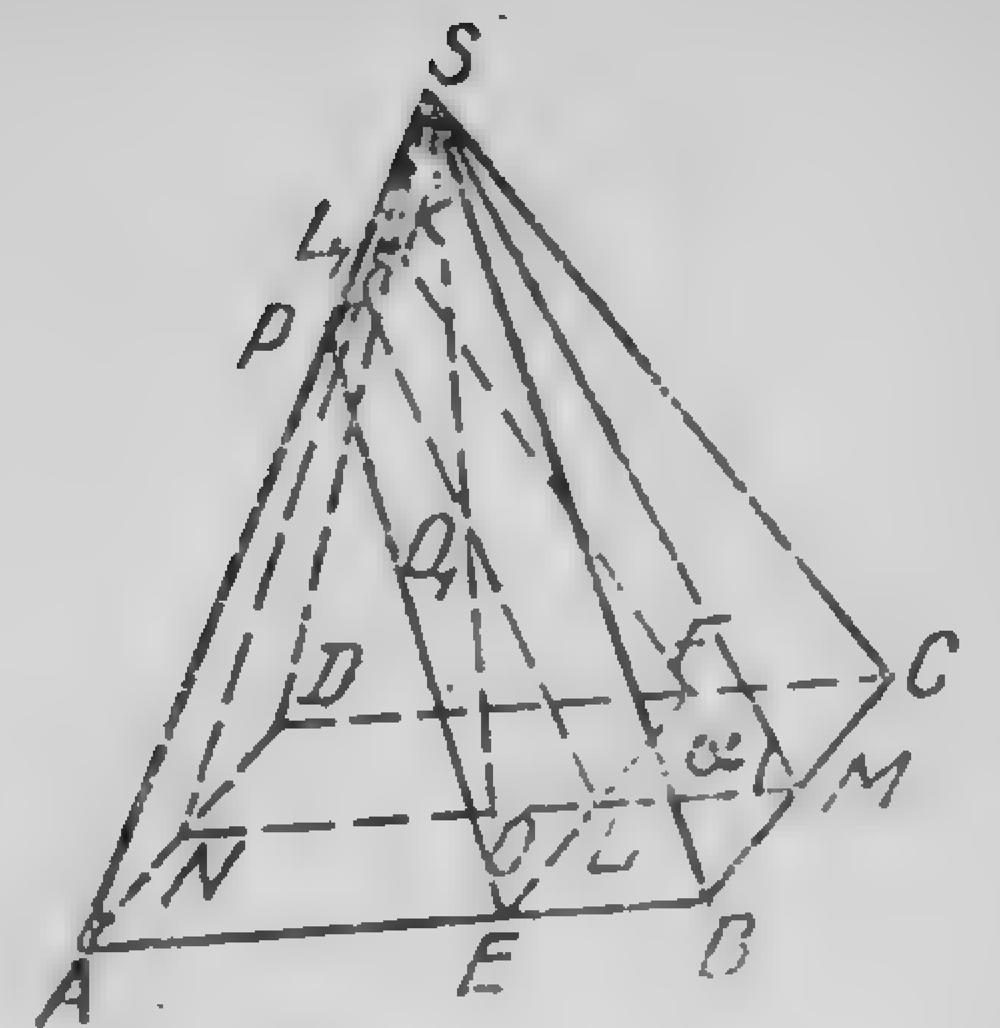
$$PM = \frac{MN\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

$\triangle SAD \backsim \triangle SEF$-дән: $\frac{EF}{SN} = \frac{SP}{SN}$, бурадан

$$EF = AD\frac{SP}{SN}. \qquad (1)$$



Шәкил 50



Шәкил 51

SMN үчбучағында $\angle SMN = \angle SNM = 2\alpha$, $\angle MSN = 180^\circ - 4\alpha$,

$$MN = a,\ \frac{SM}{\sin 2\alpha} = \frac{MN}{\sin(180^\circ - 4\alpha)},\ SM = \frac{MN\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{a}{2\cos 2\alpha},\ SN = SM = \frac{a}{2\cos 2\alpha}.$$

SPM үчбучағында $\angle SMP = \alpha$, $\angle MSP = 180^\circ - 4\alpha$.

$$MP = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha},\ \frac{SP}{\sin\alpha} = \frac{MP}{\sin(180^\circ - 4\alpha)},\ SP = \frac{MP\sin\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}\cdot\frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{2\cos 2\alpha\sin 3\alpha}.$$

AD, SP вә SN-нин гијмәтләрини (1)-дә јеринә јазсаг: $EF = \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$. Кәсијин саһәси $S = \frac{BC + EF}{2} \times$

$$\times PM = \frac{a + \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}}{2} \times \frac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

53. Фәрз едәк ки, кәсик $EFKP$ дөрдбучаглысыдыр (шәкил 51). EF вә BC дүз хәтләри, ики паралел мүстәвинин үчүнчү ABC мүстәвиси илә кәсишмә хәттидир вә $EF \parallel BC$. Демәли, $EF \parallel SAD$. Ајдындыр ки, $EFKP$ дөрдбучаглысы бәрабәрјанлы трапесијадыр. SO һүндүрлүјүндән BC тилинә перпендикулјар олан SMN мүстәвисини кечирәк; онда SMO буҹағы отурачаг тилин-

дәки икиүзлү бучағын хәтти бучағыдыр. $BC \perp (SMN)$, $AD \parallel BC$, $EF \parallel BC$ олдуғундан бу мүстәви EF вә AD-јә дә перпендикулјар олачагдыр. Демәли, LL_1 трапесијанын һүндүрлүјүдүр, $LL_1 \parallel SM$. Она көрә

$$\angle L_1IO = \angle SMO = \alpha,\quad OM = SO\,\mathrm{ctg}\,\alpha = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Бурадан $MN = 2MO = 2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. $\triangle MOS$-дән: $SM = \frac{h}{\sin\alpha}$

$\triangle OO_1L \sim \triangle OSM$ олдуғундан $\frac{OL}{OO_1} = \frac{OM}{SO}$, $OL = CO_1 \times \frac{OM}{SO} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{h} = \frac{h}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha$; $NL = NO + OL = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2} = \frac{3h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}$.

$\triangle NL_1L$-дән: $\frac{LL_1}{\sin\alpha} = \frac{NL}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$, $LL_1 = NL \times \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{3h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{3h}{4\sin\alpha}$, $NL_1 = LL_1 = \frac{3h}{4\sin\alpha}$, $SL_1 =$

$$= SN - NL_1 = \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{3h}{4\sin\alpha} = \frac{h}{4\sin\alpha}.$$

$\triangle PKS \sim \triangle ASD$ олдуғу үчүн:

$$\frac{PK}{AD} = \frac{SL_1}{SN},\quad PK = AD\cdot SL_1\cdot\frac{1}{SN} = 2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha \times \frac{h}{4\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{h} = \frac{h}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

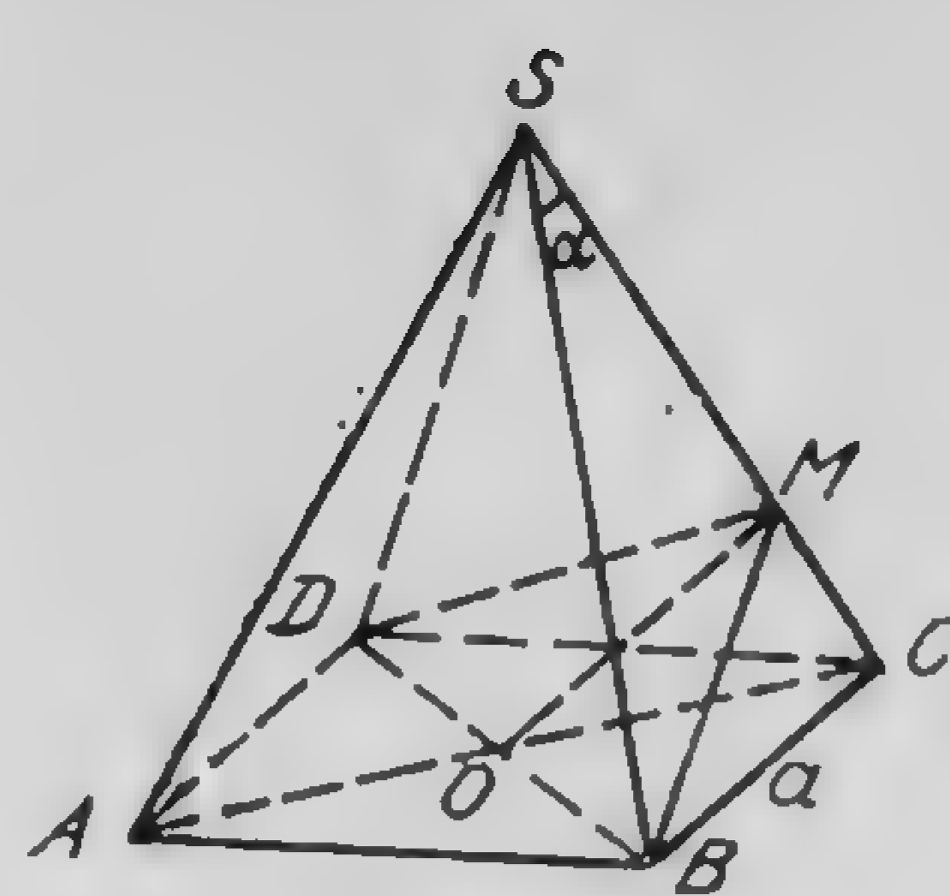
Кәсијин саһәси:

$$S = \frac{2h\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{1}{2}h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\cdot\frac{3h}{4\sin\alpha} = \frac{5h\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{4}\cdot\frac{3h}{4\sin\alpha} = \frac{15h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{16\sin\alpha}.$$

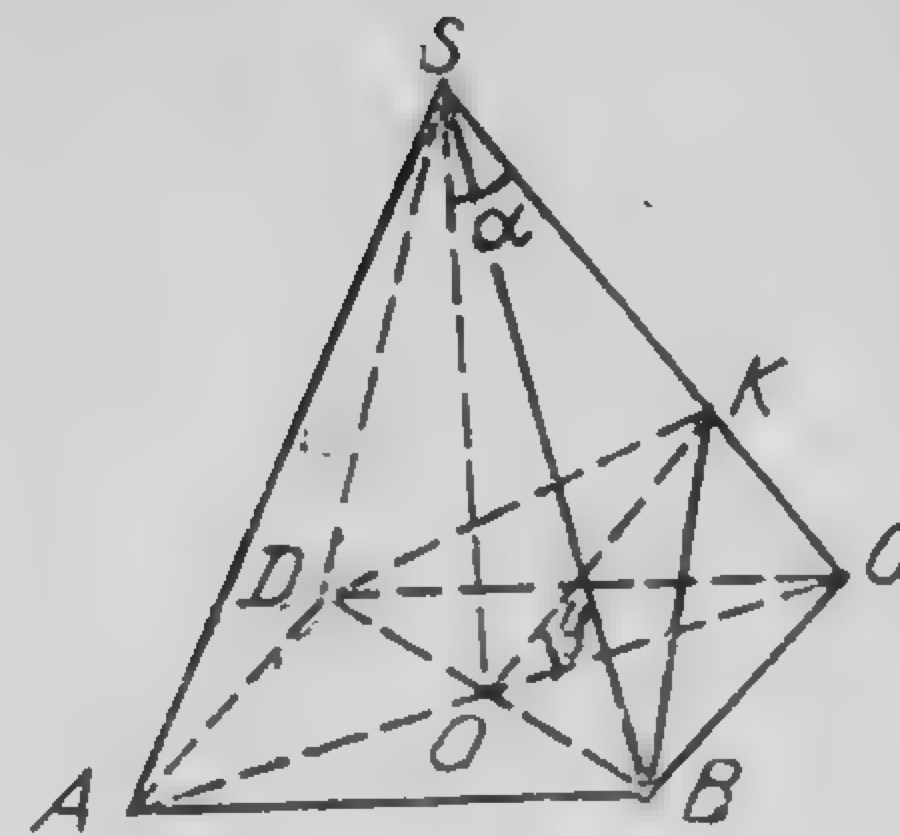
54. SC тили кәсијин мүстәвисинә перпендикулјар олдуғуна көрә $SC \perp BM$. Јә'ни SBM дүзбучаглы үчбучагдыр (шәкил 52).

$\triangle ABD$-дән: $BD = a\sqrt{2}$ вә $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle SBC$-дә $\angle BSC = \alpha$, $\angle SCB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $BC = a$,



Шәкил 52



Шәкил 53

$$\frac{SB}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{\sin\alpha},\quad SB = \frac{BC\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$\triangle SBM$-дән: $BM = SB\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = a\cos\frac{\alpha}{2}$.

$\triangle BOM$-дән: $MO = \sqrt{BM^2 - OB^2} =$

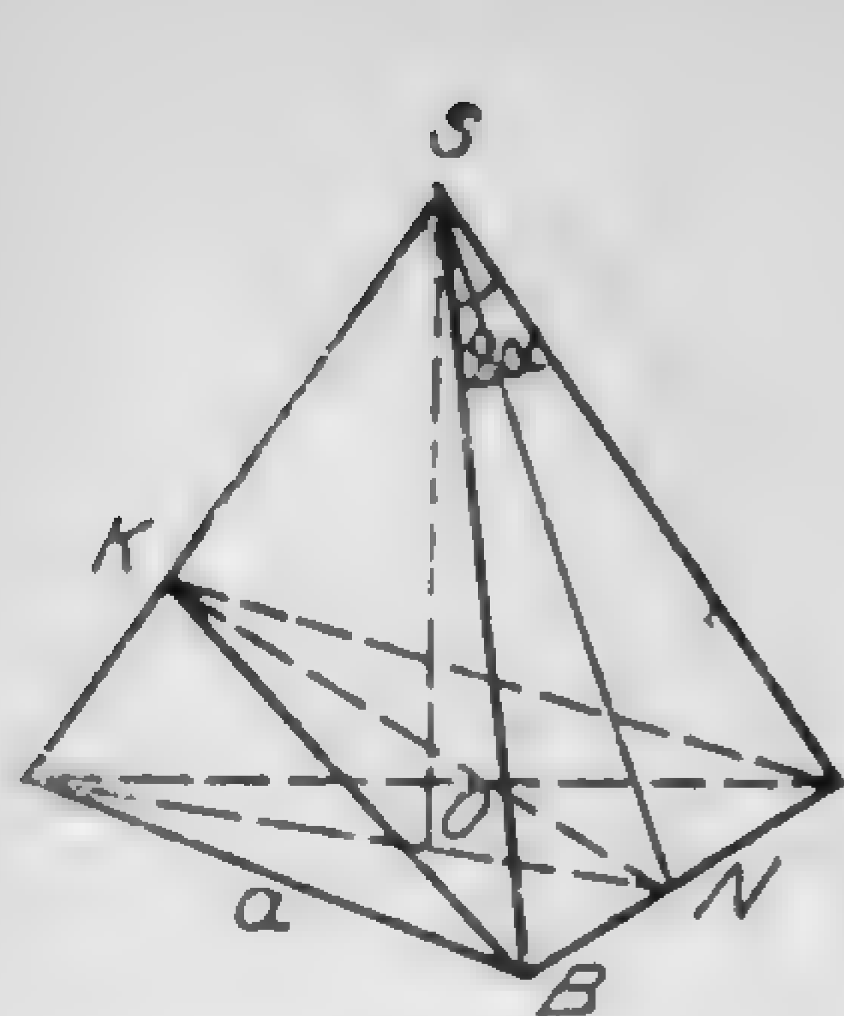
$$= \sqrt{\left(a\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{1}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}\cos\alpha}.$$

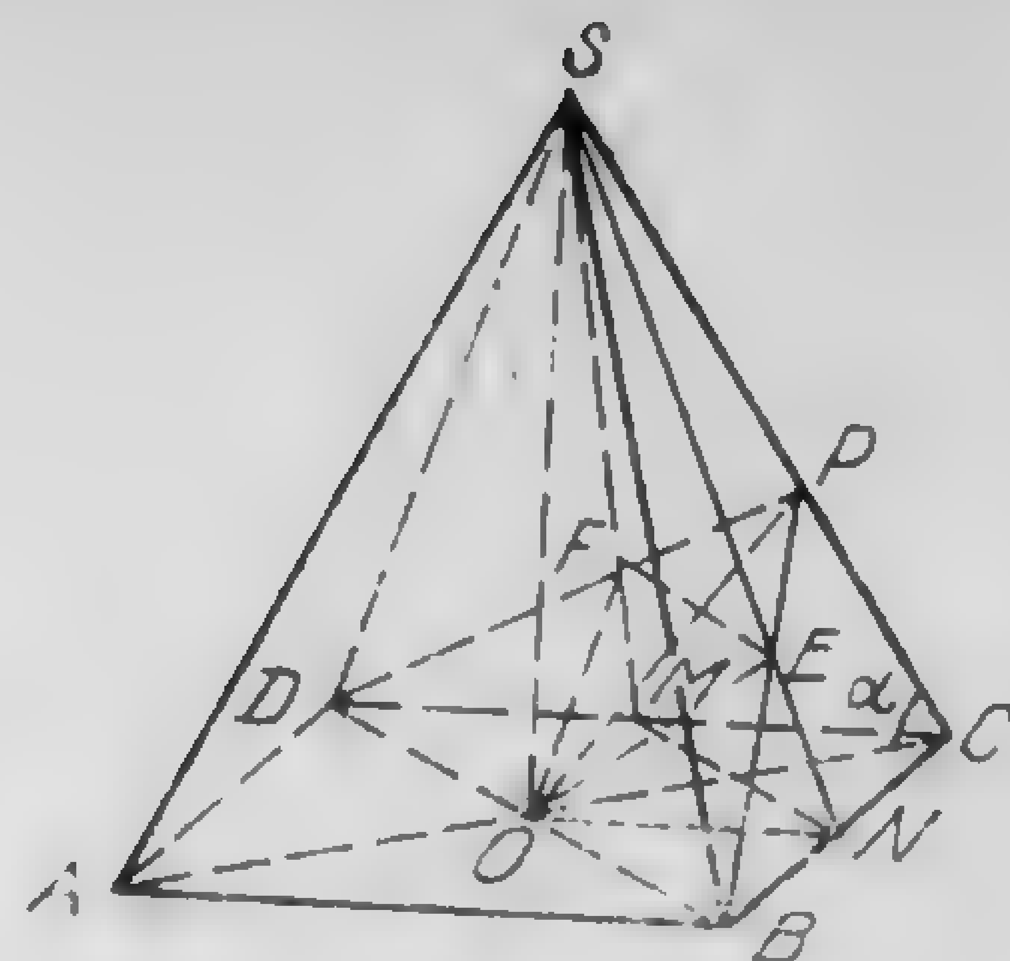
Кәсијин саһәси:

$$S = \frac{1}{2}BD\cdot OM = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{\frac{1}{2}\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{2}.$$

55. $SABCD$—дүзкүн дөрдбучаглы пирамидадыр, $SO = h$, $\angle CSO = \alpha$ (шәкил 53). $\angle KOC = \varphi$. $\triangle BKC = \triangle DKC$ ($BC = DC$, $\angle KCB = \angle KCD$). Бурадан $BK = DK$, BDK бәрабәрјанлы үчбучагдыр. KO парчасы бу үчбучағын медианы олдуғундан $KO \perp BD$. $AC \perp BD$. $KO \perp BD$ олдуғу үчүн $\angle KOC$ хәтти бучагдыр. $\triangle SOC$-дә: $OC = SO\,\mathrm{tg}\,\alpha = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ вә $BD = 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $\triangle OKC$-дән: $\angle KOC = \varphi$, $\angle KCO = 90^\circ - \alpha$, $OC = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\angle OKC = 180^\circ - (\varphi + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ - (\varphi - \alpha)$,



Шәкил 54



Шәкил 55

$$\frac{OK}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{OC}{\sin(90^\circ-(\varphi-\alpha))},\ OK=\frac{OC\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}=$$

$$=\frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}=\frac{h\sin\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}.$$

Кәсијин саһәси:

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot OK=\frac{1}{2}\cdot 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\frac{h\sin\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}=\frac{h^2\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}.$$

56. Кәсикдә $\triangle BKC$ алыныр (шәкил 54). $\triangle SKB$ дүзбучаглы үчбучагдыр.

$$\triangle SNB\text{-дән: } SB=\frac{BN}{\sin\alpha}=\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

$$SKB\text{-дән: } BK=SB\sin 2\alpha=\frac{a}{2\sin\alpha}\cdot\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{a}{2\sin\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=a\cos\alpha.\ \triangle KNB\text{-дән: } KN=$$

$$=\sqrt{BK^2-BN^2}=\sqrt{a(\cos\alpha)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{\cos^2\alpha-\frac{1}{4}}=$$

$$a\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

Кәсијин саһәси:

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot KN=\frac{1}{2}a^2\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

57. $SABCD$ дүзкүн дөрдбучаглы пирамидадыр, $AB=a$, $\angle SCO=\alpha$ (шәкил 55).

SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр. Тәләб олунан кәсијн ашағыдакы кими гурурук: $ON\perp BC$, $OM\perp DC$ чәкиб, S нөгтәсини N вә M нөгтәләри илә бирләшдирәк, үч перпендикулјар теореминә көрә $SN\perp BC$ вә $SM\perp DC$. Демәли, $BC\perp(SON)$ вә $DC\perp(SOM)$. Бурадан ики мүстәвинин перпендикулјар әламәтинә көрә SBC илә SON вә SOM илә SDC мүстәвиләри гаршылыглы перпендикулјардыр. $OE\perp(SBC)$ вә $OF\perp(SDC)$ чәкәк. Онда $OE\perp SN$ вә $OF\perp SM$ олар. $\triangle OEN=\triangle OFM$ ($ON=OM$, $\angle ENO=\angle FMO$ олдуғундан). Бурадан $EN=FM$ олур. SMN үчбучағы бәрабәрјанлы вә $EN=FM$ олдуғу үчүн $EF\parallel MN$ олур, дикәр тәрәфдән $MN\parallel BD$. Демәли, $EF\parallel BD$ олур. Бурадан ајдындыр ки, кәсән мүстәви пирамиданын отурачағынын диагоналындан кечир. Бир мүстәвијә перпендикулјар олан ики мүстәвинин кәсишмә хәттинин хассәсинә көрә $SC\perp(BDP)$. Демәли, BPC, DPC вә POC үчбучаглары дүзбучаглы үчбучаглардыр. $\triangle BPC=\triangle DPC$ ($BC=DC$, PC ортаг олдуғуна көрә). Пирамиданын отурачағы квадрат олдуғу үчүн $BD=AC=a\sqrt{2}$.

$$\triangle POC\text{-дән: } \angle PCO=\alpha,\ OC=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ PO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$$

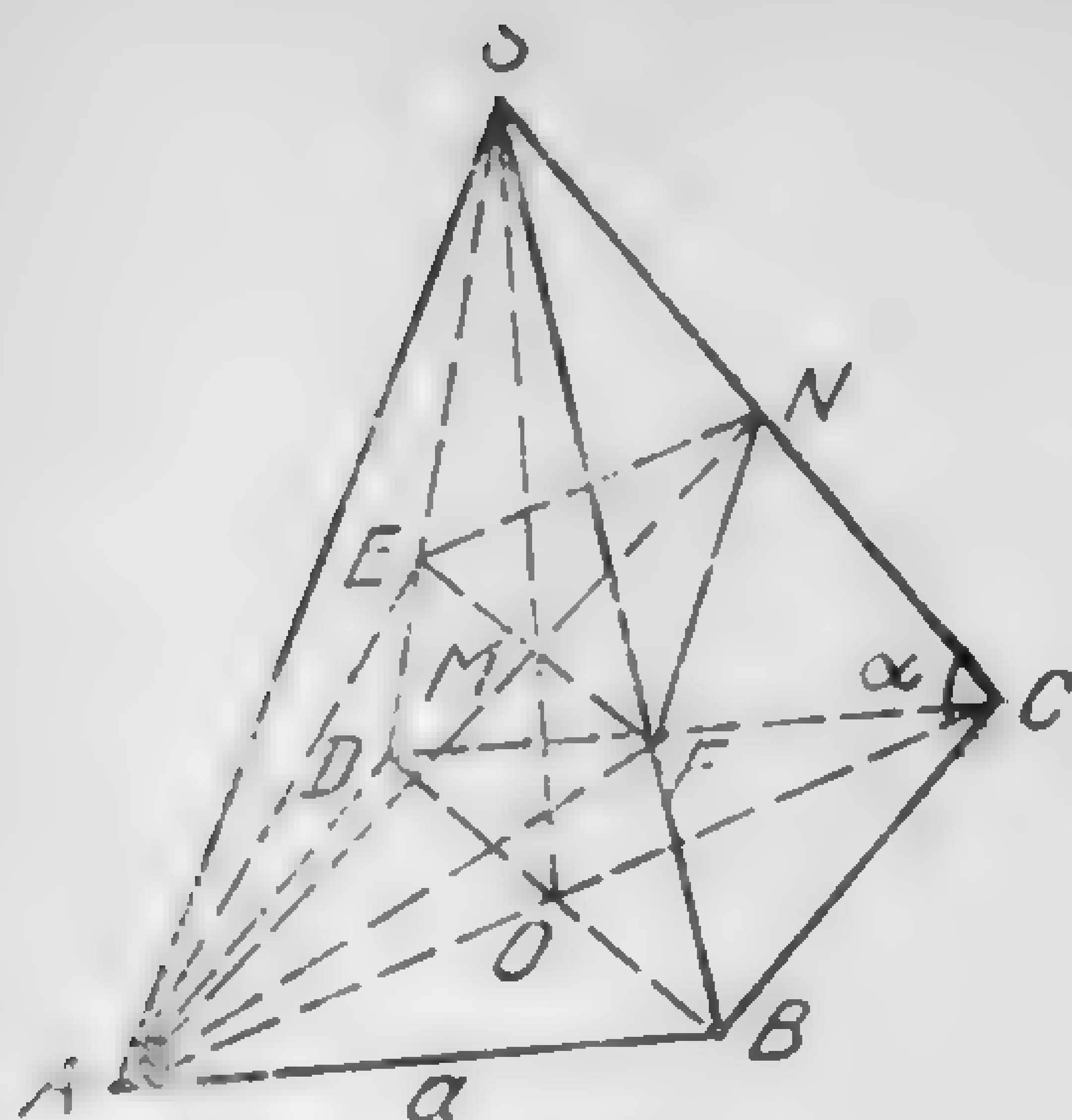
Кәсијин саһәси:

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot PO=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.$$

58. Пирамиданын отурачағы квадрат олдуғундан $AC=BD=a\sqrt{2}$ алырыг (шәкил 56). $\triangle ANC$-дән: $AN=AC\sin\alpha$, $AN=a\sqrt{2}\sin\alpha$, $CN=AC\cos\alpha=a\sqrt{2}\cos\alpha\cdot$ $\triangle SOC$-дә: $SO=OC\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

$$SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}\,\alpha,\ SC=\frac{OC}{\cos\alpha}=\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}\cdot SN=SC-CN=$$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}-a\sqrt{2}\cos\alpha=\frac{a\sqrt{2}(1-2\cos^2\alpha)}{2\cos\alpha}=-\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}.$$



Шәкил 56

$\triangle MSN$-дән: $\angle MSN = 90^\circ - \alpha$,

$$\frac{SN}{SM} = \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$SM = \frac{SN}{\sin\alpha} = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha} = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

$\triangle ESF \sim \triangle DSB$;

$$\frac{EF}{BD} = \frac{SM}{SO},\quad EF = BD\cdot SM\cdot\frac{1}{SO} = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Кәсијин саһәси:

$$S = \frac{1}{2}AN\cdot EF = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\sin\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}a\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = -\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

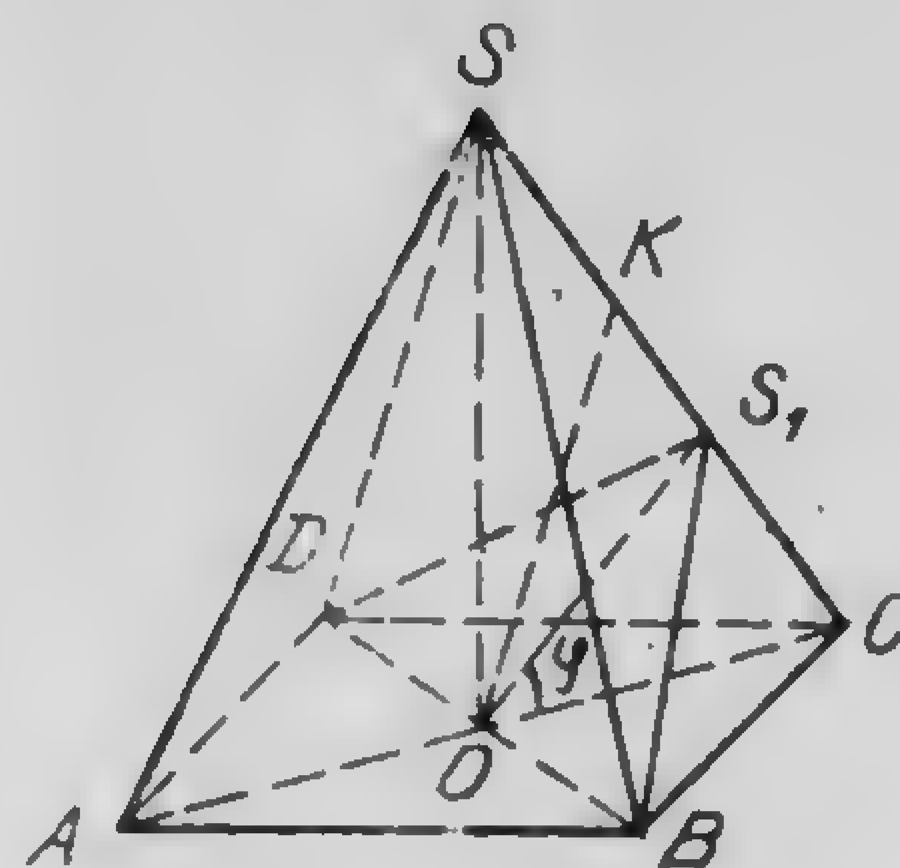
59. *Чаваб:* $a^2\sin^3\alpha$. **60.** *Чаваб:* $a^2\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{3\sin^2\beta}$.

61. *Чаваб:* $\dfrac{5\sqrt{2}}{16}a^2$.

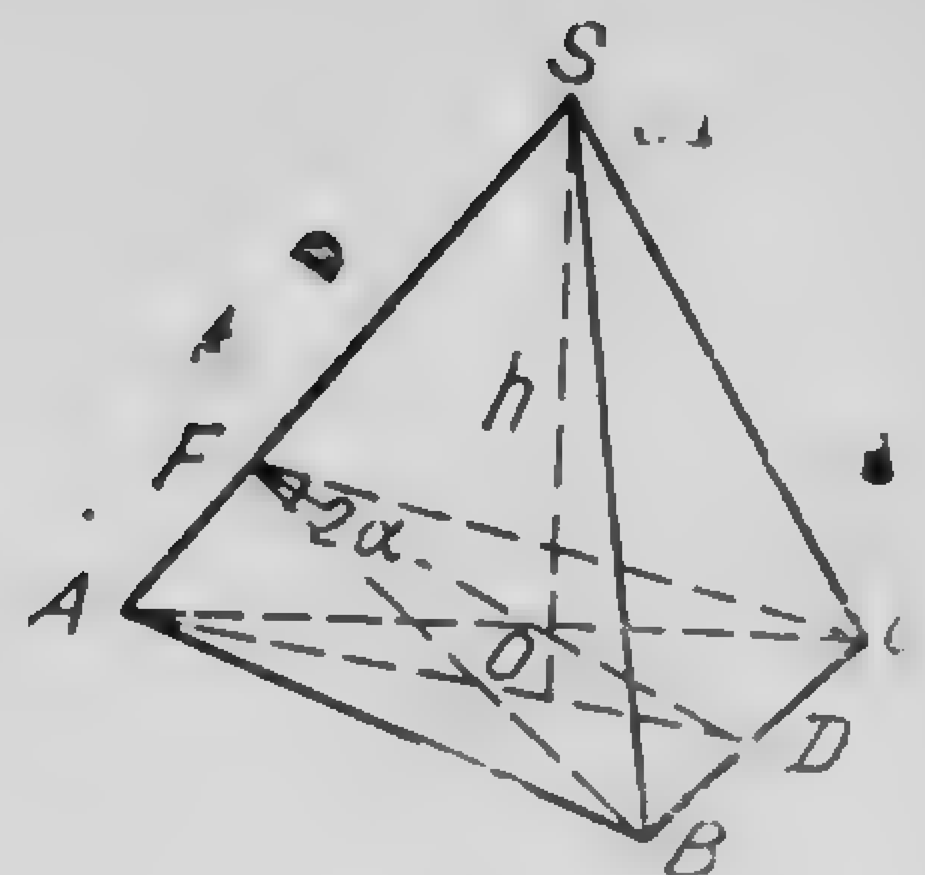
62. $SABCD$ дүзкүн дөрдбучаглы пирамида вә $SO : AB = m : n$; $\triangle SBD = \triangle S_1BD$ (шәкил 57) олдуғу верилмишдир. Мүтәнасиблик әмсалы x олса, $SO = mx$; $AB = nx$.

Ајдындыр ки, $OD = OC = \dfrac{nx\sqrt{2}}{2}$. $\triangle BS_1C = \triangle DS_1C$ ($\angle S_1CB = \angle S_1CD$, S_1C ортаг тәрәф, $BC = DC$ олдуғу үчүн), она көрә $S_1B = S_1D$. Демәли, S_1BD бәрабәрјанлы үчбучагдыр.

Бәрабәрјанлы үчбучағын медианы һәм дә һүндүрлүк олдуғундан $S_1O \perp BD$, $S_1O = SO$ (бәрабәр үчбучагларын ујғун тәрәфләринә чәкилән һүндүрлүкләрдир) олдуғу үчүн SOS_1 үчбучағы бәрабәрјанлыдыр.



Шәкил 57



Шәкил 58

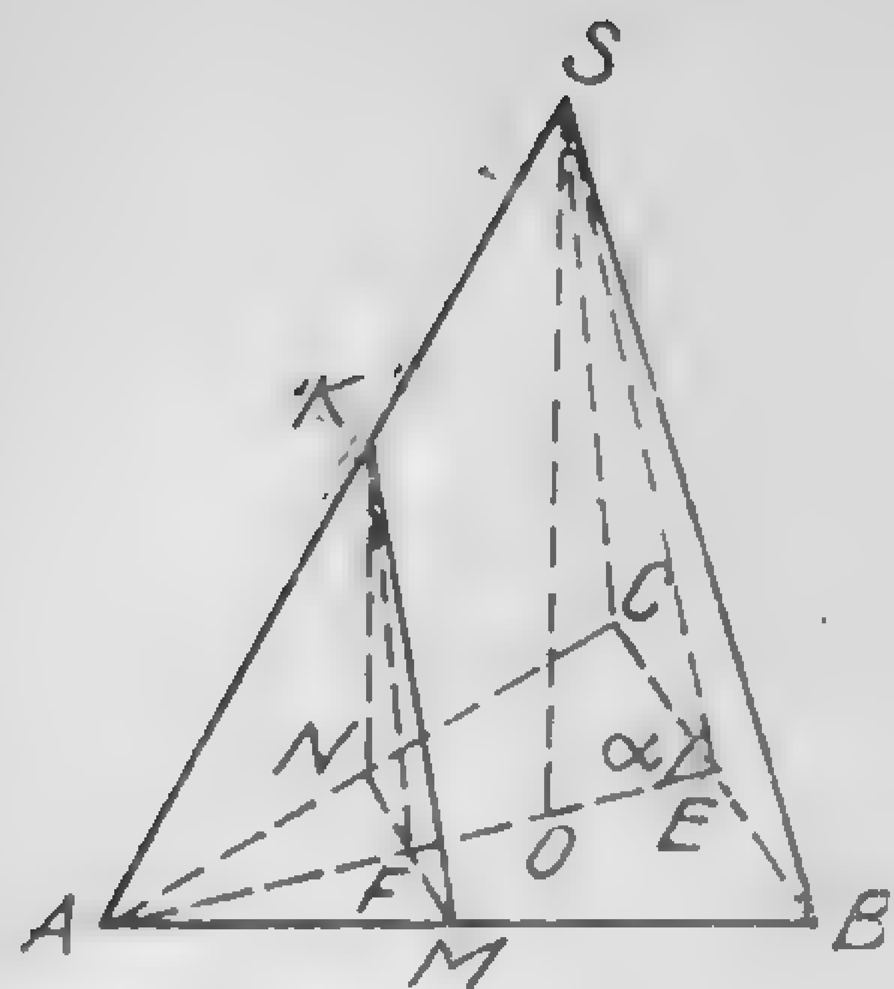
$OK \parallel SA$ чәкәк. OK парчасы OSS_1 бәрабәрјанлы үчбучағын тәпә бучағынын һүндүрлүјү олдуғундан һәм дә тәнбөләндир. Она көрә $\angle SOK = \frac{1}{2}\angle SOS_1 = \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. SOK чбучағында: $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{SK}{OK}$, лакин $\triangle SOK \sim \triangle SOC$ олдуғундан $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{SK}{OK} = \frac{SO}{OC} = \frac{mx}{\frac{nx\sqrt{2}}{2}}$, бурадан $\varphi = 90^\circ - 2\operatorname{arctg}\frac{m\sqrt{2}}{n}$ тапылыр.

63. *Чаваб:* $V = \dfrac{\sqrt{3}h^3\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos^2\alpha}$.

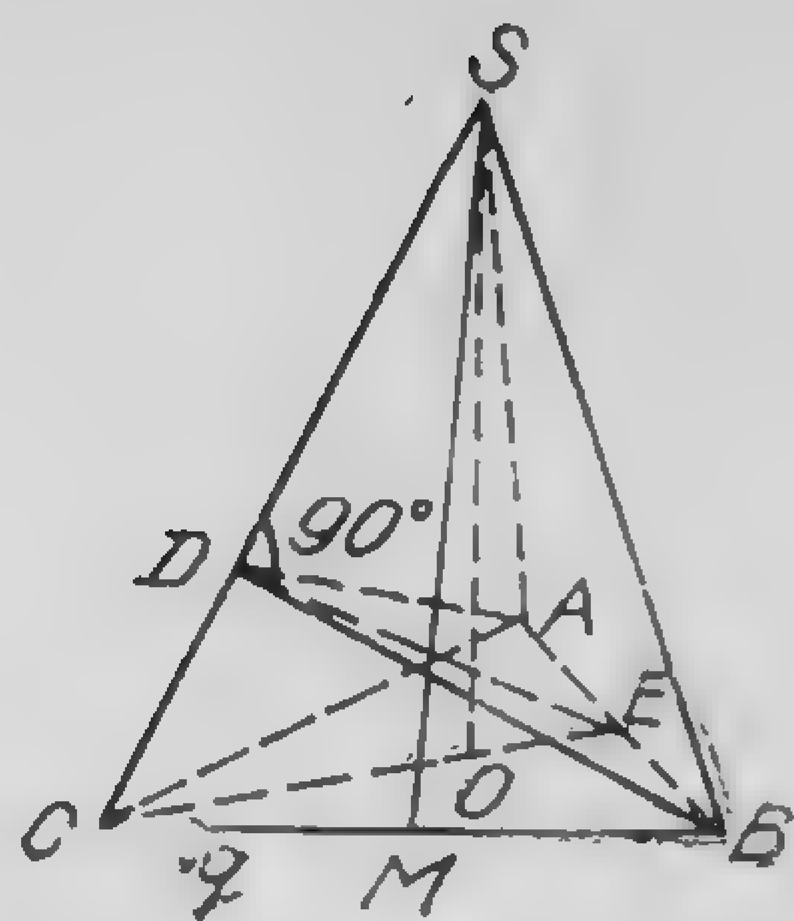
Көстәриш. Пирамиданын отурачағынын BC тилиндән (шәкил 58) AS јан тилинә перпендикулјар мүстәви кечирин. Онда BFC бучағы AS тилиндәки бучағы олачагдыр.

64. $MN = \dfrac{1}{2}BC$, $MN \parallel BC$ (шәкил 59), $AE \perp BC$ чәксәк, $\angle SEA = \alpha$.

ASE мүстәвиси BC тилинә перпендикулјар вә $MN \parallel BC$ олдуғундан һәмин мүстәви MN парчасына перпендикулјар олур. $\angle KFA = 90^\circ$. $KAMN$ үчбучаглы пирамида, KF онун һүндүрлүјүдүр. $KF \perp AE$ вә $SO \perp AE$ олдуғу үчүн $KF \parallel SO$ вә $\triangle AKF \sim \triangle ASO$.



Шәкил 59



Шәкил 60

$$V_{KAMN}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}AF\cdot MN\right)\cdot KF$$

$\triangle AEB$-дә: $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}.$$

$$AMF\text{-дә: } AF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4},$$

$$AO=\frac{a}{\sqrt{3}},\ OE=\frac{1}{2}AO=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$$\triangle SOE\text{-дә: } SO=OE\,\mathrm{tg}\alpha=\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}.$$

$\triangle AKF \backsim \triangle ASO$ олдуғуна көрә $\frac{KF}{AF}=\frac{SO}{AO}$ вә ја

$$KF=AF\cdot\frac{SO}{AO}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{a}.$$

Нәтиҹәдә:

$$V_{KAMN}=\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{128}.$$

65. Пирамиданын там сәтһи $S=S_{ABC}+3\cdot S_{SBC}$ (шәкил 60). $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot CB\sin 60^\circ=\frac{1}{2}q^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{q^2\sqrt{3}}{4}$,

$$S_{SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SM=\frac{1}{2}q\sqrt{SC^2-CM^2}=$$

$$=\frac{1}{2}q\sqrt{SC^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2}.$$

$CD=mx$, $DS=nx$ олсун. SCO ити бучаг ортаг олдуғундан $\triangle CED \backsim \triangle SOC$. Бурадан $SC:CO=CE:CD$ вә ја $SC\cdot CD=CO\cdot CE$ олур. $\triangle CEB$-дән: $CE=BC\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}q$, дүзкүн үчбуҹағын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусу олдуғу үчүн $CO=\frac{\sqrt{3}}{3}q$, $CD=mx$, $SC=mx+nx=x(m+n)$. Беләликлә, $SC\times CD=CO\cdot CE$ вә ја $x(m+n)\cdot mx=\frac{q\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{q\sqrt{3}}{2}$, бурадан $x=\frac{q}{\sqrt{2m(m+n)}}$ вә $SC=(m+n)x=\frac{q\sqrt{2m(m+n)}}{2m}$.

$$S_{SBC}=\frac{1}{2}q\sqrt{SC^2-\frac{1}{4}q^2}=\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{q^2(m+n)}{2m}-\frac{q^2}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}q^2\sqrt{\frac{2m+2n-m}{m}}=\frac{q}{4m}\sqrt{(m+2n)m}.$$

$$S=\frac{q^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3q^2\sqrt{(m+2n)m}}{4m}=\frac{q\sqrt{3}}{4m}\left(m+\sqrt{3m(m+2n)}\right).$$

66. A_1B_1 парчасыны x илә ишарә едәк (шәкил 61). OK парчасы ABC вә O_1K_1 исә $A_1B_1C_1$ дүзкүн үчбуҹағынын дахилинә чәкилмиш чеврәнин радиусу олдуғундан ујғун олараг $OK=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $O_1K_1=\frac{x}{2\sqrt{3}}$. $NK=OK-$

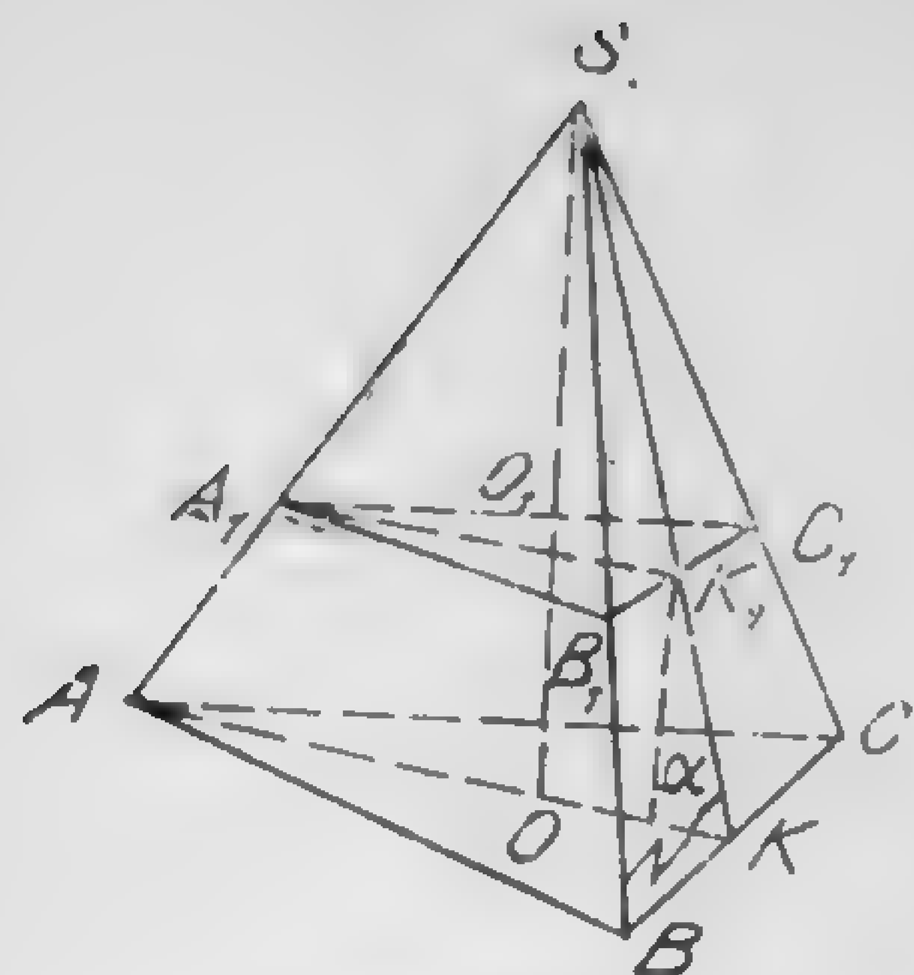
$$-O_1K_1=\frac{a}{2\sqrt{3}}-\frac{x}{2\sqrt{3}}=\frac{a-x}{2\sqrt{3}}.$$

$$\triangle NK_1K\text{-дан } KK_1=\frac{KN}{\cos\alpha}=\frac{a-x}{2\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

Кәсик пирамиданын јан сәтһи:

$$S_{ја н}=\frac{3AB+3A_1B_1}{2}\cdot KK_1=\frac{3a+3x}{2}\cdot\frac{a-x}{2\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{3(a^2-x^2)}{4\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

Кәсијин саһәси $S_{A_1B_1C_1}=\frac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.



Шәкил 61

Шәртә көрә

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3(a^2 - x^2)}{4\sqrt{3}\cos\alpha},$$

бурадан $x^2 = \frac{a^2}{1+\cos\alpha} = \frac{a^2}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ вә $S_{A_1B_1C_1} =$

$$x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. SOK-дан:

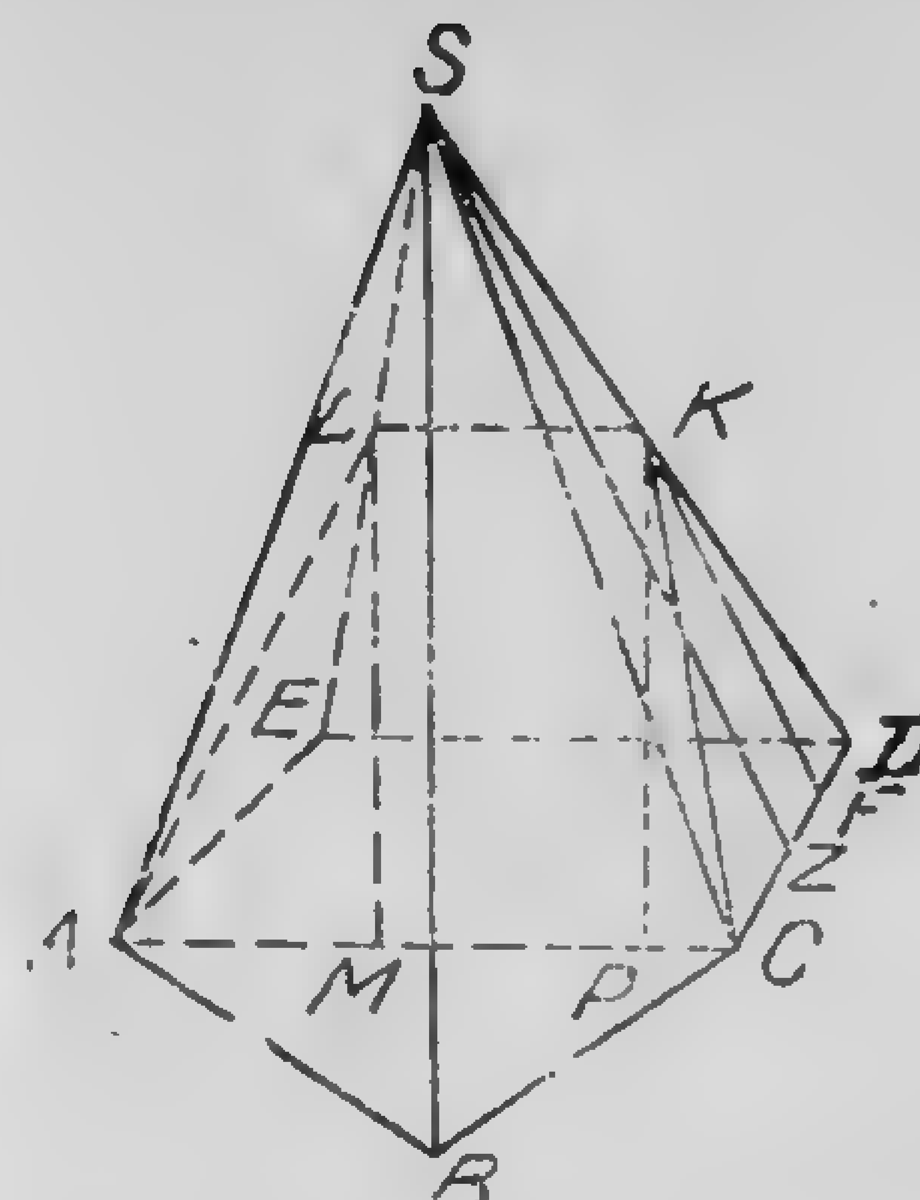
$$SO = OK\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Пирамидада паралел кәсикләрин хассәләринә көрә

$$S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = SO^2 : SO_1^2; \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{\sqrt{3}a^2}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{12} : SO_1^2 \text{ вә } SO_1 = \frac{\sqrt{6}\,a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{12\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

67. $ACDE$ дөрдбучаглысы (шәкил 62) трапесиjадыр. Чүнки $\angle AED = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = 108^\circ$, $\angle EAC = \frac{1}{2}\smile CDE = \frac{1}{2}\cdot 144^\circ = 72^\circ$; $\angle AED + \angle EAC = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$, jә'ни $AC \parallel ED$. KL парчасы SDE үчбучагынын орта хәтти олдугу үчүн $KL \parallel ED$, $KL = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}q$; $AC \parallel ED$ вә $KL \parallel ED$. Онда $AC \parallel KL$ олдугу үчүн $ACKL$ кәсиjи бәрабәрjанлы трапесиjадыр ($KD = EL$, $CD = AE$, $\angle KDC = \angle AEL$ олдугу үчүн), jә'ни $CK = AL$. $BN \perp AC$ чәкәк. ABN үчбучагында: $AN = AB\sin 54^\circ = q\sin 54^\circ$; бурадан $AC = 2AN = 2q\sin 54^\circ = \frac{q}{2}(\sqrt{5}+1)$.



Шәкил 62

$KP \perp AC$, $LM \perp AC$ чәкәк.

$\triangle KPC$-дә: $KP = \sqrt{KC^2 - PC^2}\cdot AC = AM + MP + PC = 2PC + MP = 2PC + KL$ вә jа $\frac{q}{2}(\sqrt{5}+1) = 2PC + \frac{1}{2}q$, бурадан $PC = \frac{q}{4}\sqrt{5}$. $SZ \perp CD$, $KF \perp CD$ чәкәк.

$CK^2 = DK^2 + CD^2 - 2CD\cdot FD$ вә jа $CK^2 = q^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2q\cdot FD$.

Ајдындыр ки,

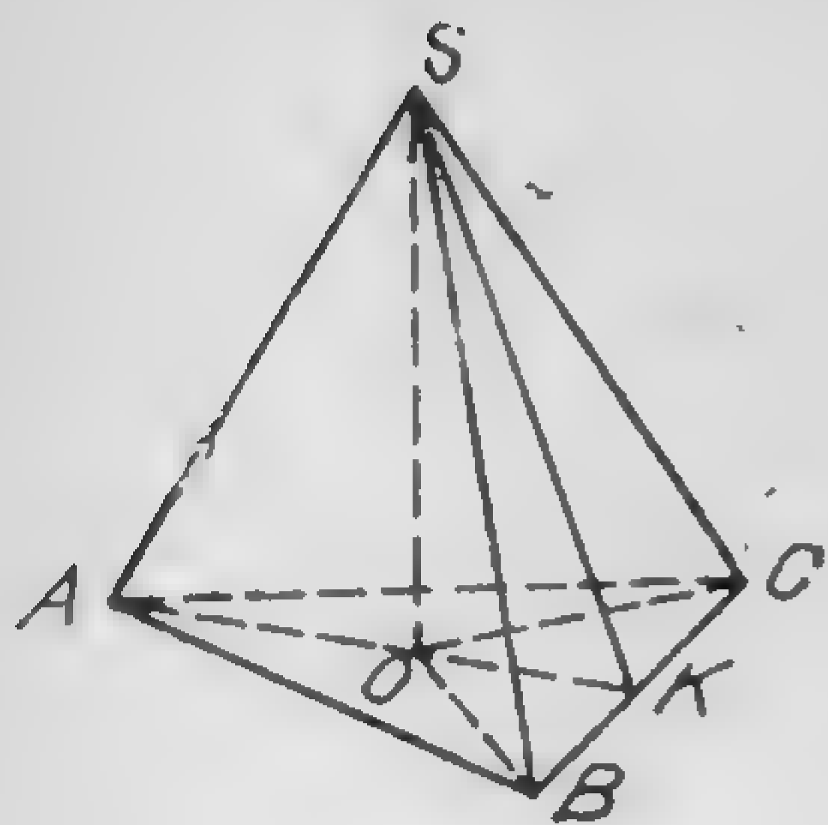
$$FD = \frac{1}{4}q$$

$$CK^2 = q^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2q\cdot\frac{q}{4} = \frac{2q^2+b^2}{4};\ PK =$$

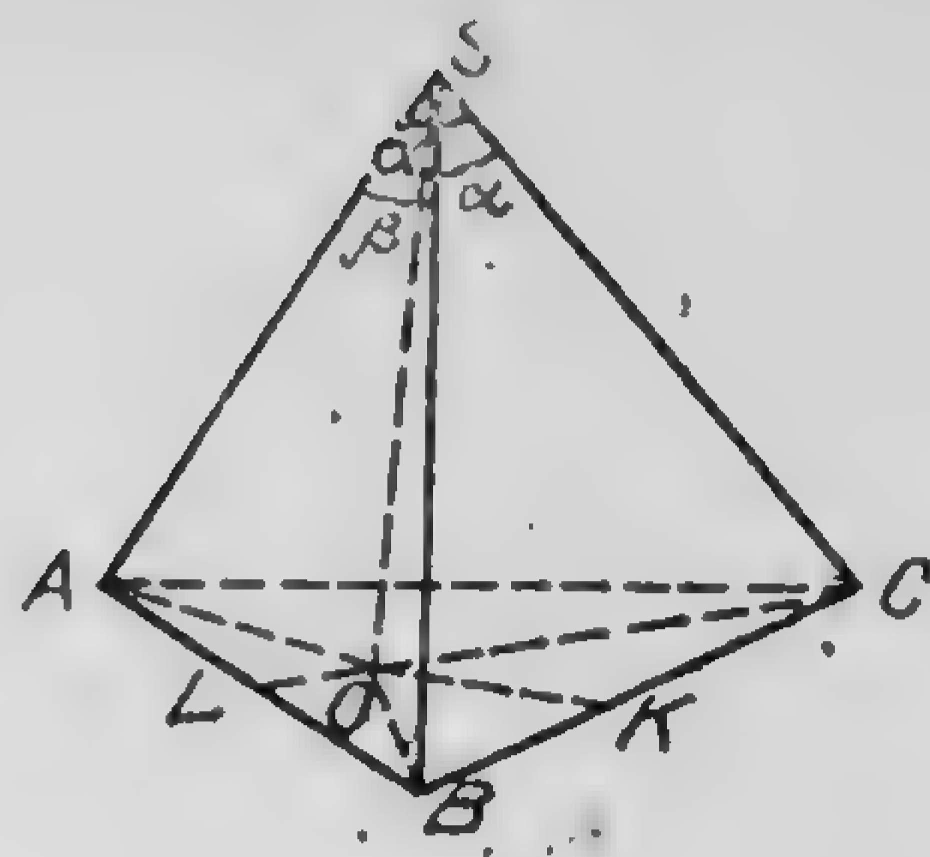
$$= \sqrt{CK^2 - PC^2} = \sqrt{\frac{2q^2+b^2}{4} - \frac{5q^2}{16}} = \frac{\sqrt{3q^2+4b^2}}{4}.$$

Кәсиjин саһәси:

$$S = \frac{AC+KL}{2}\cdot KP = \frac{\frac{q(\sqrt{5}+1)}{2} + \frac{q}{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3q^2+4b^2}}{4} = \dots$$



Шәкил 63



Шәкил 64

$$= \frac{q}{16}\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt{3q^2+4b^2}.$$

68. Тутаг ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 63), O нөгтәсини A, B вә C нөгтәләри илә бирләшдирәк. ASO, BSO вә CSO дүзбучаглы үчбучагларында SO катети ортаг вә бир ити бучаглары бәрабәр олдугу үчүн бу үчбучаглар бир-биринә бәрабәрдир. Буна көрә AS, SB, вә SC тилләри вә AO, BO вә CO парчалары да бир-биринә бәрабәр олачагдыр. Демәли, пирамиданын бүтүн јан тилләри бәрабәр, олдуғу үчүн пирамиданын һүндүрлүјү пирамида отурачағы харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир.

69. Тутаг ки, SO пирамиданын һүндүрлүјү, $\angle ASC = \angle BSC = \alpha$, $\angle ASB = \beta$ (шәкил 64). Пирамиданын бүтүн јан тилләри бәрабәр олдуғундан онун һүндүрлүјү отурачағын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир вә $AO = OB = OC$ олур. $\triangle SBC = \triangle SAC$ (ики тәрәф вә бунларын арасындакы бучаглара көрә). Демәли, $AC = BC$ олур, јә'ни ABC үчбучағы бәрабәрјанлыдыр, онун CL һүндүрлүјүнү чәкәк. O нөгтәси бу һүндүрлүјүн үзәринә дүшүр. $\triangle ASC$-дән: $AS = SC = l$, $\angle ASC = \alpha$,

$$\frac{SC}{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AC}{\sin\alpha},\quad AC = \frac{SC\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{l\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$\triangle ASB$-дән: $$\frac{SA}{\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{AB}{\sin\beta},\quad AB = \frac{SA\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2}} = 2l\sin\frac{\beta}{2}.$$

$\triangle CLB \sim \triangle COK$, бурадан: $CO = \frac{CK\cdot CB}{CL} = \frac{\frac{1}{2}BC^2}{CL}$. $\triangle CLB$-дән:

$$CL = \sqrt{BC^2 - BL^2} = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 2l\sin\frac{\beta}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - l^2\sin^2\frac{\beta}{2}};\quad CO = \frac{\frac{1}{2}\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}} =$$

$$= \frac{2l\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}.$$

$\triangle SOC$-дән: $SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} =$

$$= \sqrt{l^2 - \left(\frac{2l\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}\right)^2} =$$

$$= l\sqrt{\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}.$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB\cdot CL\right)\cdot SO = \frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\times$$

$$\times\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

70. Пирамиданын отурачаг тилләриндәки икиүзлү бучаглар бир-биринә бәрабәр олдуғу үчүн пирамиданын һүндүрлүјү отурачағын дахилинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир (шәкил 65).

Үч перпендикулјар теореминә көрә $SK \perp BC$ олур. Демәли, OK дахилә чәкилмиш чеврәнин радиусу, $\angle SKO$ јан үзүн отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучагдыр. $AB = AC = x$ гәбул едәк. ABK-дан: $BK = AB\cos\alpha = x\cos\alpha$, $AK = AB\sin\alpha = x\sin\alpha$. Дикәр тәрәфдән $BC = 2BK = 2x\cos\alpha$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AK = x^2\cos\alpha\sin\alpha$.

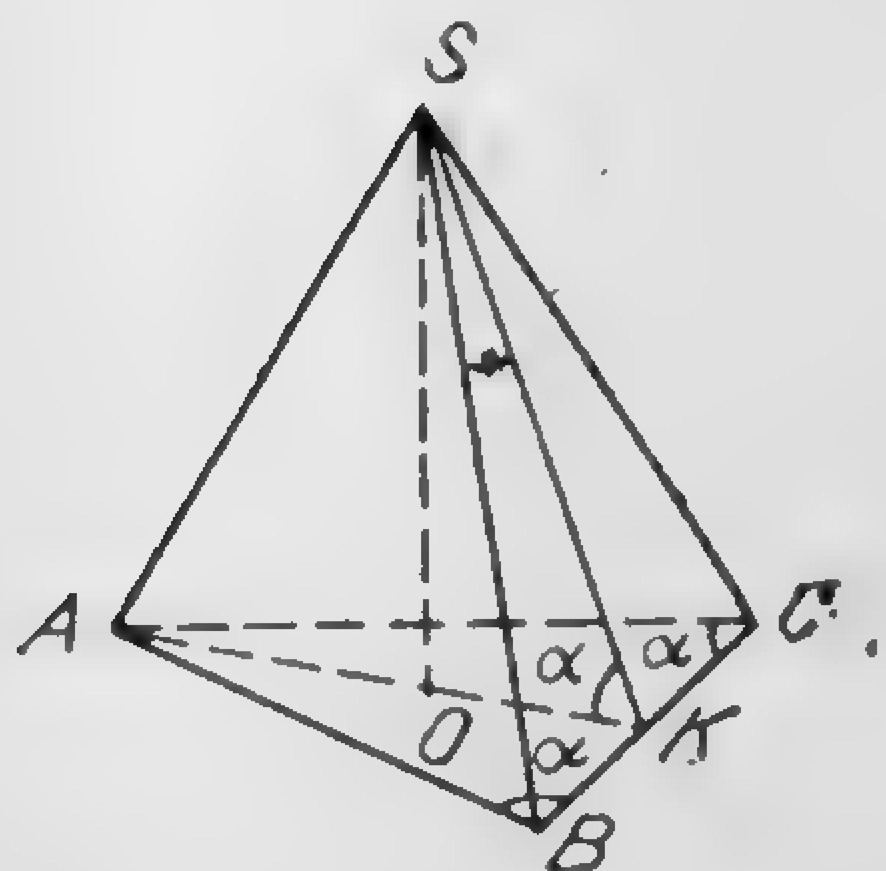
ABC үчбучағынын периметри: $2P = 2x + 2x\cos\alpha$, $x = \dfrac{P}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, онда $S_{ABC} = \left(\dfrac{P}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\cos\alpha\sin\alpha =$

$$= \frac{P^2\cos\alpha\sin\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

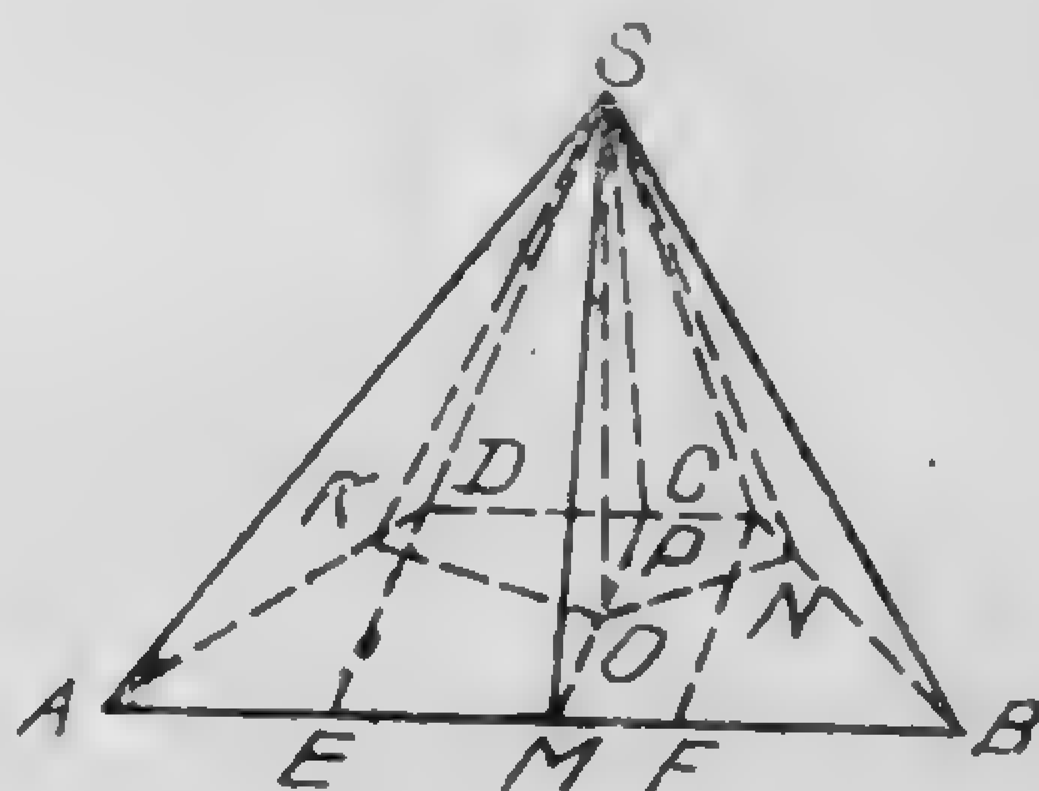
$S_{ABC} = P\cdot OK$ дүстурундан $OK = \dfrac{P\cos\alpha\sin\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

SOK үчбучағындан $SK = \dfrac{OK}{\cos\alpha} = \dfrac{P\sin\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$, јан үзләрин отурачагла әмәлә кәтирдији бучаглар бәрабәр олдуғундан үзләрин апофемләри бәрабәр олур.

$$S_{јан} = \frac{1}{2}\cdot 2P\cdot\frac{P\sin\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{P^2\sin\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$



Шәкил 65



Шәкил 66

71. Пирамиданын бүтүн јан үзләри отурачаг мүстәвиси илә ејни икиүзлү бучаг әмәлә кәтирдији үчүн онун һүндүрлүјү отурачағын дахилинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир, трапесија чеврә харичинә чәкилмиш олур. Мә'лум теоремә көрә $AD + BC = AB + DC$, лакин $AB + DC = a + b$, демәли, $AD = BC = \frac{a+b}{2}$ (шәкил 66).

$DE \perp AB$ вә $CF \perp AB$ чәксәк, $AE = BF$ вә $AB = AE + EF + BF = CD + 2AE$ аларыг. Сонунчу бәрабәрликдән $2AE = AB - CD = a - b$, $AE = BF = \frac{a-b}{2}$ олур. BCF үчбучағында $BC = \frac{a+b}{2}$, $BF = \frac{a-b}{2}$ олдуғундан $CF = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$. Отурачағын O мәркәзиндән јан тәрәфләринә перпендикулјар чәкмәклә, үзләрин отурачаг мүстәвисилә әмәлә кәтирдији икиүзлү бучағын хәтти бучаглары гурулур. $\angle OMS = \alpha$, $OM = \frac{1}{2}CF$ олдуғундан $OM = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ олур.

$\triangle SMO$-дан: $SM = \dfrac{OM}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}$; $S_{от} = \dfrac{AB + DC}{2}\cdot CF = \dfrac{a+b}{2}\cdot\sqrt{ab} = \dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$. $S_{јан} = \frac{1}{2}(AB + CD + AD + BC)\cdot SM = \frac{1}{2}\cdot 2(AB + CD)\cdot SM = (AB + CD)\cdot SM =$

$$= (a+b)\cdot\frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha};\ S_т = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2} + \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{ab}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

72. Јан тилләр отурачагла ејни бучаглар әмәлә кәтирдијиндән һүндүрлүјүн отурачағы, пирамиданын отурачағы харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзи илә үст-үстә дүшәчәкдир. O нөгтәси (шәкил 67) бу чеврәнин мәркәзидир. $AN \perp BC$ чәксәк, AN парчасы ејни заманда медиан вә тәнбөләндир, O нөгтәсиндән

кечәр вә $\angle BAN = \angle CAN = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha$, $BN = CN = \frac{1}{2}BC$.

$\triangle ABN$-дән: $\angle BAN = \frac{1}{2}\alpha$, $AN = AB\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$.

$\triangle ABC$-дән: $\angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $AC = 2R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$,

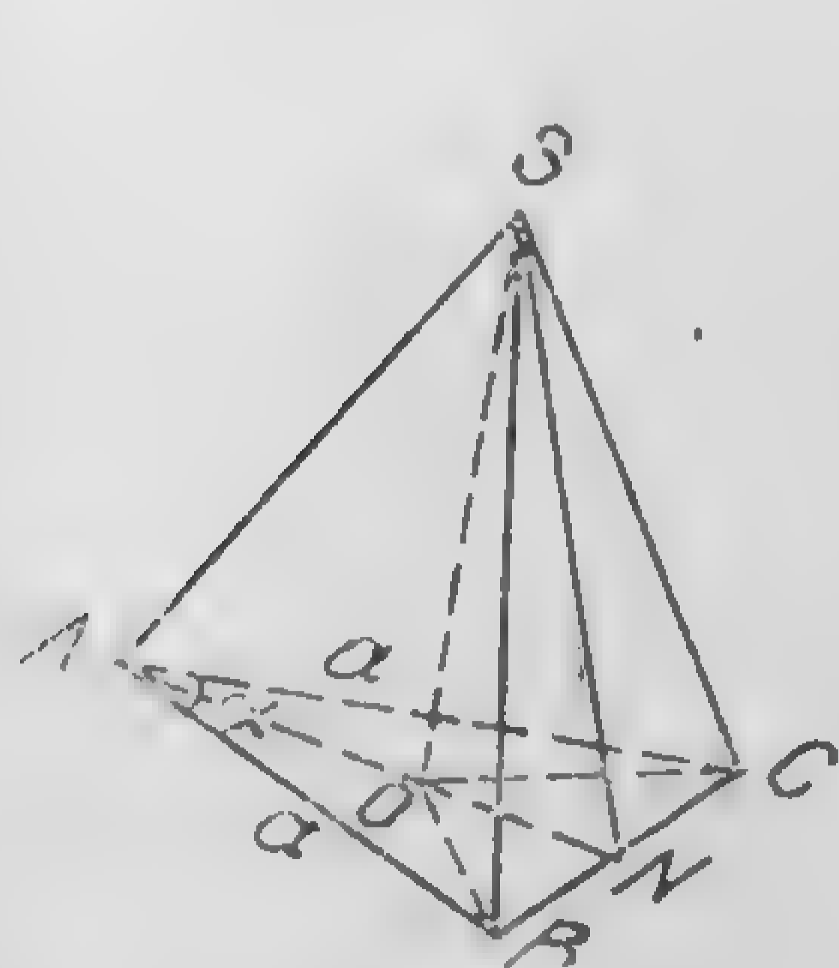
$$a = 2R\cos\frac{\alpha}{2},\ R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\triangle ASO\text{-дан: } SO = AO\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

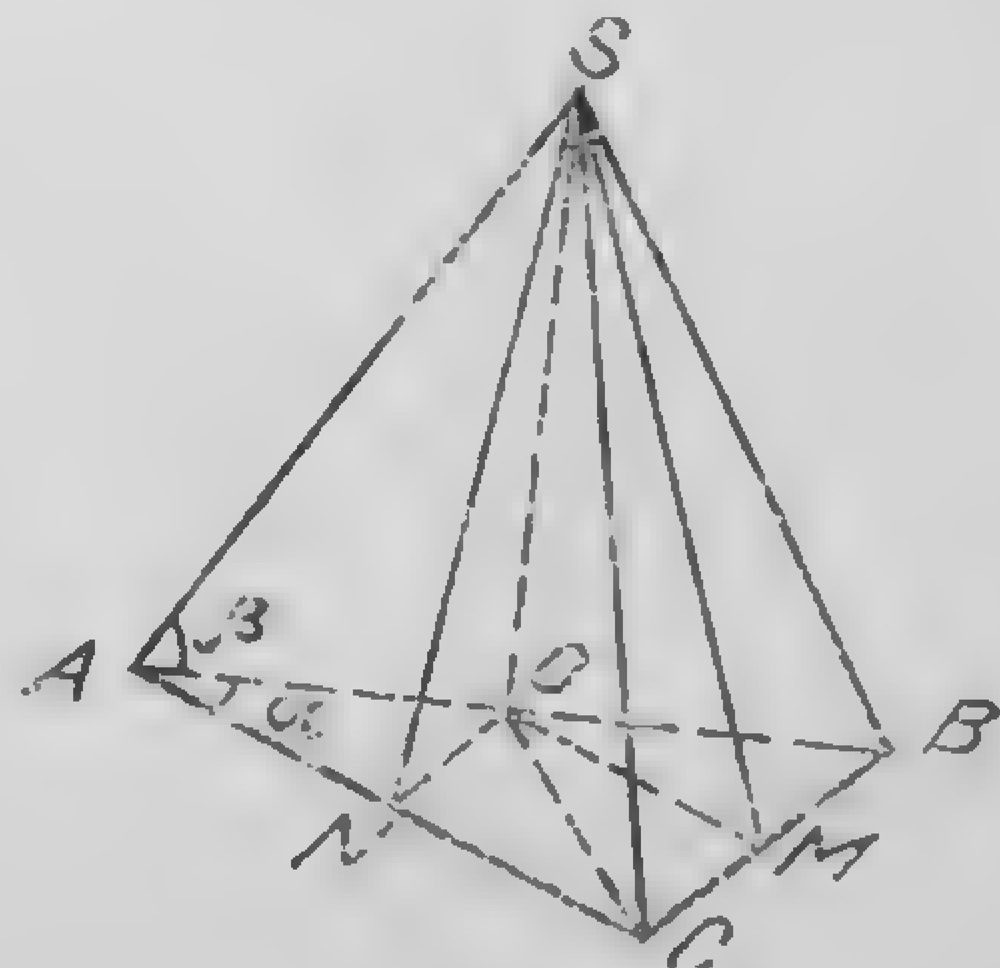
Кәсијин саһәси:

$$S_{ASN} = \frac{1}{2}AN\cdot SO = \frac{1}{2}a\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4}\mathrm{tg}\,\beta.$$

73. Пирамиданын һүндүрлүјүнүн, отурачағы һипотенузун орта нөгтәси үзәринә дүшүр. Бу нөгтә отурачаг харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзи олур (72-чи мәсәләјә бах). S вә O нөгтәләри ASB үзүнүн нөгтәләри олдуғу үчүн, һүндүрлүк һәмин үзүн үзәринә дүшүр (шәкил 68). AO, OB, OC парчалары ујғун олараг AS, BS вә SC тилләринин пројексијасыдыр. Проједсијалар бәрабәр олдуғу үчүн $AS = BS = SC$. Демәли, јан үзләр бәрабәрјанлы үчбучаглардыр.



Шәкил 67



Шәкил 68

$\triangle ABC$-дән: $BC = AB\sin\alpha = C\sin\alpha$, $AC = c\cos\alpha$, $\triangle ASO$-дан:

$$SO = AO\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{C}{2}\mathrm{tg}\,\beta.\ V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}AC\cdot BC\right)\cdot SO = \frac{c^3\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{24}.$$

$\angle ASB = \theta$, $\angle BSC = \theta_2$, $\angle ASC = \theta_3$ олсун. $\triangle ASB$-дә: $\angle SAB = \angle SBA = \beta$, $\angle\theta_1 = 180° - 2\beta$, $AS = \frac{AO}{\cos\beta} = \frac{C}{2\cos\beta}$.

$$\triangle BSC\text{-дә: } \sin\frac{\theta_2}{2} = \frac{BM}{SB} = \frac{c\sin\alpha}{2}\cdot\frac{2\cos\beta}{c} = \sin\alpha\sin\beta,\ \theta_2 = 2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta).$$

$$\triangle ANS\text{-дән: } \sin\frac{\theta_3}{2} = \frac{AN}{AS} = \frac{\frac{1}{2}AC}{AS} = \frac{c\cos\alpha}{2}\cdot\frac{2\cos\beta}{c} = \cos\alpha\cos\beta,$$

$\theta_3 = 2\arcsin(\cos\alpha\cos\beta)$.

74. SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 69). Јан тилләр отурачагла ејни бучаг әмәлә кәтирдијиндән пирамиданын һүндүрлүјү отурачағын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир. $AN\perp BC$ чәкәк. SCE ахтарылан кәсикдир. $\angle BAC = 180° - 2\alpha$. AOC үчбучағында: $AO = OC = R$, $\angle ACE = \angle OAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 90° - \alpha$. Онда $\angle AEC = 180° - (180° - 2\alpha + 90° - \alpha) = 3\alpha - 90°$.

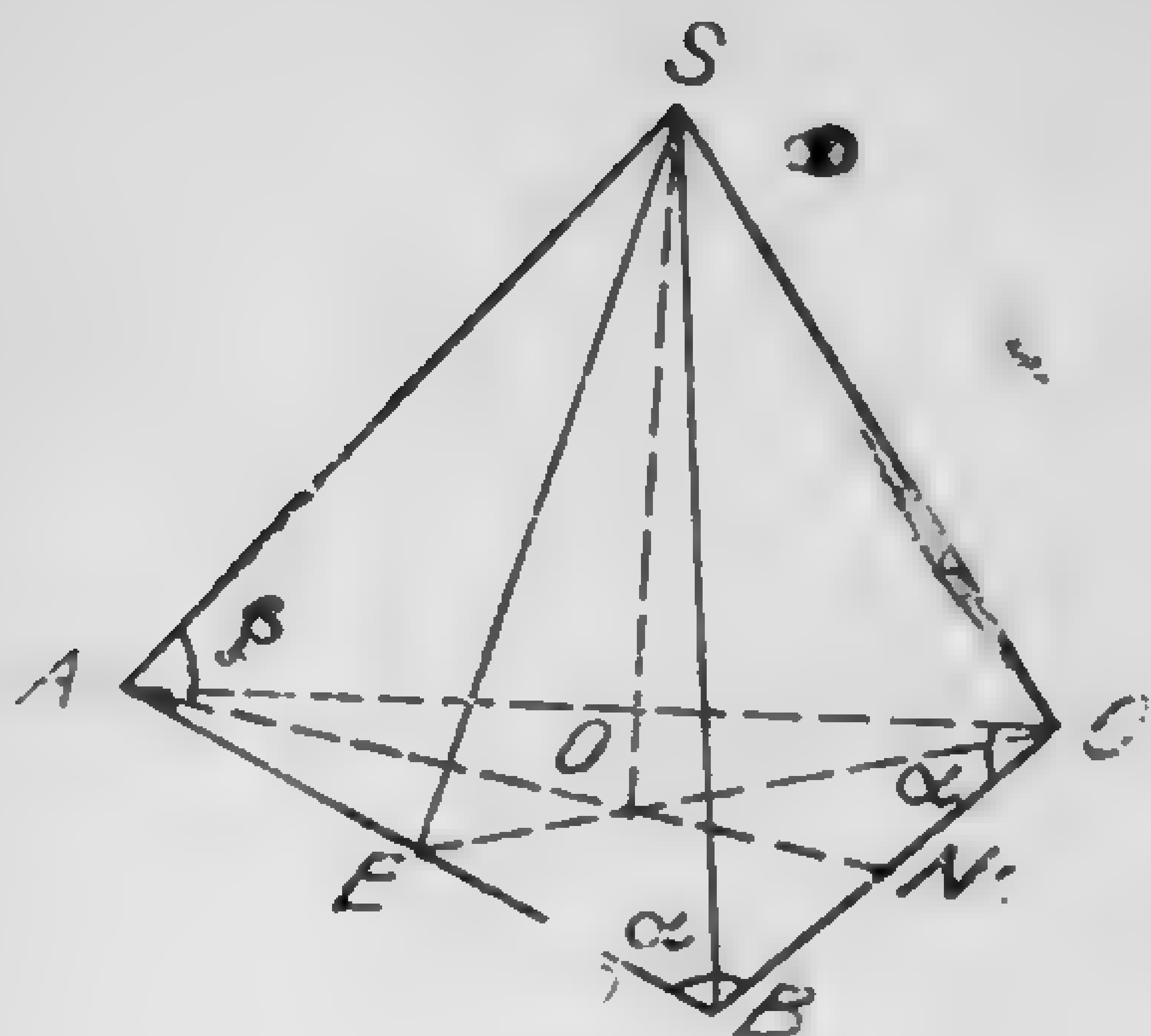
Синуслар теореминә көрә $\frac{CE}{\sin(180°-2\alpha)} = \frac{AC}{\sin(3\alpha - 90°)}$ вә ја

$$\frac{CE}{\sin2\alpha} = \frac{a}{\sin(3\alpha - 90°)},\ CE = \frac{a\sin2\alpha}{\sin(3\alpha - 90°)},$$

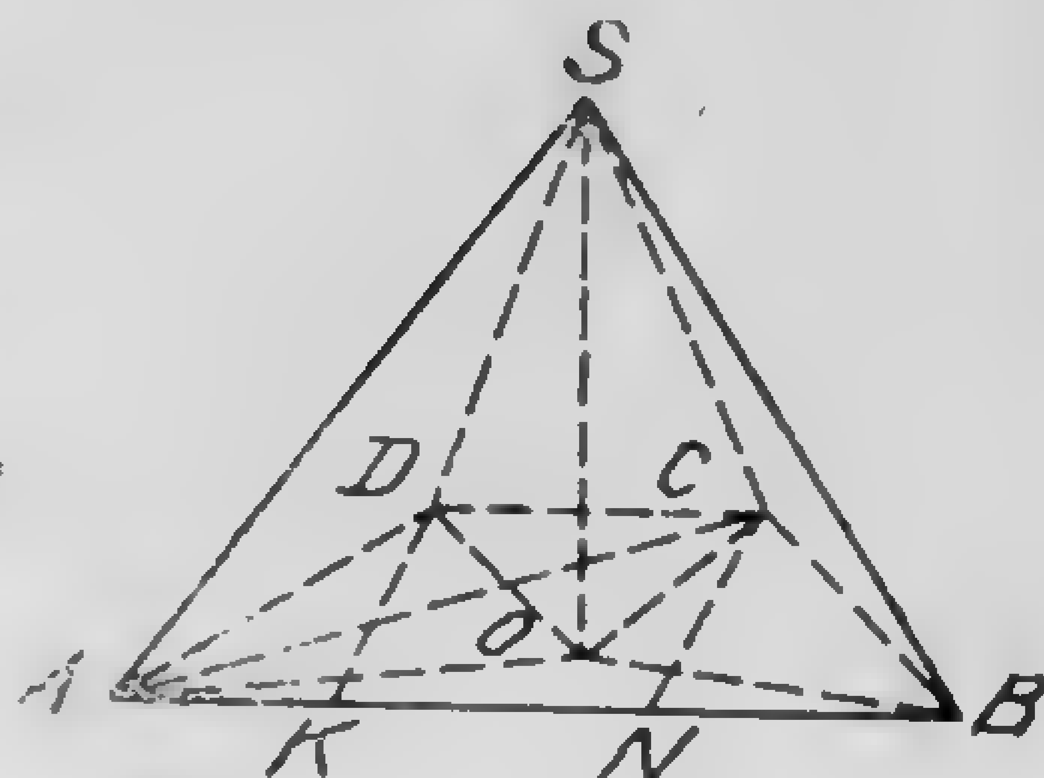
ABC үчбучағында: $AC = 2R\sin\alpha$, $a = 2R\sin\alpha$, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

ASO үчбучағында: $SO = AO\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\sin\alpha}$. Кәсијин саһәси:

$$S = \frac{1}{2}CE\cdot SO = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin2\alpha}{\sin(3\alpha - 90°)}\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin\alpha} = \frac{a^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\sin(3\alpha - 90°)}.$$



Шәкил 69



Шәкил 70

75. $SABCD$ пирамидасында отурачаг бәрабәрјанлы трапесиіјадыр. $AD = DC = BC = a$, $\angle DAB = \alpha$, $\angle SAO = \beta$ (шәкил 70). Пирамиданын һүндүрлүјү отурачағын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечәчәкдир. $\angle CAB = \angle ACD$ олур (паралел дүз хәтләрин чарпаз бучаглары олдуғу үчүн). ADC үчбучағында $AD = DC$ олдуғу үчүн $\angle CAD = \angle ACD$ олачагдыр. $\angle CAB = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle ACD$ олдуғундан $\angle CAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\alpha$ олур. $DK \perp AB$, $CN \perp AB$ чәкәк. ADK үчбучағында: $DK = AD\sin\alpha = a\sin\alpha$, $AK = AD\cos\alpha = a\cos\alpha$, $AB = AK + KN + BN = 2AK + DC = 2a\cos\alpha + a$.

$$S_{от} = \frac{AB + CD}{2}\cdot DK = \frac{a + 2a\cos\alpha + a}{2}\cdot a\sin\alpha = a^2(1+\cos\alpha)\times$$

$$\times\sin\alpha = 2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$\triangle ACD$-дән: $DC = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, $R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

SOD үчбучағында: $SO = R\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3}a^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\times$$

$$\times 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

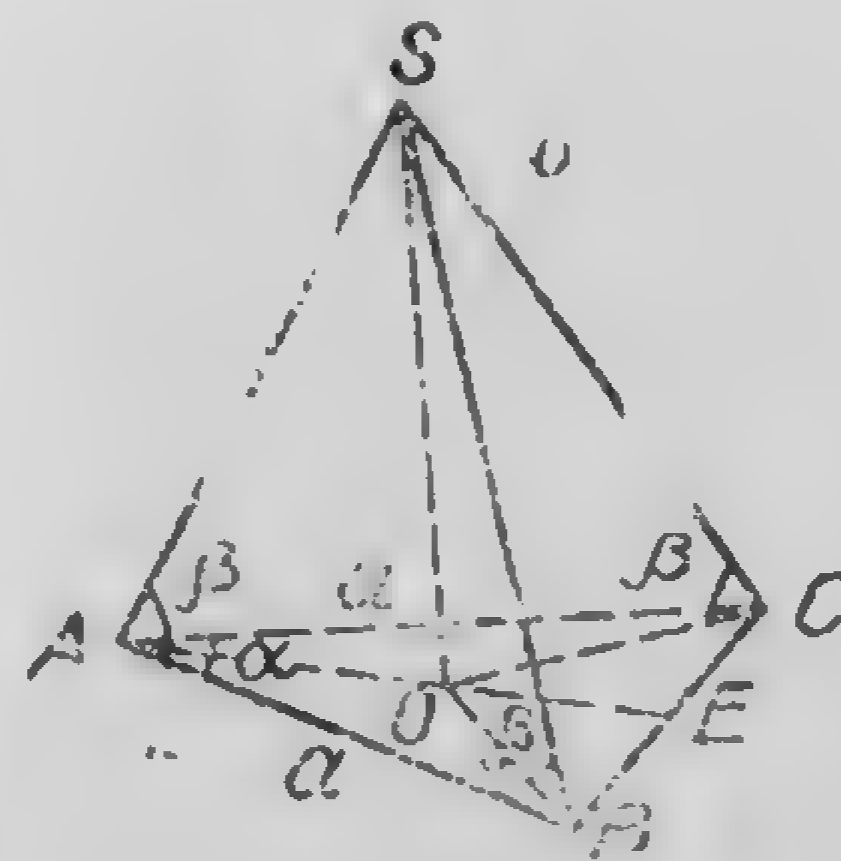
76. $S_{от} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$ (шәкил 71).

AOB-дән: $\frac{AO}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{\sin(180^\circ-\alpha)}$, $AO = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$.

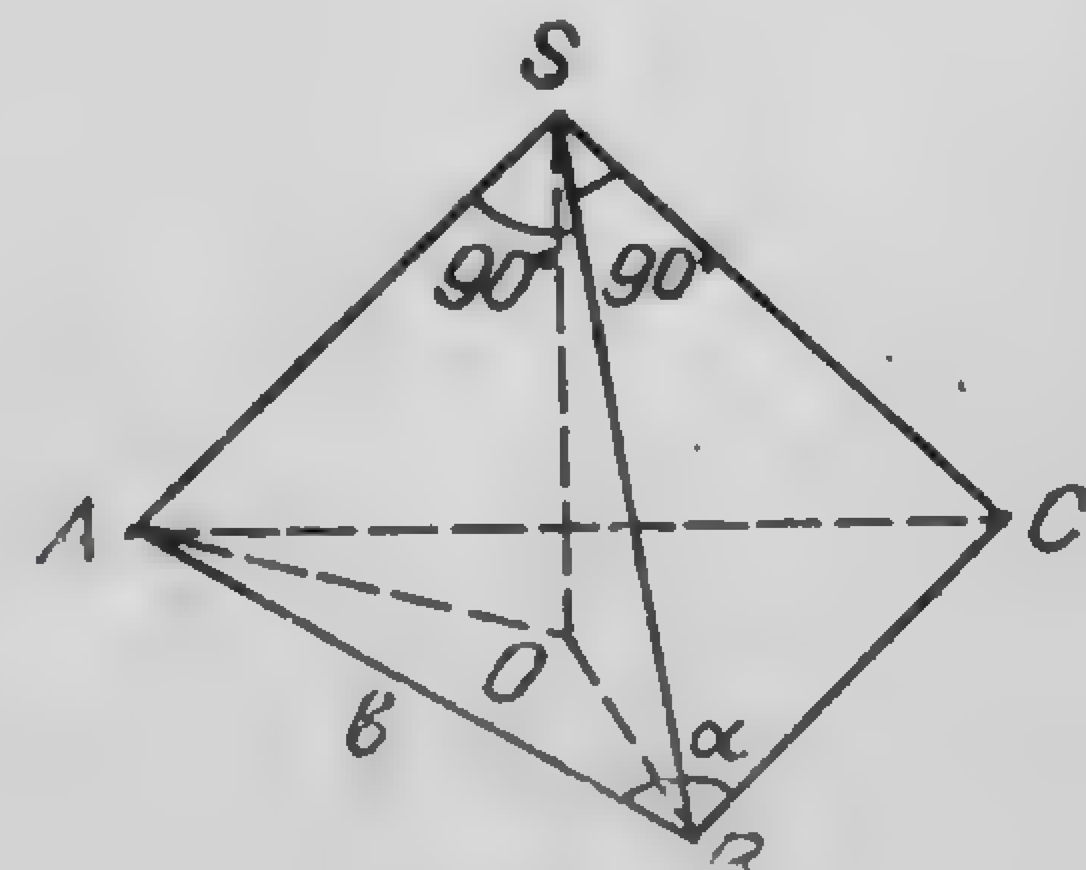
$\triangle ASO$-дан: $SO = AO\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha}$.

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha} = \frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}{6}.$$

77. $SABC$ верилмиш пирамидадыр. ASB вә SBC бәрабәрјанлы дүзбучаглы үчбучаглардыр. $\angle ASB = \angle BSC = 90^\circ$, $AB = BC = b$, $\angle ABC = \alpha$ (шәкил 72). Пирамиданын бүтүн јан тилләри бир-биринә бәрабәр олур. $\triangle ABC$-дән: $\angle BAC = \angle BCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABC = \alpha$, $AB = BC$,



Шәкил 71



Шәкил 72

193—7

$AB = 2R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$, $b = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, бурадан $OB = R = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ (бурада R отурачағын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусудур).

ASB-дән: $AS = SB$, $AS^2 + SB^2 = AB^2$, $SB = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

$$S_{от} = \frac{1}{2} AB\cdot BC\sin\alpha = \frac{1}{2} b^2\sin\alpha.$$

$\triangle SOB$-дән: $SO^2 = SB^2 - OB^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 =$

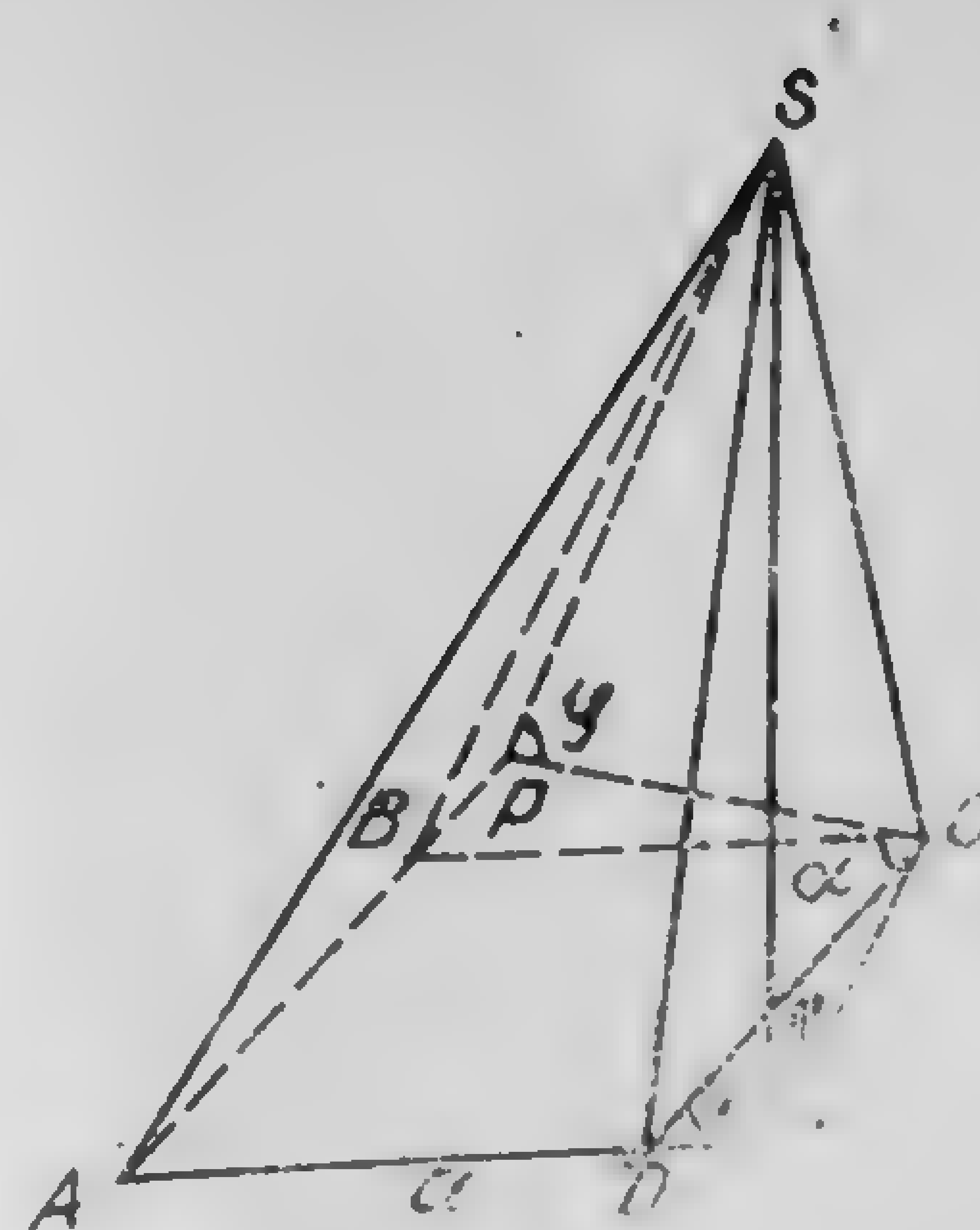
$$= \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = b^2\,\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2\cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$SO = \frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

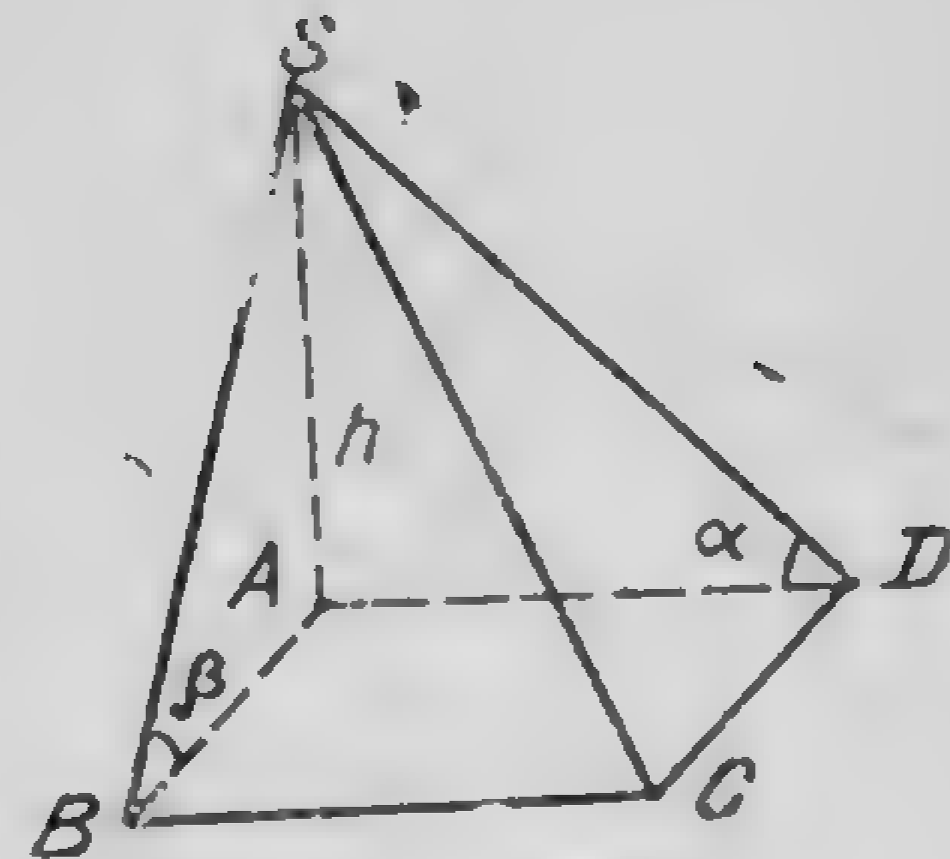
Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin\alpha\cdot\frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

78. Бир мүстәвијә ($ABCD$) (шәкил 73), перпендикулјар олан ики мүстәвинин (SCD вә SCB) кәсишмә хәтти һәмин мүстәвијә перпендикулјар олдуғундан SC тили пирамиданын һүндүрлүјү олачагдыр. $\triangle SDC = \triangle SBC$ (дүзбучаглы үчбучагларда $DC = BC$, SC — орта тәрәфдир). $\triangle ASD = \triangle ASB$ ($SD = SB$, $AD = AB$ вә SA ортаг тәрәф олдуғуна көрә). C нөгтәсиндән AD-нин узантысына CK перпендикулјары ендирәк вә S илә K нөгтәсини бирләшдирәк. CK парчасы SK-нын пројексијасыдыр вә үч перпендикулјар теореминә



Шәкил 73



Шәкил 74

көрә $SK \perp AK$ олмалыдыр. $\angle SKC = \varphi$ бучағы SAD үзүнүн вә һәмин гајда илә $\angle SPC = \varphi$ бучағы SAB үзүнүн отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучагдыр.

$\triangle DCK$-дан: $CK = CD\sin\alpha = a\sin\alpha$.

$\triangle KSC$-дән: $SK = \frac{CK}{\cos\varphi} = \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}$, $SC = CK\operatorname{tg}\varphi = a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi$ вә $SK = SP$ олдуғундан:

$$S_{јан} = \frac{1}{2}CD\cdot SC + \frac{1}{2}BC\cdot SC + \frac{1}{2}AD\cdot SK + \frac{1}{2}\times$$

$$\times AB\cdot SP = \frac{1}{2}a(SC + SC + SK + SP) = a(SC + SK) =$$

$$= a^2\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right).$$

79. SA тили бир мүстәвијә перпендикулјар олан ики мүстәвинин кәсишмә хәтти олдуғу үчүн отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар, јә'ни пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 74).

Демәли, SA верилән һүндүрлүк, $\angle SBA = \beta$ вә $\angle SDA = \alpha$.

Дүзбучаглы үчбучаглардан $AB = CD = h\operatorname{ctg}\beta$ вә

$AD = BC = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $SB = \frac{h}{\sin\beta}$, $CD = \frac{h}{\sin\alpha}$ тапарыг. CD тәрәфи SD тилинин DA проjексиjасына перпендикулjар олдуғу үчүн $CD \perp SD$, аналожи оларағ $BC \perp SB$ олачагдыр.

$$S_{\text{јан}} = \frac{1}{2}(AB\cdot h + AD\cdot h + DC\cdot SD + BC\cdot SB) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(h^2\mathrm{ctg}\,\beta + h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha + h\,\mathrm{ctg}\,\beta\cdot\frac{h}{\sin\alpha} + h\,\mathrm{ctg}\,\alpha\frac{h}{\sin\beta}\right) =$$

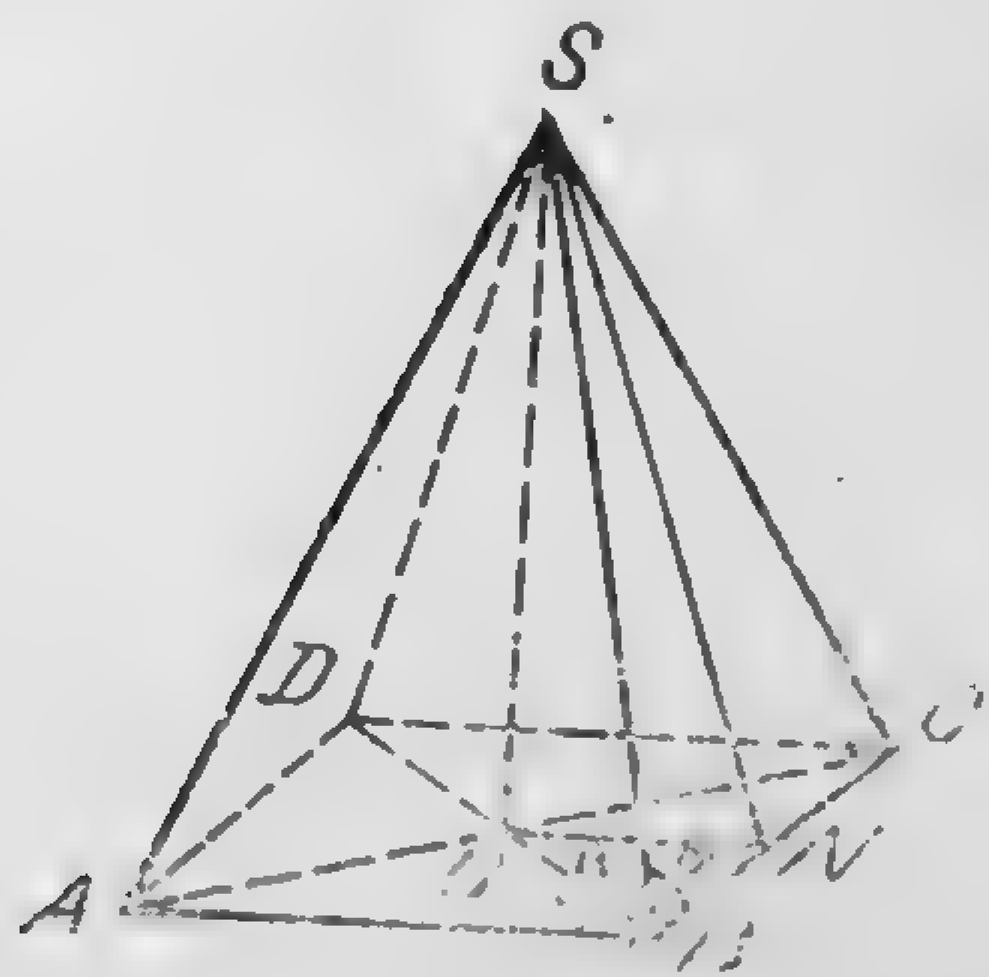
$$= \frac{2h^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

80. Јан тилләр бәрабәр олдуғундан һүндүрлүк, пирамиданын отурачаг харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзинә, јә'ни дүзбучаглынын диагоналларынын кәсишмә нөгтәсинә дүшәчәкдир (шәкил 75).

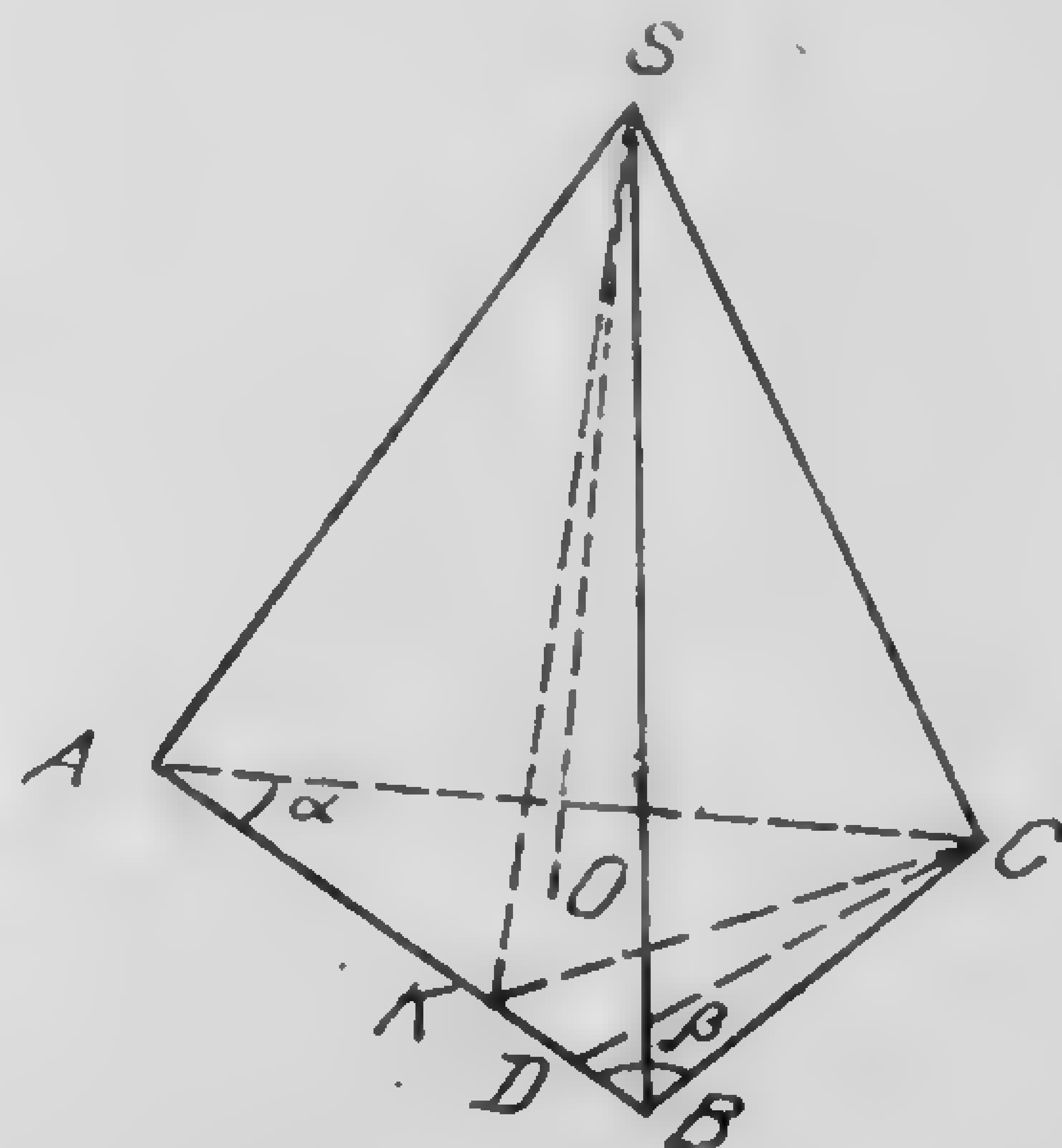
$\triangle ASB$-дән: $\angle ABS = \angle SAB = \beta$, $\angle ASB = 180^\circ - 2\beta$,

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ-2\beta)} = \frac{AS}{\sin\beta},\quad AB = \frac{AS\sin2\beta}{\sin\beta} = \frac{2m\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} =$$

$= 2m\cos\beta$; $\angle SBC = \alpha$. $ON \perp BC$ чәксәк, $ON = m\cos\beta$.



Шәкил 75



Шәкил 76

$\triangle SBN$-дән: $SN = SB\sin\alpha = m\sin\alpha$, $BN = SB\cos\alpha = m\cos\alpha$. $BC = 2BN = 2m\cos\alpha$. $SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} =$

$$= \sqrt{(m\sin\alpha)^2 - (m\cos\beta)^2} = m\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

$$V = \frac{1}{3}BC\cdot AB\cdot SO = \frac{4}{3}m^3\cos\alpha\cos\beta\times$$

$$\times\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

81. $SABC$ пирамидасында $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, пирамиданын һәчми V олсун, CK тәнбөләндир. $SACK$— пирамидасынын (шәкил 76) һәчмини V_1, $SCBK$ пирамидасынын һәчмини исә V_2 илә ишарә едәк. CD отурачағын һүндүрлүјүдүр. Онда $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AK\cdot CD\cdot SO$,

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BK\cdot CD\cdot SO,\quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{AK}{BK}.$$

CK тәнбөлән олдуғундан $\frac{AK}{BK} = \frac{AC}{BC}$ олар. Синуслар теореминә көрә $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}$, $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Бурадан $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $V_2 = \frac{V_1\sin\alpha}{\sin\beta}$, $V_1 + \frac{V_1\sin\alpha}{\sin\beta} = V$, $V_1\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) =$

$$= V,\quad V_1 = \frac{V\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

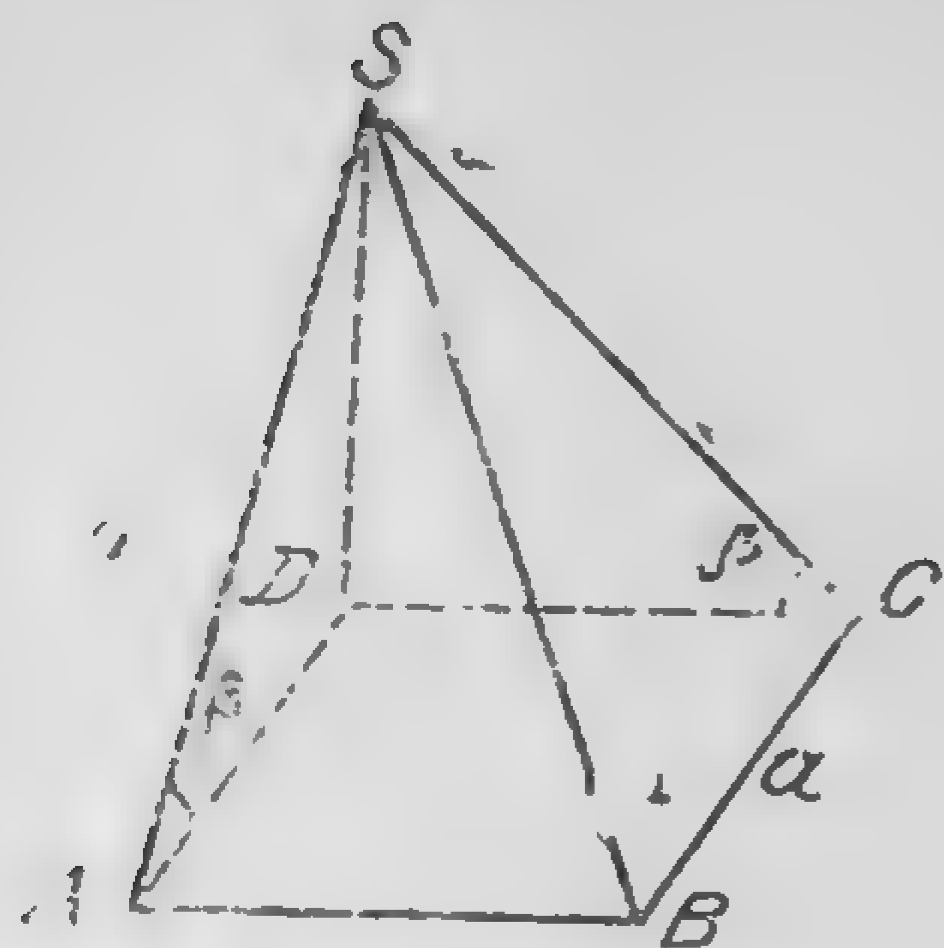
Аналожи оларағ $V_2 = \frac{V\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ тапылыр.

82. ASD вә SDC үзләри отурачаг мүстәвисинә перпендикулjар олдуғундан SD тили пирамиданын һүндүрлүјүдүр. $DC \perp BC$ олдуғундан $SC \perp BC$. $\angle SCD = \beta$ вә $\angle SAD = \beta$ верилмиш бучаглар олачагдыр (шәкил 77). $\triangle SAD = \triangle SDC$ (катетләрә бәрабәр олдуғундан). Демәли, $SA = SC$. Пирамиданын там сәтһи:

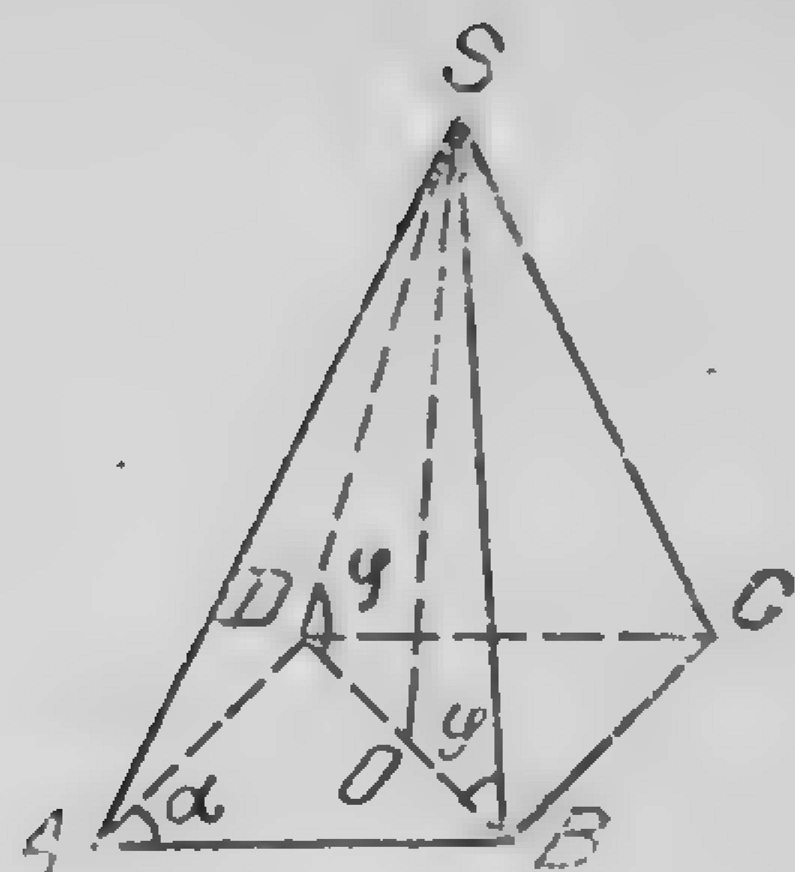
$$S_{\text{т}} = AD^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}AD\cdot SD\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}AB\cdot AS\right) =$$

$$= AD^2 + AD\cdot SD + AB\cdot AS.$$

$\triangle ASD$-дән: $SD = AD\,\mathrm{tg}\alpha = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $AS = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$.



Шәкил 77



Шәкил 78

Бурадан

$$S_т = a^2 + a\cdot a\,\mathrm{tg}\,\alpha + a\cdot\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\,a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

83. $ABCD$ паралелограмдыр (шәкил 78), $SB\perp BC$, $SD\perp AD$, $\angle SBO=\angle SDO=\varphi$, $S_{ABCD}=S$, $\angle BAD=\alpha$.

Пирамиданын SO һүндүрлүјүнү чәкәк. $OB\perp BC$, $OD\perp AD$ олачаг. $BC\parallel AD$ олдуғу үчүн OB вә OD парчалары бир дүз хәтт үзәриндәдир јә'ни BD диагоналдыр. Демәли, ABD вә BDC дүзбучаглы үчбучаглардыр.

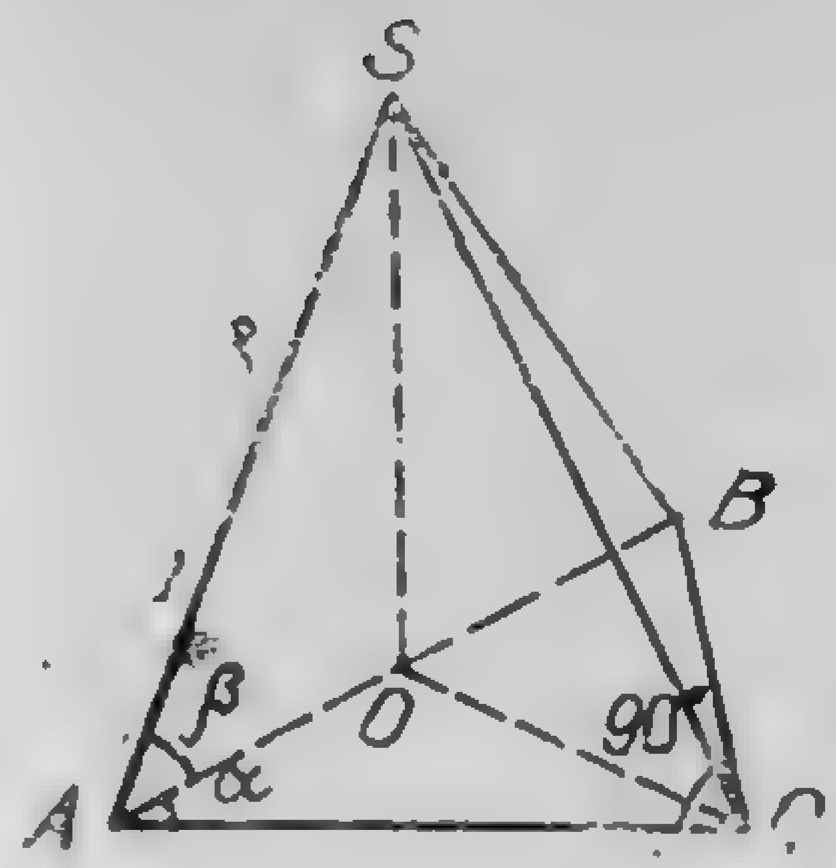
$\angle SBO=\angle SDO$ олдуғу үчүн SBD бәрабәрјанлы үчбучагдыр. Онун SO һүндүрлүјү һәм дә медиандыр, јә'ни $OD=\frac{1}{2}BD$ олсун. $BD=x$ олсун. $\triangle ABD$-дән: $AD=BD\,\mathrm{ctg}\,\alpha=x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, паралелограмын саһәси мә'лумдур ки, $S=BD\cdot AD=x\cdot x\,\mathrm{ctg}\,\alpha=x^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $x=\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

Бурадан $OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. $\triangle SDO$-дан: $SO=$

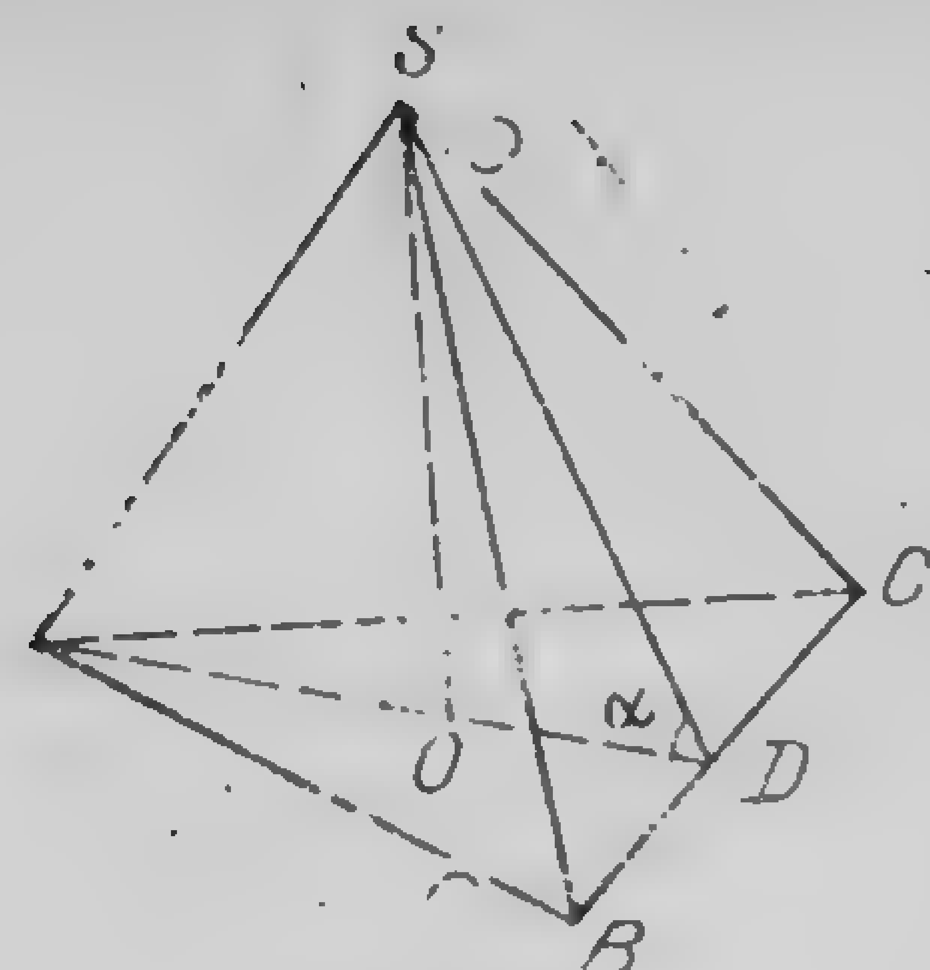
$$=OD\,\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}\cdot\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{S}{6}\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

84. Пирамиданын бүтүн јан тилләри бәрабәр олдуғундан, онун һүндүрлүјү отурачағын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзинә, јә'ни һипотенузун орта нөг-



Шәкил 79



Шәкил 80

тәси үзәринә дүшәчәкдир. S вә O нөгтәләри (шәкил 79) ASB үзүнүн нөгтәләри олдуғу үчүн, һүндүрлүк һәмин үзүн үзәринә дүшәчәкдир.

$\triangle SOC$-дән: $SO=SC\sin\beta=b\sin\beta$, $OC=SC\cos\beta=b\cos\beta$. AOC үчбучағында: $AO=OC$ олдуғундан $\angle OAC=\angle OCA=\alpha$, $\angle AOC=180^\circ-2\alpha$, $\frac{AC}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{OC}{\sin\alpha}$.

$AC=\frac{OC\sin2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b\sin2\alpha\cos\beta}{\sin\alpha}$. $\triangle ABC$-дән: $\angle ABC=90^\circ-\alpha$. BOC үчбучағында $OB=OC$ олдуғуна көрә $\angle OBC=\angle OCB=90^\circ-\alpha$, $\angle BOC=180^\circ-2(90^\circ-\alpha)=2\alpha$.

$$\frac{BC}{\sin2\alpha}=\frac{OC}{\sin(90^\circ-\alpha)},\quad BC=\frac{OC\sin2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b\sin2\alpha\cos\beta}{\cos\alpha},$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}AC\cdot BC\right)\cdot SO=\frac{1}{6}b^3\sin2\alpha\sin2\beta\cos\beta.$$

85. Тутаг ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 80). $AD\perp BC$ чәкәк. Онда $\angle SDO=\alpha$ верилмиш бучагдыр. $AB=x$ илә ишарә едәк.

$$AO=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad OD=\frac{1}{2}AC=\frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

$$\triangle SOD\text{-дән: } SD=\frac{OD}{\cos\alpha}=\frac{x}{2\sqrt{3}\cos\alpha},\quad SO=OD\,\mathrm{tg}\,\alpha=$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{3}}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

$$S_{јан}=\frac{1}{2}\cdot3BC\cdot SD=\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}x^2}{4\cos\alpha}.$$

$$S_т = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha} = \frac{x^2\sqrt{3}(\cos\alpha + 1)}{4\cos\alpha} = \frac{x^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}.$$

Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\alpha =$

$$= \frac{x^3\operatorname{tg}\alpha}{24},\quad x^3\operatorname{tg}\alpha = 24V,$$

бурадан $x = \sqrt[3]{\frac{24V}{\operatorname{tg}\alpha}} = 2\sqrt[3]{3V\operatorname{ctg}\alpha}.$

Беләликлә, $S_т = \frac{\left(2\sqrt[3]{3V\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha} =$

$$= \frac{2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{9V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

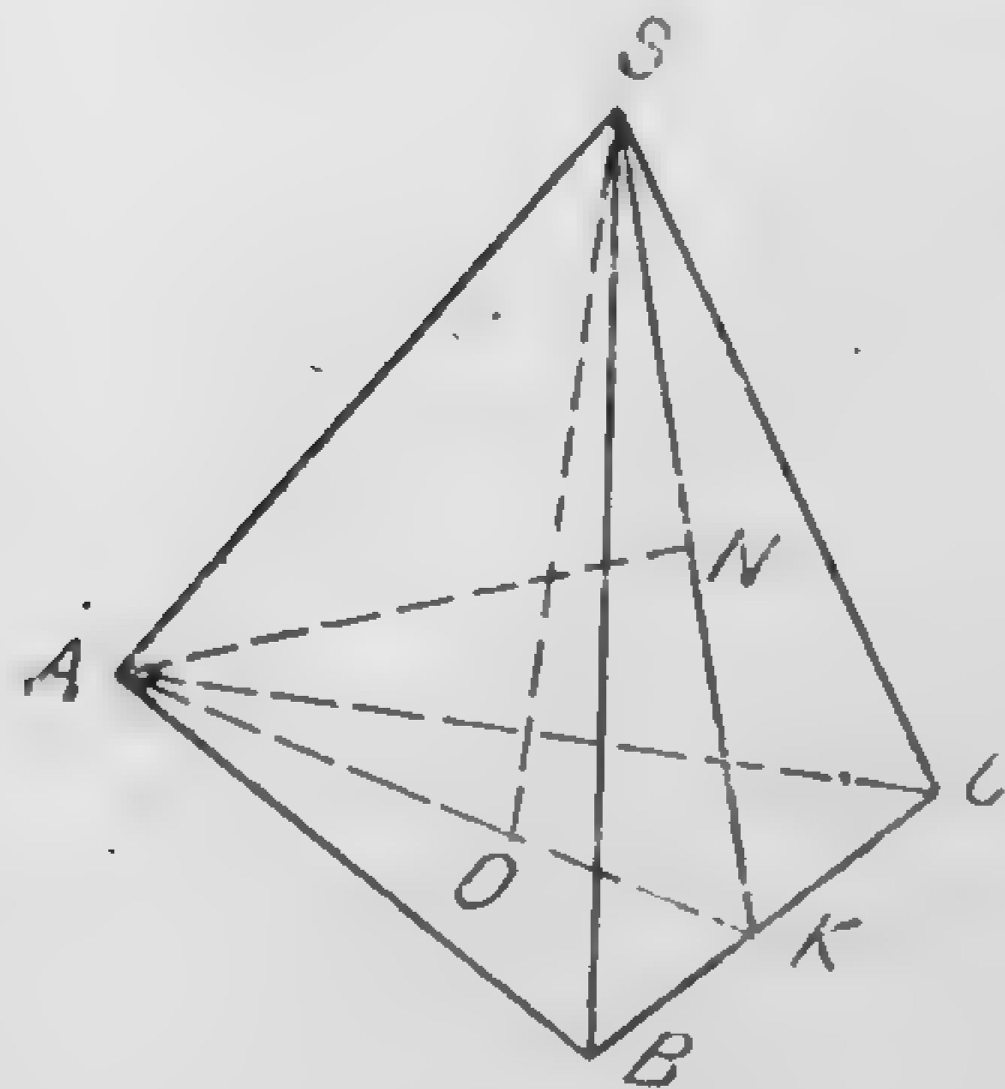
86. Дүзҝүн $SABC$ пирамидасында $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$, $AN = d$ (шәкил 81) верилмишдир. SK апофемини чәкәк.

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot SO. \qquad (1)$$

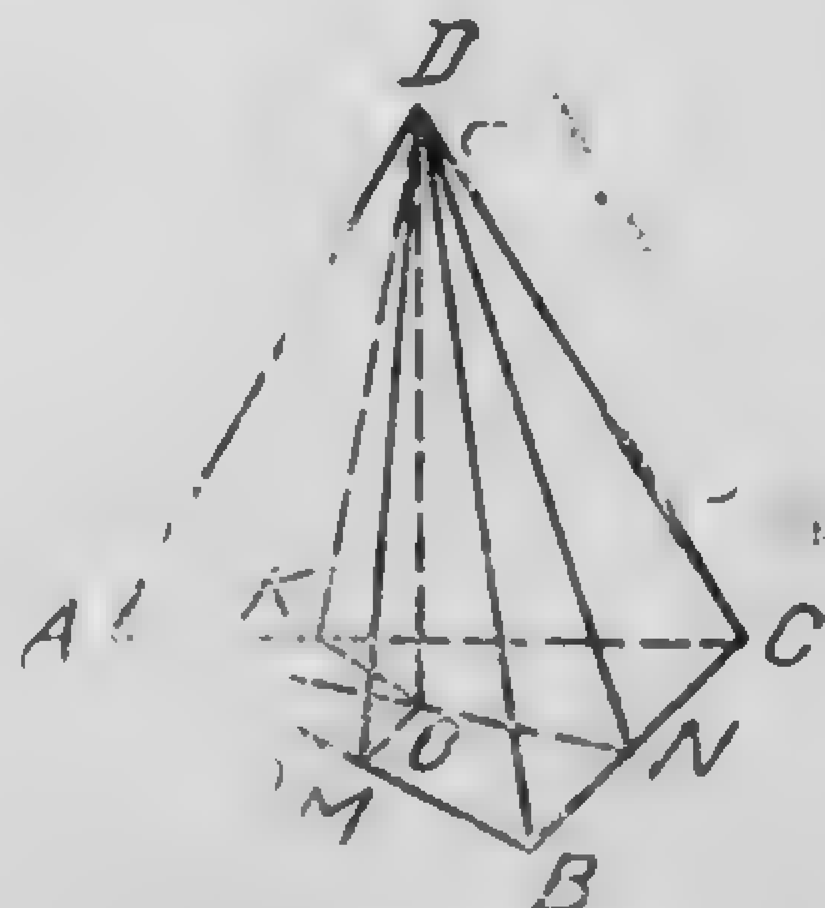
AB вә SO-ну тапаг.

$\triangle SBK$-дан: $SK = BK\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

$\triangle ABK$-дан: $AK = AB\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}AB;\ OK = \frac{AB}{2\sqrt{3}}.$



Шәкил 81



Шәкил 82

$\triangle SOK \backsim \triangle AKN$ олдуғундан $SO : SK = AN : AK$,

бурадан $SO = \frac{d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$ тапылыр.

$\triangle SOK$-дан: $SO^2 = SK^2 - OK^2$, SK вә OK-нын AB илә ифадәсини нәзәрә алыб, садәләшдирсәк,

$$AB^2 = \frac{4d^2}{\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

аларыг. Беләликлә, (1)-дән $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{4d^2}{\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\times$

$$\times\frac{d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

87. Тутаг ки, DO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 82). $ON\perp BC$, $OM\perp AB$ вә $OK\perp AC$ чәкәк. Үч перпендикулјар теореминә ҝөрә $DN\perp BC$, $DM\perp AB$, $DK\perp AC$ олачагдыр. Демәли, DNO, DMO вә DKO отурачаг тилләриндәки икиүзлү бучагларын хәтти бучагларыдыр. DON, DMO вә DOK дүзбучаглы үчбучагларында DO катети ортаг вә ити бучаглары бәрабәр олдуғу үчүн бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, $OM = ON = OK$, $DN = DM = DK$.

Пирамиданын отурачағынын саһәси: $S_{от} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)\cdot ON$, бурадан

$$AB + AC + BC = \frac{2S_{от}}{ON} \qquad (1)$$

Пирамиданын јан сәтһи: $S_{јан} = \frac{1}{2}BC\cdot DN + \frac{1}{2}AB\cdot DM + \frac{1}{2}AC\cdot DK = \frac{1}{2}DN(AB + BC + AC)$, бурадан $AB + AC + BC = \frac{2S_{јан}}{DN}$. Бу бәрабәрликдә (1) бәрабәрлији нәзәрә алсаг:

$\frac{2S_{jan}}{DN} = \frac{2S_{от}}{ON}$ вә ја $S_{jan} = \frac{S_{от} \cdot DN}{ON} = \frac{S_{от}}{\frac{ON}{DN}}$. Лакин DON үч-

бучағында $\frac{ON}{DN} = \cos\alpha$, она көрә $S_{jan} = \frac{S_{от}}{\cos\alpha}$, пирамида-

нын там сәтһи: $S_т = S_{от} + S_{jan} = S_{от} + \frac{S_{от}}{\cos\alpha} = S_{от}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$

$$= \frac{2S_{от}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

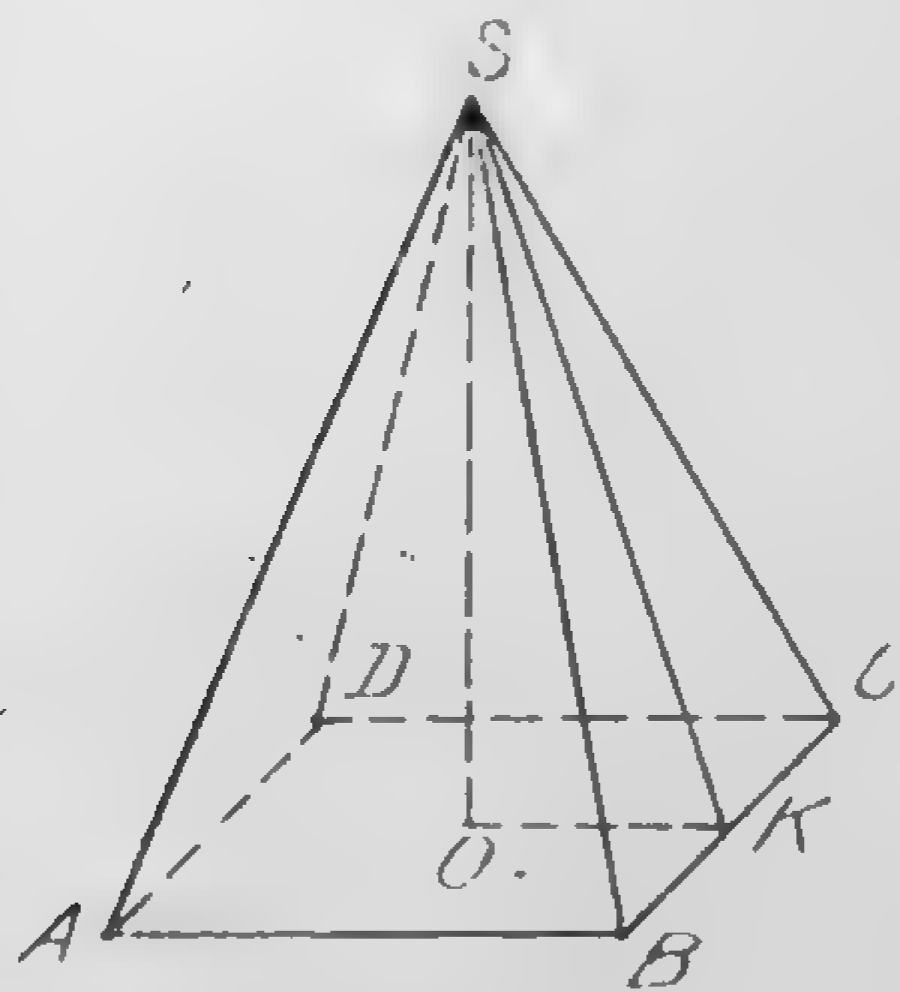
88. $SABCD$ дөрдбучаглы пирамидадыр. $\angle SKO = \varphi$, $\angle BAD = \alpha$ (шәкил 83).

Пирамиданын там сәтһинин саһәси

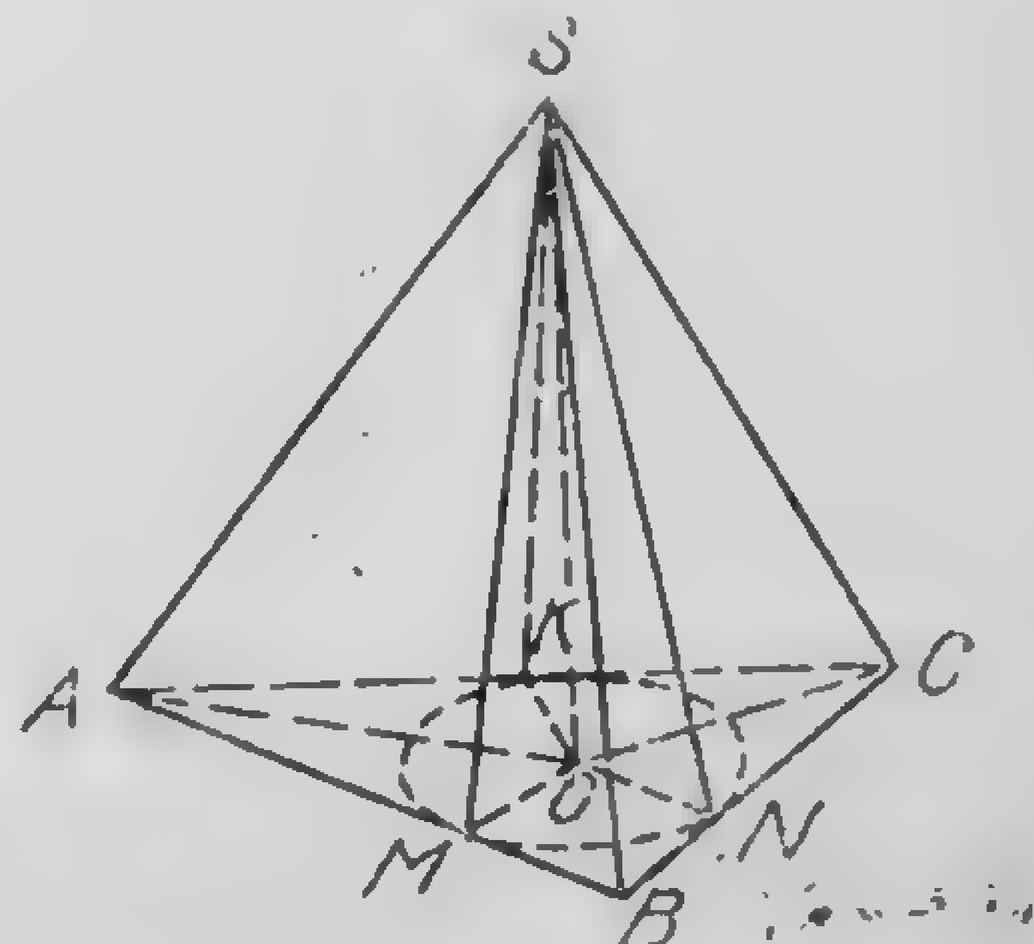
$$S_т = \frac{2S_{от}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},$$

бурада $S_{от} = a^2 \sin\alpha$, онда $S_т = \frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

89. $SABC$ пирамидасында $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $OM = r$, $\angle SMO = \alpha$ (шәкил 84) верилмишдир. $MBNO$ дөрдбучаглысында $\angle OMB = \angle MBN = \angle ONB = 90°$ олдуғу үчүн бу дөрдбучаглы квадратдыр.



Шәкил 83



Шәкил 84

$\triangle AMO$-дан: $AM = OM\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

$$AB = AM + MB = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 1\right) = r\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$\triangle CON$-дән: $CN = ON\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

$$BC = BN + NC = r + r\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= r\left(1 + \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right). \quad S_{от} = \frac{1}{2}BC \cdot AB =$$

$$= \frac{1}{2}r^2\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(1 + \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= r^2\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

$\triangle SOM$-дән: $SO = OM\operatorname{tg}\alpha = r\operatorname{tg}\alpha$.

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{от}\cdot SO = \frac{r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

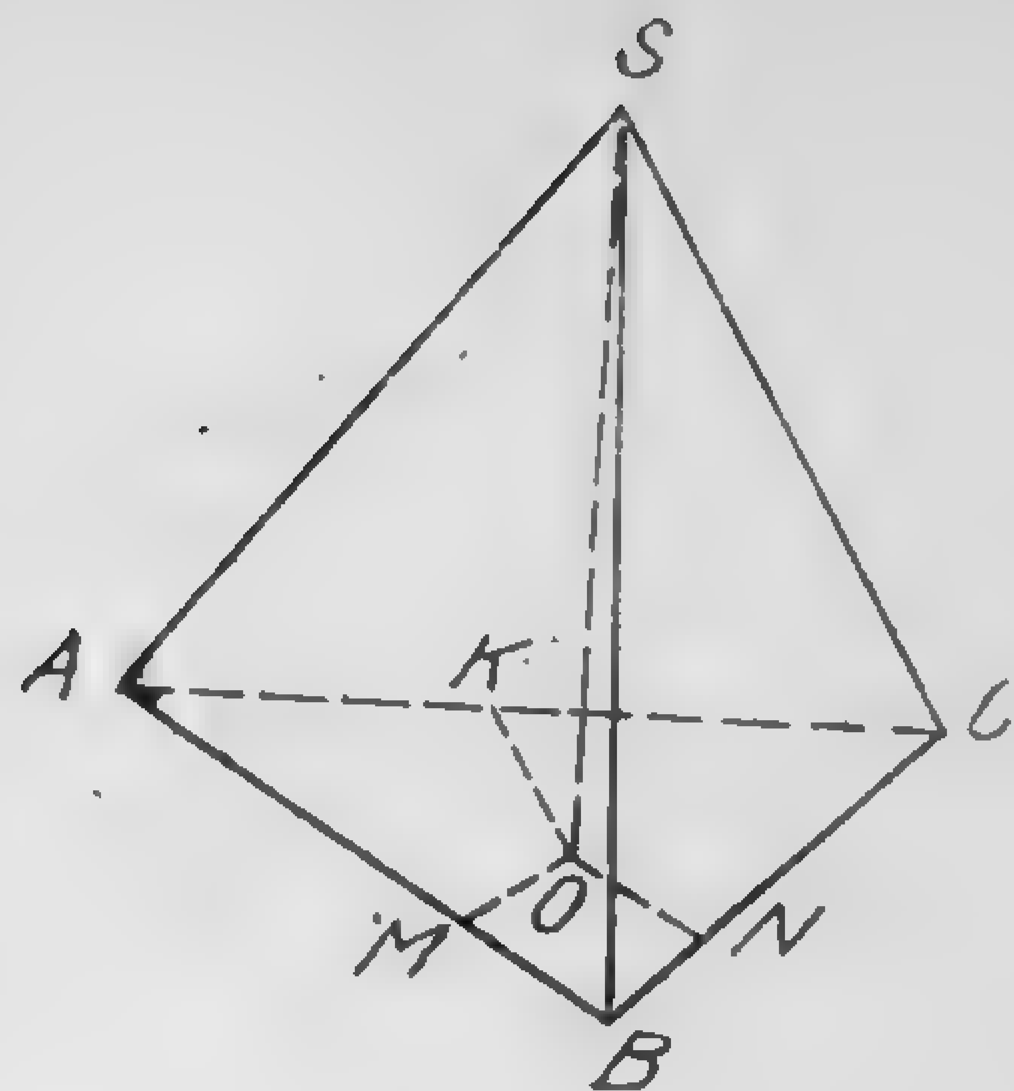
$S_{jan} = \frac{S_{от}}{\cos\alpha}$ вә $S_т = \frac{2S_{от}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$ дүстуруна көрә (87-чи

мәсәләјә бах), $S_{jan} = \frac{r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

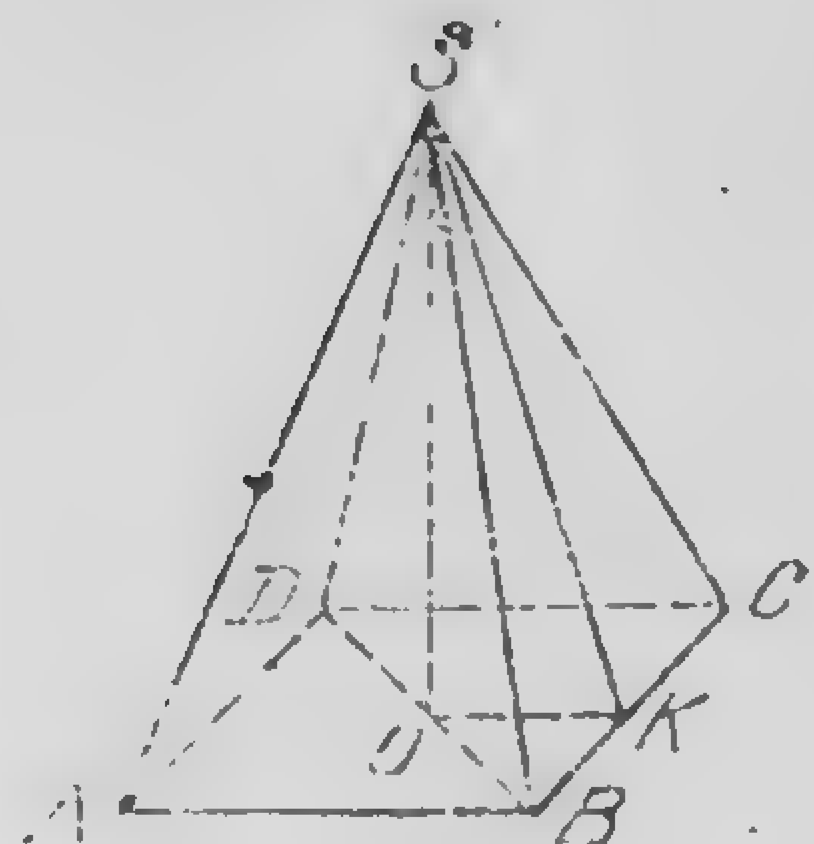
$$S_т = \frac{2r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

90. Фәрз едәк ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 85). Онда $OM = m$, $ON = n$, $OK = p$ олур. ABC үчбучағын тәрәфини a илә ишарә едәк:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a(m + n + p) \qquad (1)$$



Шәкил 85



Шәкил 86

$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\ \text{Бурадан,}\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a(m+n+p)^3}{2},$$

$$a=\frac{2(m+n+p)}{\sqrt{3}}.$$

Дикәр тәрәфдән $S_{ABC}=\frac{1}{2}\ ah$ олдуғундан

$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a(m+n+p),$$

бурадан

$$h=m+n+p.\ V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{\sqrt{3}(m+n+p)^3}{9}.$$

91. Фәрз едәк ки, SK парчасы пирамиданын апофемидир: үч перпендикулјар теореминә әсасән $OK\perp BC$ (шәкил 86). SKO ахтарылан бучагдыр. Ону φ илә ишарә едәк. SOK үчбучағында $SO=SK\cdot\sin\varphi=c\sin\varphi$,

$$OK=SK\cos\varphi=c\cos\varphi.\ AB=2KO=2c\cos\varphi,$$

$$BD=AB\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cos\varphi.$$

$$S_{\triangle SBD}=\frac{1}{2}BD\cdot SO=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}c\cos\varphi\cdot c\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}c^2\sin 2\varphi}{2}.$$

Шәртә көрә $\frac{\sqrt{2}c^2\sin 2\varphi}{2}=p$, бурадан $\varphi=\frac{1}{2}\arcsin\frac{p\sqrt{2}}{c^2}$

$$\text{вә}\ AB=2c\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{p\sqrt{2}}{c^2}\right).$$

92. Фәрз едәк ки, SO (шәкил 87) пирамиданын, SP исә SMN үчбучағынын һүндүрлүјүдүр. Үч перпендикулјар теоремине көрә $OP\perp MN$ олачагдыр. $DK\perp AB$, $DE\parallel BC$ чәкәк. ADE үчбучағында $MF\parallel AE$ олдуғу үчүн $\triangle MDF\sim\triangle ADE$.

Мәсәләнин шәртинә көрә

$$S_{MNCD}=\frac{MN+CD}{2}\cdot DL=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB+CD}{2}\cdot DK=\frac{a+b}{4}\cdot DK$$

$$\text{вә ја}\ \frac{MN+b}{2}\cdot DL=\frac{a+b}{4}\cdot DK,$$

бурадан

$$\frac{DL}{DK}=\frac{a+b}{2MN+b}.\qquad(1)$$

$ADE\sim\triangle MDF$ олдуғу үчүн:

$$\frac{DL}{DK}=\frac{MF}{AE}=\frac{MN-b}{a-b}.$$

Бу бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг, $\frac{MN-b}{a-b}=\frac{a+b}{2(MN+b)}$,

бурадан

$$MN=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ \text{олачагдыр.}$$

$$S_{MNS}=\frac{1}{2}MN\cdot SP=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot SP.$$

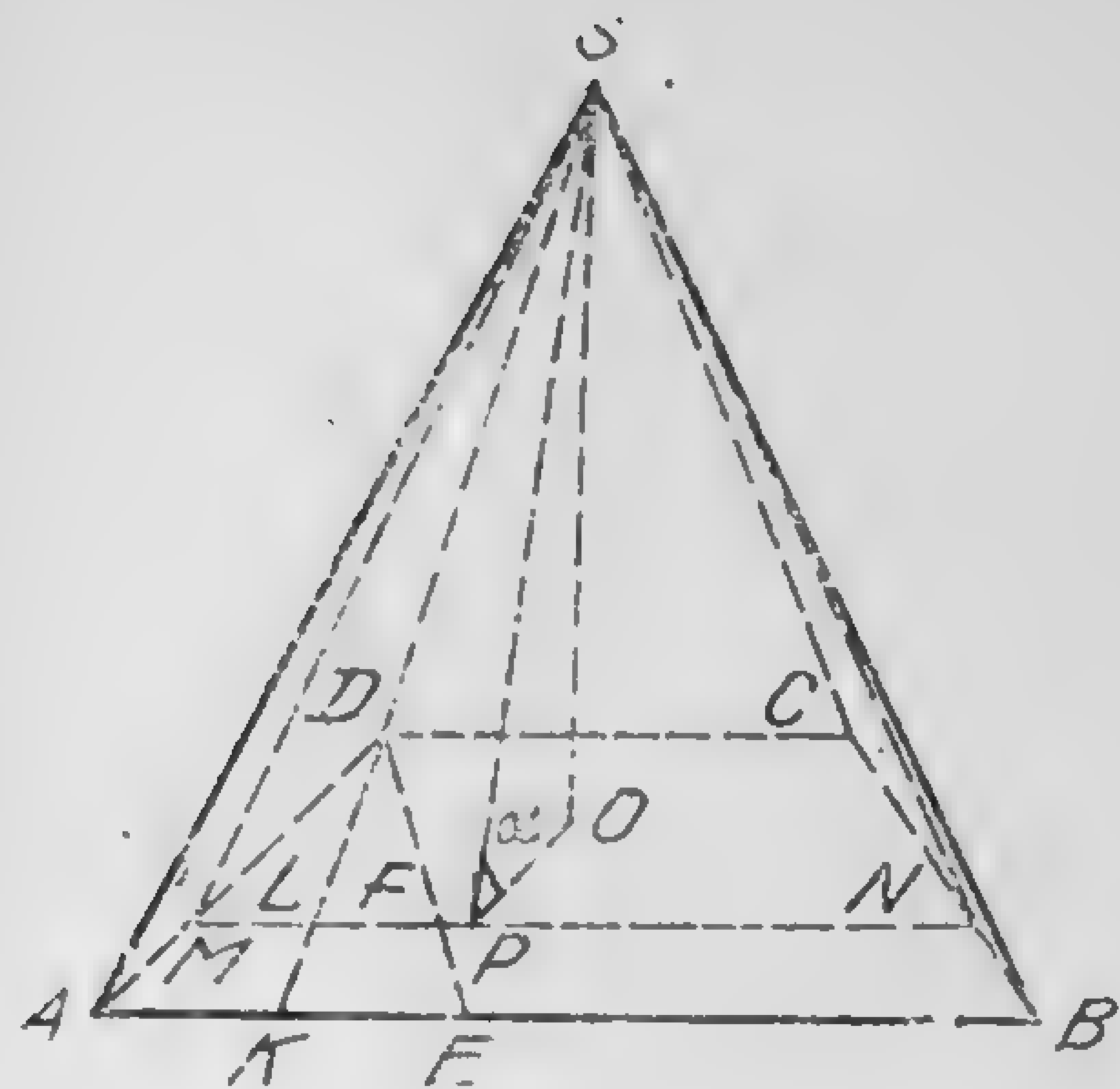
Шәртә көрә $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot SP=S$, бурадан $SP=\frac{2S\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\triangle SPO\text{-дан: } SO=SP\sin\alpha=\frac{2S\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

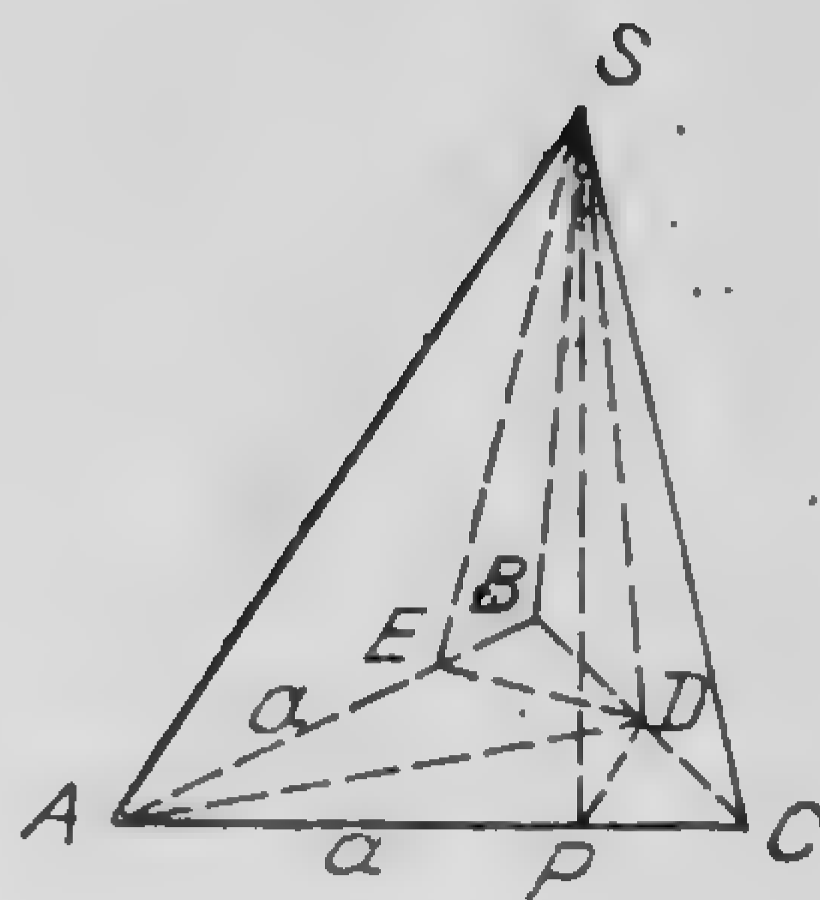
$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{от}}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot DK\cdot SO=\frac{a+b}{6}\cdot SO^2=$$

$$=\frac{a+b}{6}\cdot\left(\frac{2S\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{4(a+b)S^2\sin^2\alpha}{3(a^2+b^2)}.$$

93. SBC үзү отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар олдуғу үчүн пирамиданын һүндүрлүјү һәмин үзүн үзә-



Шәкил 87.



Шәкил 88

ринә дүшәчәкдир (шәкил 88). Фәрз едәк ки, SD пирамиданын һүндүрлүјүдүр. $DE\perp AB$ чәкәк. $SE\perp AB$, $\angle SED = \varphi$ верилмиш бучагдыр. $\triangle SPD=\triangle SDE$ (SD катети ортаг вә $\angle SPD=\angle SED$ олдуғундан). Демәли, $PD=ED$. AD парчасы BAC үчбучағын тәнбөләни, һүндүрлүјү вә ејни заманда медианыдыр.

$$S_{jan}=\frac{1}{2}BC\cdot SD+2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SE=\frac{1}{2}BC\cdot SD+AB\cdot SE.$$

ABC үчбучағында $\angle ACB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, $\frac{AB}{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$

$$=\frac{BC}{\sin\alpha},\quad BC=\frac{AB\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

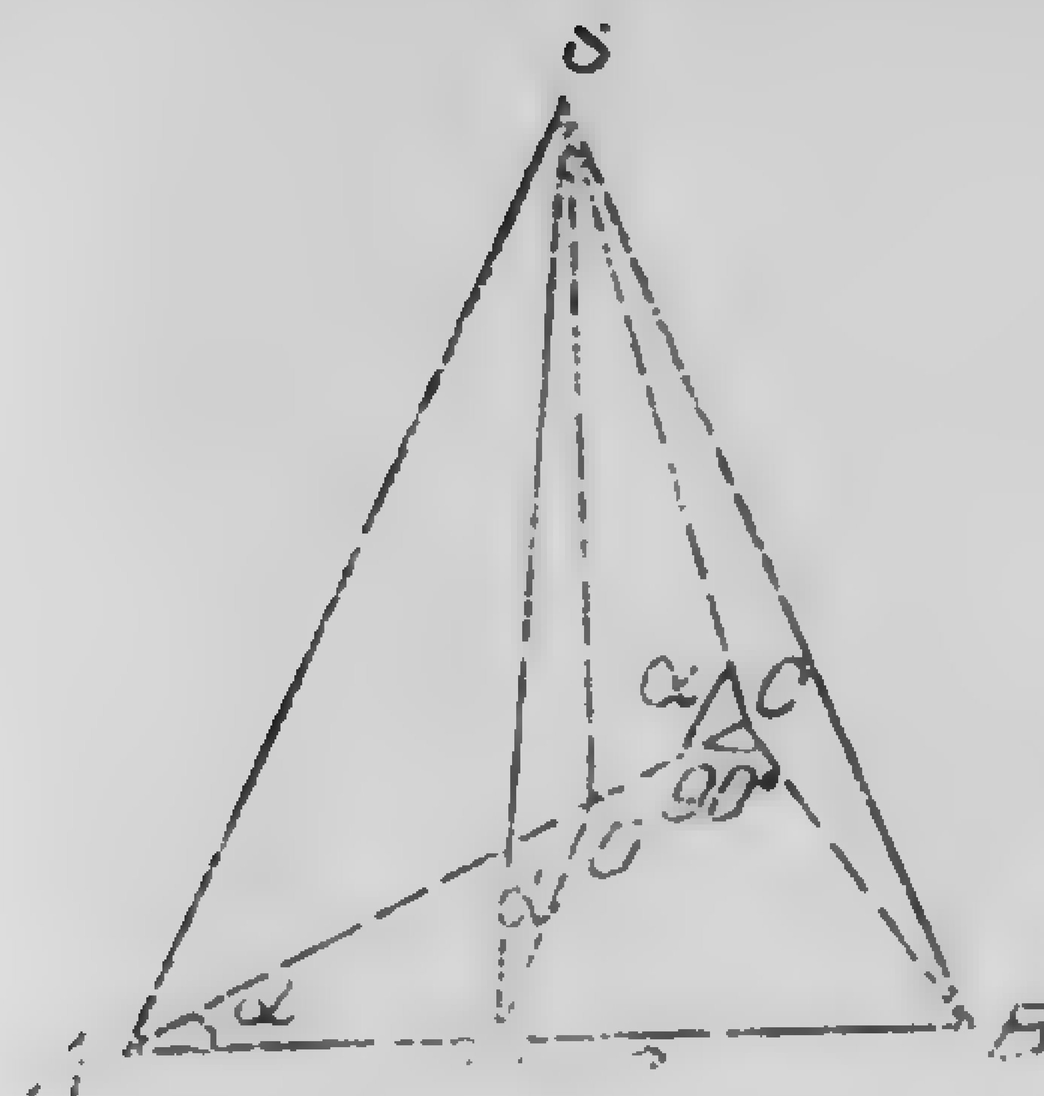
$$\triangle ADB\text{-дән:}\quad AD=AB\cos\frac{\alpha}{2}=a\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\triangle AED\text{-дән:}\ ED=AD\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a\sin\alpha}{2},$$

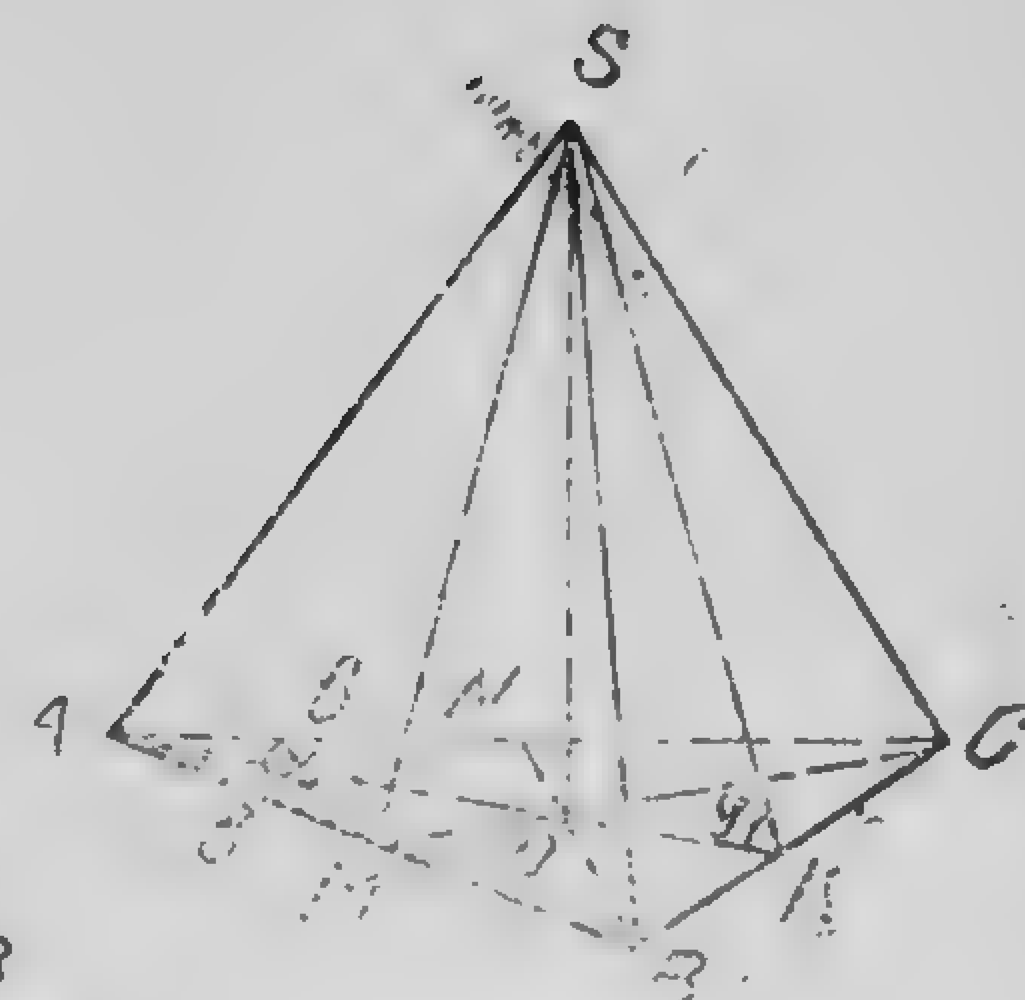
$$\angle SED=\varphi,\quad ES=\frac{ED}{\cos\varphi}=\frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi},$$

$$SD=ED\,\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{a\sin\alpha}{2}\mathrm{tg}\,\varphi.$$

$$S_{jan}=\frac{1}{2}\cdot2a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a\sin\alpha}{2}\mathrm{tg}\,\varphi+a\cdot\frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi}=$$



Шәкил 89



Шәкил 90

$$=\frac{a^2\sin\alpha}{2\cos\varphi}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi+1\right).$$

94. $SABC$ пирамидасында, $\angle CAB=\alpha$, $\angle SMO=\alpha$, $AB=C$. $\triangle SOM=\triangle SOC$ (SO катети ортаг вә $\angle SMO=\angle SCO$). Демәли, $OM=CC$. ABC үчбучағында: (шәкил 89) $BC=c\sin\alpha$, $AC=c\cos\alpha$. AOM үчбучағында:

$$AO=\frac{OM}{\sin\alpha};\quad OC=OM=AC-AO=c\cos\alpha-\frac{OM}{\sin\alpha};$$

$$OM=c\cos\alpha-\frac{OM}{\sin\alpha},$$

$$OM+\frac{OM}{\sin\alpha}=c\cos\alpha,\ \text{бурадан:}\ OM=\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$\triangle SOM\text{-дән:}\ SO=OM\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{c\sin^2\alpha}{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}c\sin\alpha\cdot c\cos\alpha\right)\cdot\frac{c\sin^2\alpha}{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{c^3\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{6}.$$

95. Фәрз едәк ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 90). Онда AO, BO вә CO парчалары ујғун олараг SA, SB вә SC маилләрин проjексиjаларыдыр. $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ вә $SC \perp AB$ олдуғу верилмишдир. Үч перпендикулjарлыг теореминә көрә $AO \perp BC$, $BN \perp AC$ вә $CM \perp AB$. AKC үчбучағында: $\angle ACK = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $CK = b \sin \frac{\alpha}{2}$. ACM үчбучағында: $\angle ACM = 90° - \alpha$; OKC үчбучағында:

$$\angle OCK = \angle ACK - \angle ACM = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - (90° - \alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

$$OK = KC \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = b \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

SKO дүзбучаглы үчбучағындан: $SO = OK \operatorname{tg} \varphi = b \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi$ аларыг.

$$S_{от} = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha \text{ вә } V = \frac{1}{3} b^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

96. Пирамиданын јан тилләри отурачаг мүстәвиси илә ејни бучаглар әмәлә кәтирдији үчүн һүндүрлүк, трапесија харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир. $\angle BCD = \alpha$ верилдијиндән $\angle ADC = 180° - \alpha$ (шәкил 91) олур. BCD үчбучағында $BC = CD$ олдуғуна көрә $\angle BDC = \angle DBC$ вә чарпаз бучаглар олдуғу үчүн $\angle ADB = \angle DBC$, бурада $\angle BDC = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ олур. $CM \perp AD$ чәкәк. $AB = x$ гәбул едәк. $\angle ADB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BAD = 180° - \alpha$,

$$\angle ABD = 180° - \left((180° - \alpha) + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = -\left(90° - \frac{3\alpha}{\alpha}\right),$$

$$\frac{AB}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AD}{\sin -\left(90° - \frac{3\alpha}{2}\right)},$$

$$AB = -\frac{AD \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{3\alpha}{2}} = -\frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{3}{2}\alpha}.$$

Харичә чәкилмиш чеврәнин радиусу, $a = 2R \sin\left(-\left(90° - \frac{3}{2}\alpha\right)\right)$ мүнасибәтиндән $R = -\frac{a}{2\cos \frac{3}{2}\alpha}$.

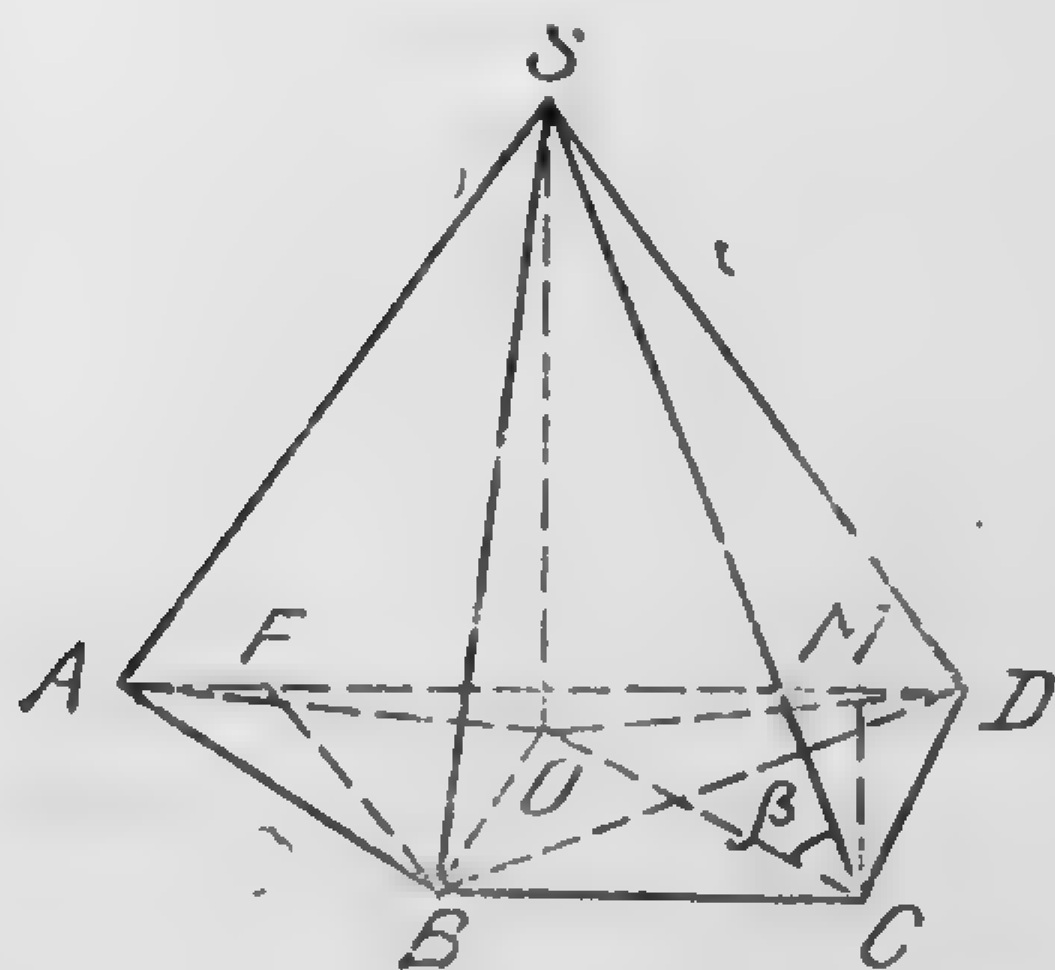
$$\triangle CMD\text{-дән: } CM = CD \sin(180° - \alpha) = AB \sin\alpha = -\frac{a \cos \frac{\alpha}{2} \sin\alpha}{\cos \frac{3}{2}\alpha}.$$

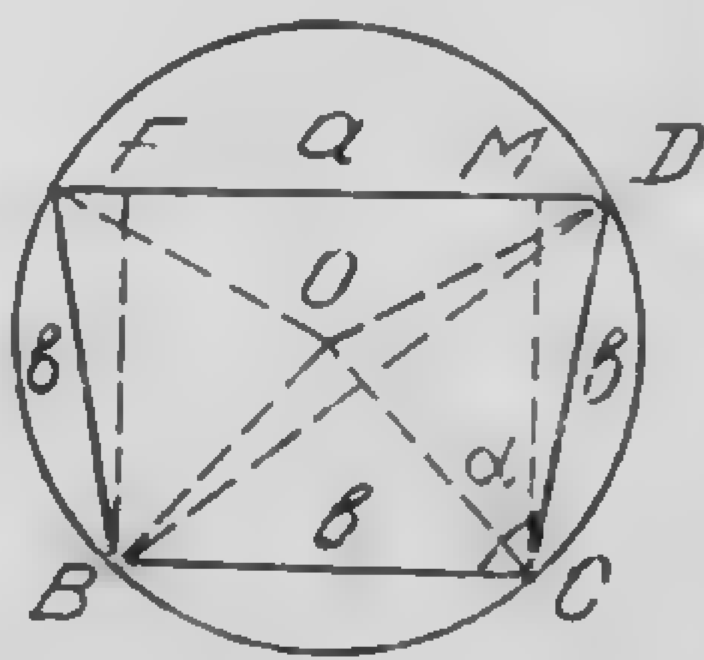
$$\triangle SOA\text{-дан: } SO = AO \operatorname{tg}\beta = R \operatorname{tg}\beta = -\frac{a \operatorname{tg}\beta}{2\cos \frac{3}{2}\alpha}.$$

$$AD + BC = a + \left(-\frac{a\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{3}{2}\alpha}\right) = -\frac{2a \sin\alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{3}{2}\alpha},$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot CM \cdot SO = -\frac{a^3 \sin^3\alpha \operatorname{tg}\beta}{12 \cos^3 \frac{3}{2}\alpha}.$$

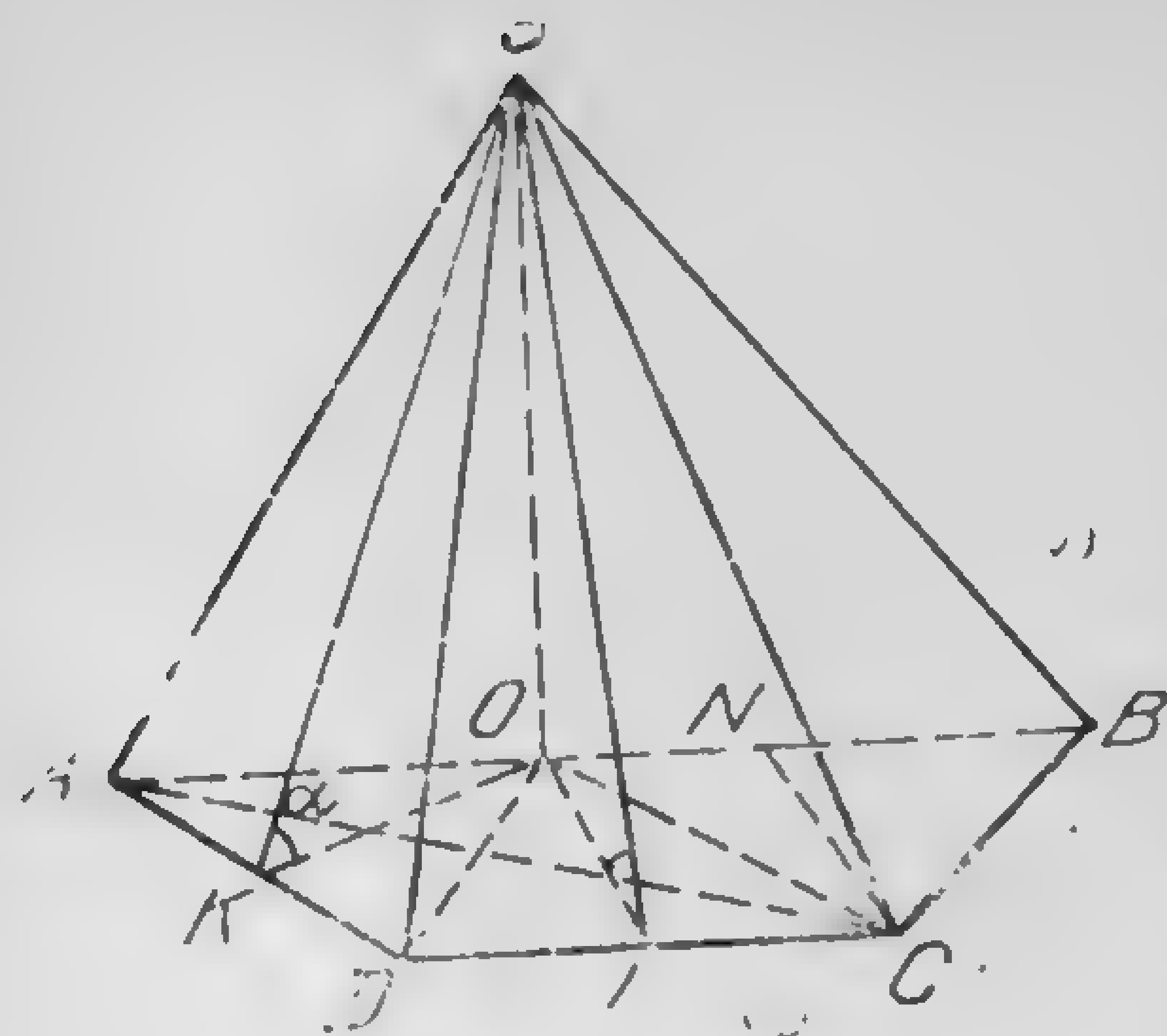
97. Пирамиданын бүтүн јан тилләри бәрабәр олдуғундан һүндүрлүк, пирамиданын отурачағы харичинә





Шәкил 91

193—8



Шәкил 92

чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир (шәкил 92). $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = 90°$, $S_{ASB} = S$, $\angle ASB = 2\alpha$ верилмишдир. $ABCD$ чеврә дахилинә чәкилмиш трапесија олдуғу үчүн бәрабәрјанлыдыр. Онун һәчми ашағыдакы кими јазылыр: $V = \frac{1}{3} \times \frac{AB + DC}{2} \cdot CN \cdot SO$.

$\angle ACB = 90°$ олдуғу үчүн O нөгтәси AB тәрәфинин, јә'ни һипотенузун орта нөгтәси олачагдыр. S вә O нөгтәләри ASB үзүнүн нөгтәләри олдуғу үчүн һүндүрлүк һәмин үзүн үзәринә дүшәчәкдир. $OK \perp AD$ вә $OL \perp DC$ чәкәк, $SK \perp AD$, $SL \perp DC$ олачагдыр. Демәли, SKO вә SLO тәләб олунан бучаглардыр, бунлары φ_1 вә φ_2 илә ишарә едәк.

$AB = a$ гәбул едәк. $\triangle ASB$ бәрабәрјанлыдыр.

$$\angle ASO = \frac{1}{2}\angle ASB = \alpha,\ AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a,$$

$$SO = AO \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$S_{ASB} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2} a \operatorname{ctg}\alpha = S,\ a^2 \operatorname{ctg}\alpha = 4S, \text{ бурадан}$$

$$a = 2\sqrt{S \operatorname{tg}\alpha} \text{ вә } SO = \sqrt{S \operatorname{ctg}\alpha} \text{ тапылыр.}$$

ABC-дән: $\angle CAB = \alpha$, $BC = AB\sin\alpha = a\sin\alpha =$

$= 2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\sin\alpha$, $CN \perp AB$ чәкәк.

$\triangle BCN$-дә: $\angle ABC = 90° - \alpha$, $CN = BC\sin(90° - \alpha) =$

$= 2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\sin 2\alpha$,

$$\angle DAB = \angle ABC = 90° - \alpha,\ \angle CAB = \alpha$$

олдуғу үчүн

$$\angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = (90° - \alpha) - \alpha = 90° - 2\alpha.$$

ADC үчбучағында: $AD = BC = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\sin\alpha$, чарпаз бучаглар олдуғу үчүн $\angle ACD = \angle CAB$. Демәли, $\angle ACD = \alpha$, $\angle DAC = 90° - 2\alpha$,

$$\frac{DC}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{AD}{\sin\alpha},\ DC = 2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\cos 2\alpha.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB + DC}{2} \cdot CN \cdot SO = \frac{\sin^2 2\alpha}{3}\sqrt{S^3 \operatorname{ctg}\alpha},$$

$\triangle ASO$-дан: $SO = AO \operatorname{ctg}\alpha$.

$\triangle AOK$-дан: $\angle KAO = 90° - \alpha$,

$OK = AO\sin(90° - \alpha) = AO\cos\alpha$,

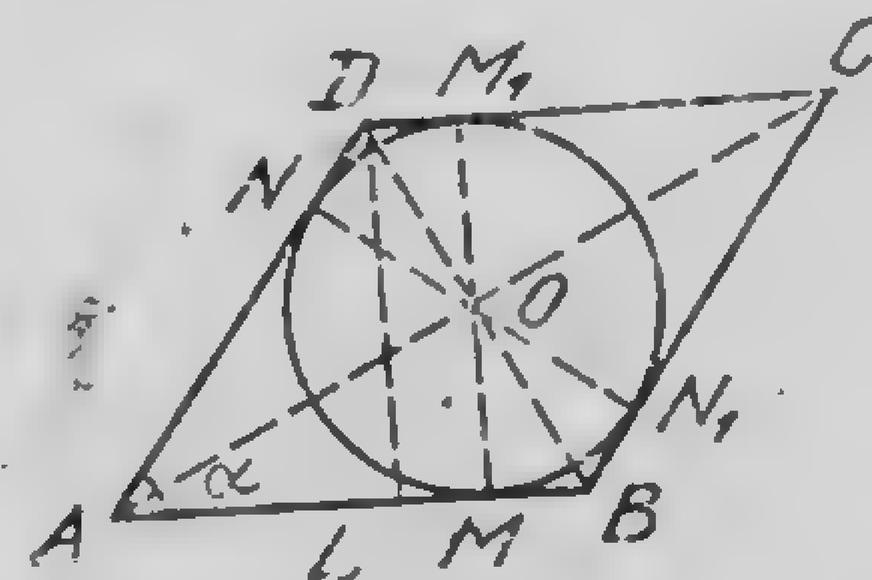
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{SO}{OK} = \frac{AO\operatorname{ctg}\alpha}{AO\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha,\ \varphi_1 = \operatorname{arctg}(\operatorname{cosec}\alpha)$$

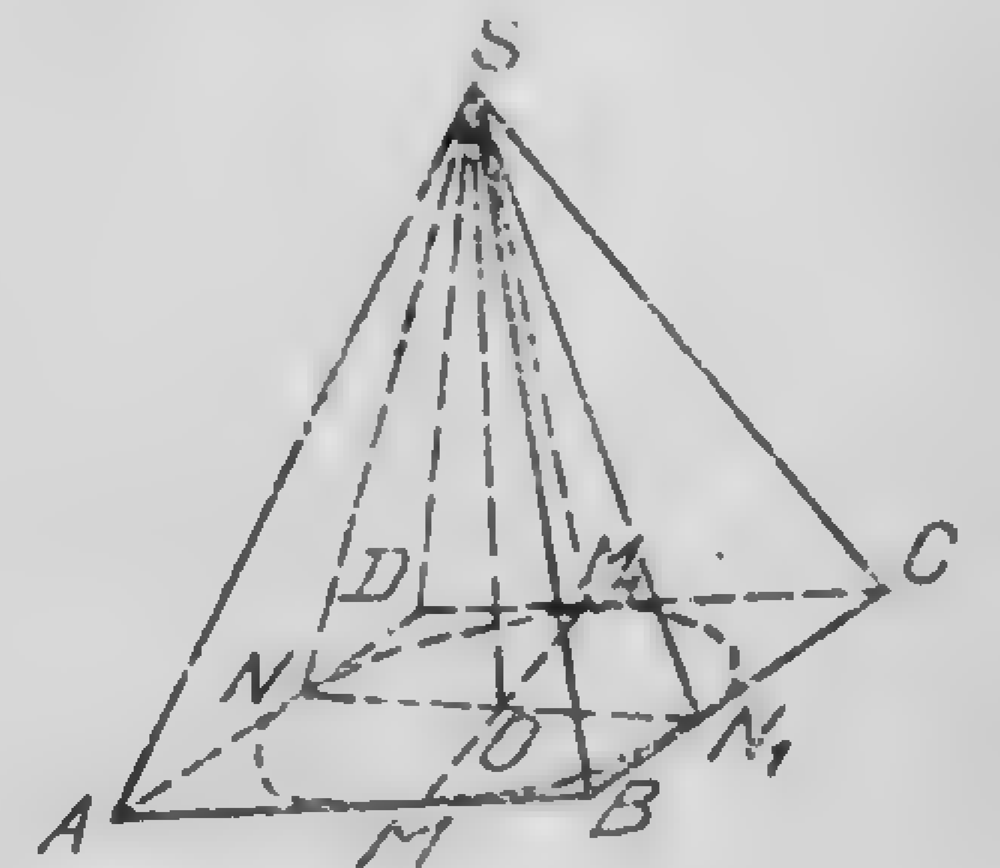
вә $OL = CN$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{SO}{OL}$ мүнасибәтләриндән

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\ \frac{1}{2\sin^2\alpha}) \text{ тапылыр.}$$

98. Фәрз едәк ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 93). Отурачаг тилиндәки бүтүн икиүзлү бучаглар бәрабәр олдуғундан O нөгтәси ромбун дахилинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзи, MM_1 вә NN_1 ромбун һүндүрлүкләри, OM исә бу чеврәнин радиусудур. Онда $MM_1 = 2r$ олур. $DL \perp AB$ чәкәк. MM_1DL паралелограм олдуғу үчүн $DL = MM_1 = 2r$ олур.

SOM үчбучағында $SO = OM\operatorname{tg}\beta = r\operatorname{tg}\beta$,





Шәкил 93

$$SM=\frac{OM}{\cos\beta}=\frac{r}{\cos\beta},$$

ADL үчбучагында: $AD=\frac{DL}{\sin\alpha}=\frac{2r}{\sin\alpha}$.

Пирамиданын һәчми вә там сәтһи: $V=\frac{1}{3}S_{от}\cdot SO$, $S_т=S_{от}+S_{јан}$ дүстурларындан тапылыр. Бурадан

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4r^2}{\sin\alpha}\cdot r\operatorname{tg}\beta=\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha};$$

$$S_т=S_{от}+S_{јан}=AB\cdot DL+\frac{1}{2}\cdot 4AB\cdot SM=$$

$$=AB\cdot DL+2AB\cdot SM=AB(DL+2SM)=$$

$$=\frac{2r}{\sin\alpha}\left(2r+\frac{2r}{\cos\beta}\right)=\frac{4r^2(\cos\beta+1)}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{8r^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

99. Фәрз едәк ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 94). AB тәрәфинин орта нөгтәси N олсун. $\angle SNO=\alpha$, ON илә CD-нин кәсишмә нөгтәси M. Онда $DM=CM$, $OM\perp DC$ вә $SM\perp CD$, $\angle SMO=\beta$ олур. O нөгтәсиндән AD-нин узантысына OK перпендикулјарыны чәкәк вә S илә K нөгтәсини бирләшдирәк.

MN парчасы отурачагын тәрәфинә бәрабәрдир. Отурачағын тәрәфини a илә ишарә едәк. $MN=OM-ON$. SON үчбучағында: $ON=SO\operatorname{ctg}\alpha=H\operatorname{ctg}\alpha$.

Пирамиданын һәчми:

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{от}\cdot SO$$

дүстурундан тапылыр.

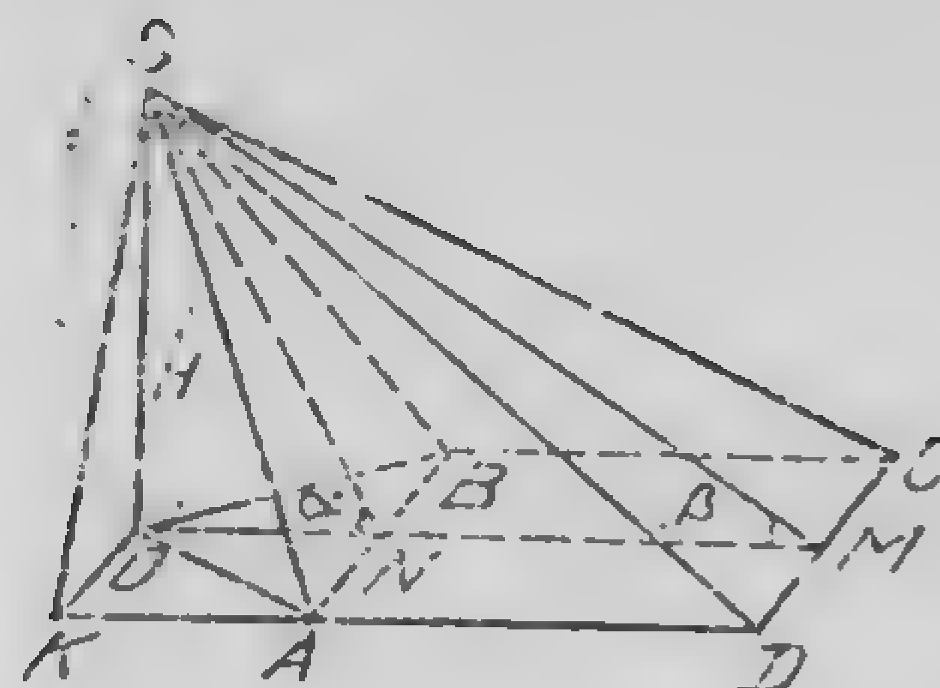
$$\triangle SOM\text{-дән: } OM=SO\operatorname{ctg}\beta=H\operatorname{ctg}\beta,$$

$$MN=a=OM-ON=H\operatorname{ctg}\beta-H\operatorname{ctg}\alpha.$$

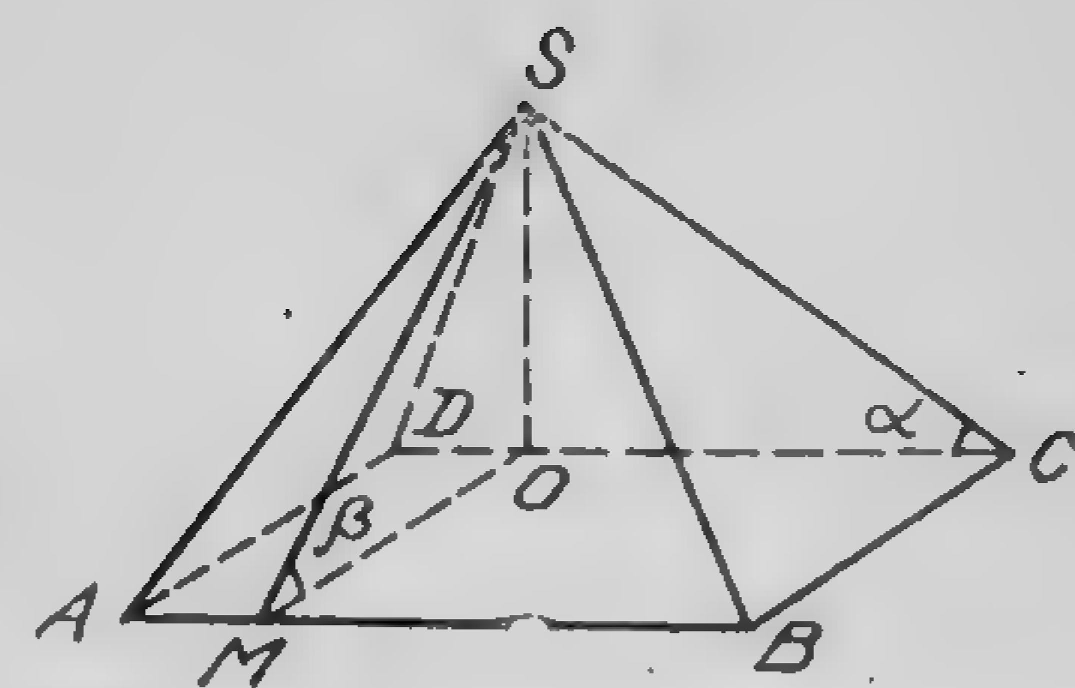
$$S_{от}=a^2=H^2(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

$$V=\frac{1}{3}H^3(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\frac{1}{3}H^3\cdot\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\beta\sin^2\alpha}.$$

SKO дүзбучаглы үчбучағында: $\operatorname{tg}\angle SKO=\frac{SO}{OK}=\frac{2H}{a}=$



Шәкил 94



Шәкил 95

$$=\frac{2H}{H(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\text{ бурадан}$$

$$\angle SKO=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

100. $SABCD$ пирамидасында $\angle DSC=90°$, $\angle SCD=\alpha$, $\angle SMO=\beta=90°-\alpha$, $SM+SO=m$ верилмишдир (шәкил 95). Пирамиданын һәчми: $V=\frac{1}{3}DC\cdot MO\cdot SO$ дүстурундан тапылыр. $SO=H$ гәбул едәк. SMO дүзбучаглы үчбучағында:

$$SM=\frac{SO}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{H}{\cos\alpha},\quad MO=SO\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=H\operatorname{tg}\alpha.$$

$$H+\frac{H}{\cos\alpha}=m,\quad H\cdot\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}=m,\quad H=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$MO=H\operatorname{tg}\alpha=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

DSC дүзбучаглы үчбучағында $DC=\frac{SC}{\cos\alpha}$, $SD=DC\sin\alpha$;

SOC үчбучағында $SC=\frac{SO}{\sin\alpha}=\frac{H}{\sin\alpha}=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$.

Демәли, $DC=\frac{SC}{\cos\alpha}=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$,

$$DS = DC\sin\alpha = \frac{m\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha} = \frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot DC\cdot MO\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}\cdot m\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

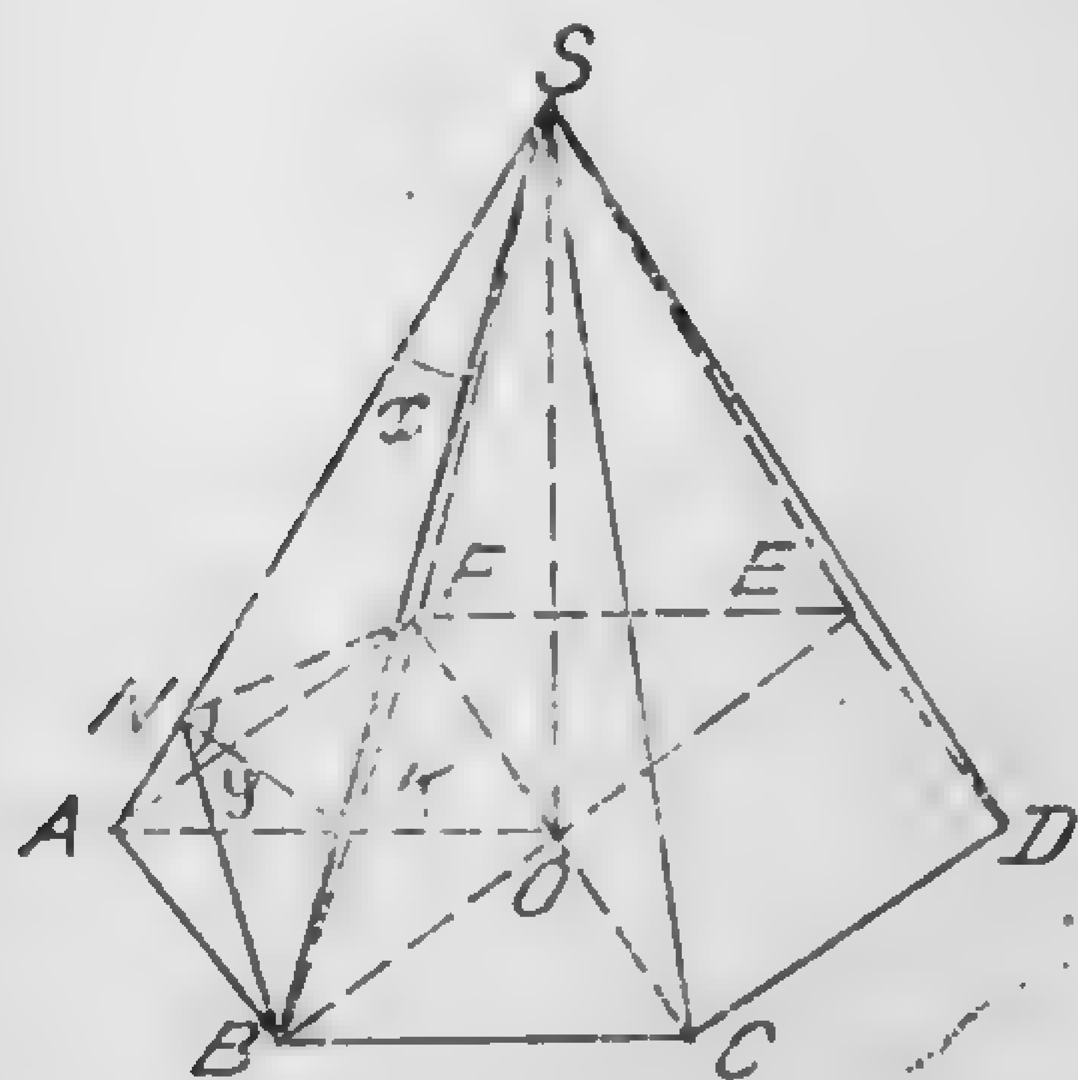
$$= \frac{m^3\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}.\quad S_{SBC} = \frac{1}{2}BC\cdot SC = \frac{1}{2}m\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha},$$

$$S_{ADS} = \frac{1}{2}AD\cdot SD = \frac{1}{2}m\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$S_{SBC} + S_{ADS} = \frac{1}{2}m^2\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+1\right) =$$

$$= \frac{m^2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\cos^3\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m^2(\cos\alpha+\sin\alpha)}{8\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{m^2\cos(45^\circ-\alpha)}{4\sqrt{2}\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

101. BF-дән SA тилинә перпендикулјар мүстәви кечирәк, онда BNF бучағы SA тилиндәки (шәкил 96) икиүзлү бучағын хәтти бучағы олачагдыр. $\triangle ABN = \triangle ANF$ ($AB = AF$, $\angle NAB = \angle NAF$ вә AN ортаг олдуғу үчүн), она көрә $BN = NF$. K нөгтәси BF парчасынын орта нөгтәси олсун. ABF, OBF вә BNF бәрабәрјанлы үчбучагларында AK, OK вә NK медианлары һәм һүндүрлүк вә һәм дә тәнбөләндир. Демәли, $\angle BNK = \frac{1}{2}\angle BNF$. Дүзкүн алтыбучаглынын тәрәфини a илә ишарә едәк. $BK = OB\sin 60^\circ = a\frac{\sqrt{3}}{2}$



Шәкил 96

вә $BN = \frac{BK}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$ тапылыр. $\angle ASB = x$ гәбул едәк. $\angle SAB = 90^\circ - \frac{x}{2}$ олар.

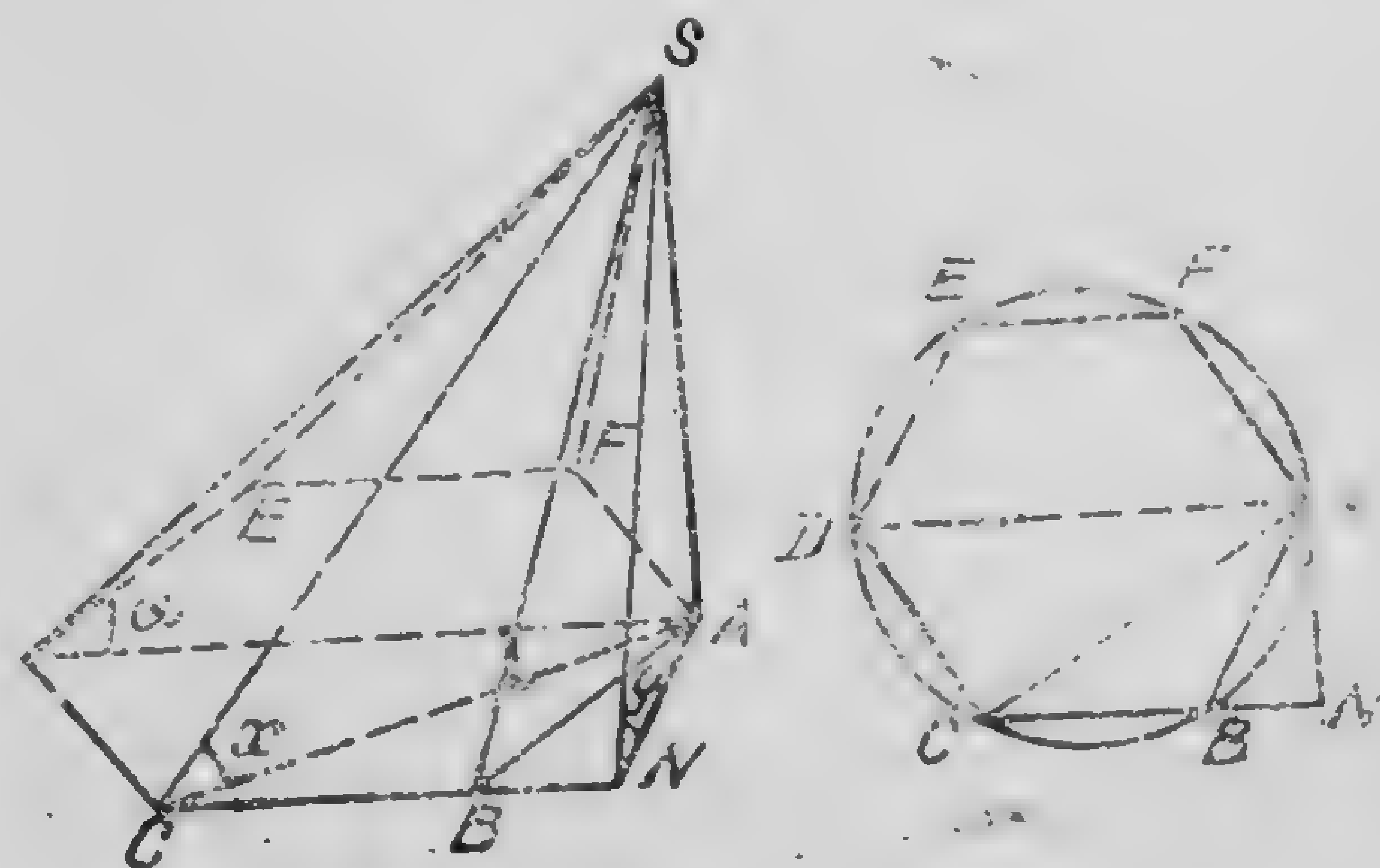
$\triangle ABN$-дән: $BN = AB\sin\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = a\cos\frac{x}{2}$ олар. Бурадан

$$a\cos\frac{x}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \quad \text{вә} \quad x = 2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

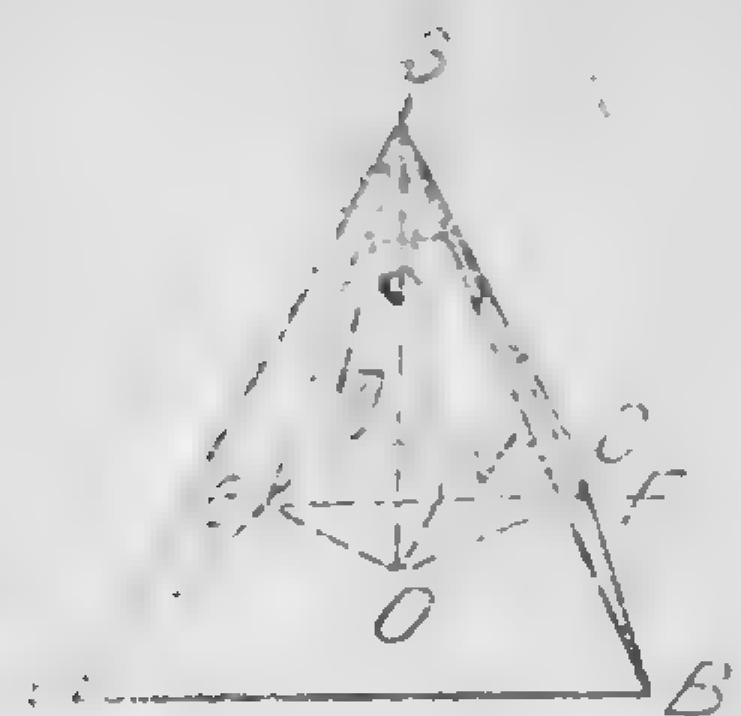
102. *Ҹаваб*: $y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{3}}$.

Көстәриш. $ABCDEF$ чохбучаглысы (шәкил 97) дүзкүн олдуғу үчүн онун харичинә чеврә чәкин. A нөгтәсини C илә бирләшдирин. $\angle ACD$ (диаметрә сөјкәнир), јә'ни $AC \perp DC$. Онда $SC \perp DC$.

103. Пирамиданын бүтүн јан үзләри отурачаг мүстәвиси илә ејни бучаглар әмәлә кәтирдијиндән онун SO һүндүрлүјү отурачағы дахилинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир (шәкил 98). SED вә SOF дүзбучаглы үчбучагларда SO катети ортаг $\angle SEO = \angle SFO$ олдуғуна көрә үчбучаглар бәрабәрдир. Она көрә $SE=$



Шәкил 97



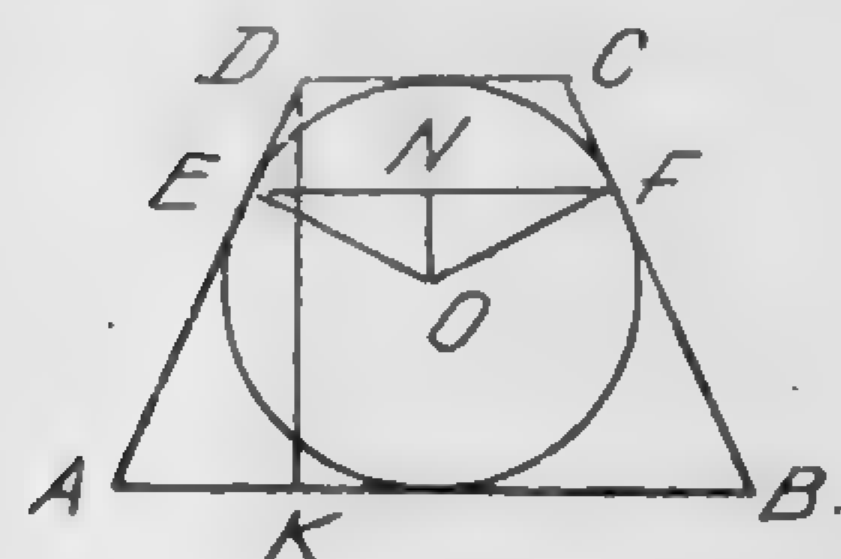
$= SF$ олур. Демәли, SEF үчбучағы бәрабәрјанлыдыр. $DK \perp AB$ чәкәк. $ABCD$ трапесијасында $DK = h = 2EO$; $OE = \frac{h}{2}$ олур (бурада OE дахилә чәкилмиш чеврәнин радиусудур). SE-ни тә'јин едәк. SEF үчбучағында:

$$S = \frac{1}{2} SE^2 \sin\alpha, \quad SE^2 = \frac{2S}{\sin\alpha},$$

$$SE = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}.$$

Пирамиданын һүндүрлүјү:

$$SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha} - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{8S - h^2\sin\alpha}{4\sin\alpha}}.$$



Шәкил 98

Трапесијанын саһәси:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)\cdot KD.$$

Чеврә харичинә чәкилмиш дөрдбучаглынын хассәсинә көрә $AB + CD = AD + BC = 2AD$. Онда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 2AD\cdot KD = AD\cdot h$ олур. AD-ни тә'јин едәк. ADK вә OEN бучагларын ујғун тәрәфләри перпендикулјар олдуғу үчүн бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, $\triangle ADK \backsim \triangle ONE$ олур, она көрә

$$AD = \frac{DK\cdot OE}{EN} = \frac{h\cdot\frac{1}{2}h}{EN} = \frac{h^2}{2EN}; \text{ } SEN \text{ үчбучағында:}$$

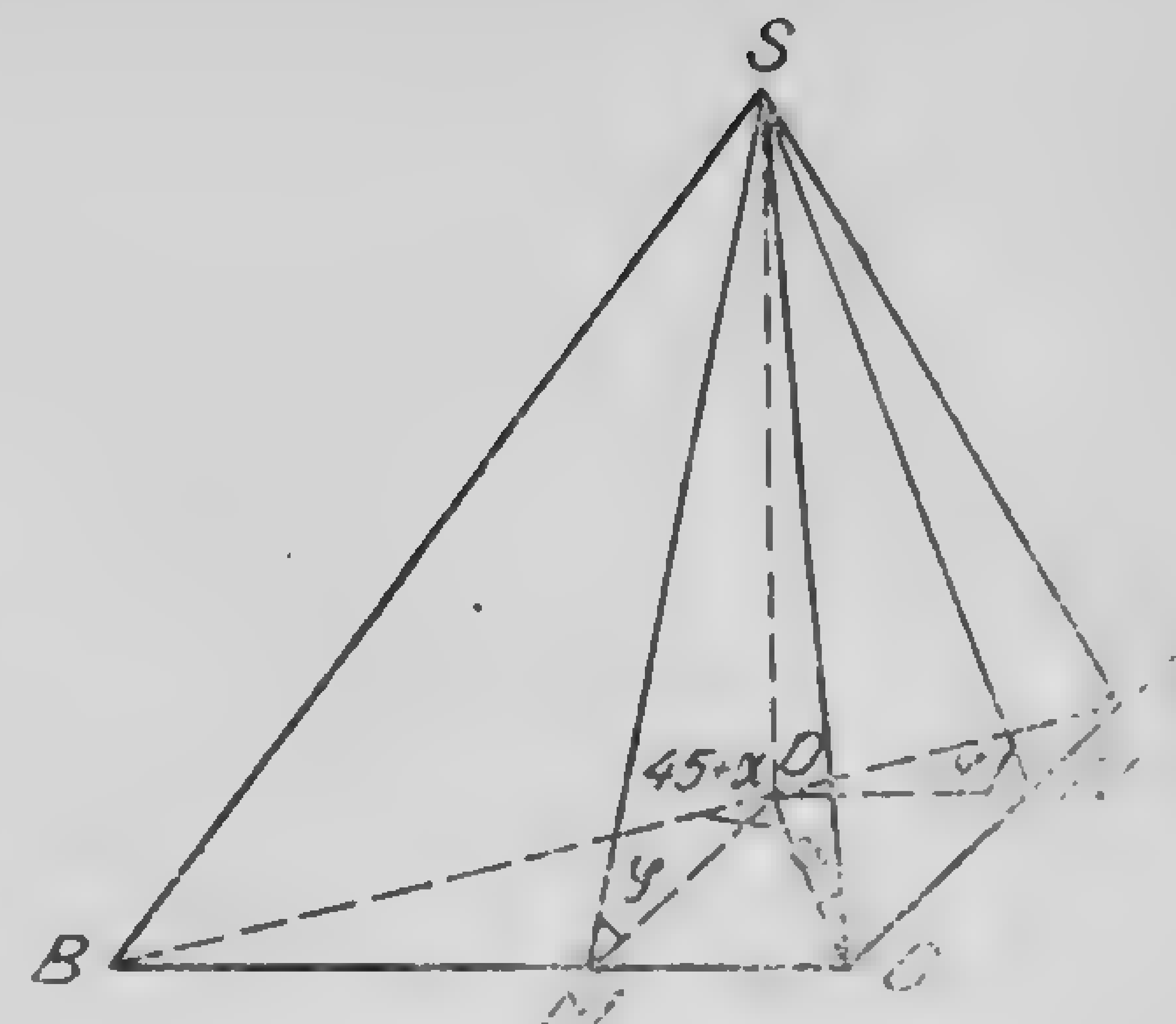
$$EN = SE\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}\cdot\sin\alpha, \text{ бурадан}$$

$$AD = \frac{h^2}{2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{h^2}{2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}},$$

$$S_{ABCD} = AD\cdot h = \frac{h^2}{2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}} \times h = \frac{h^3}{2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}}.$$

Пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}} \times \sqrt{\frac{8S - h^2\sin\alpha}{4\sin\alpha}} = \frac{h^3\sqrt{8S - h\sin\alpha}}{12\sqrt{2S}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$



Шәкил 99

104. SO парчасы (шәкил 99) ABC мүстәвисинә перпендикулјар олдуғундан ASB мүстәвиси ABC мүстәвисинә перпендикулјар олачагдыр. $OM \perp BC$, $ON \perp AC$ чәкәк вә S нөгтәси илә M вә N нөгтәләрини бирләшдирәк. Бурадан $SM \perp BC$, $SN \perp AC$ олур (үч перпендикулјар теореминә көрә). Ајдындыр ки, $\angle SMO = \angle SNO$. Онда $ON = OM$. SOM вә SON дүзбучаглы үчбучагларын катетләри бәрабәр олдуғу үчүн бу үчбучаглар бәрабәрдир. Она көрә $\angle SMO = \angle SNO$ олур. BCO үчбучағында:

$$\angle BCO = 45^\circ, \ \angle BOC = 45^\circ + \alpha, \ \angle CBO = 180^\circ - (45^\circ + \alpha) - 45^\circ = 90^\circ - \alpha.$$

Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} BC\cdot AC\cdot SO$ дүстуру илә һесабланыр. BC, AC, SO-ну тә'јин едәк.

Синуслар теореминә көрә

$$\frac{BC}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{OC}{\sin(90^\circ - \alpha)}, \quad BC = \frac{OC\sin(\alpha + 45^\circ)}{\cos\alpha} = \frac{m\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos\alpha}.$$

ABC үчбучағында: $\angle BAC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$, $AC = BC\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{m\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos\alpha}\,\mathrm{ctg}\alpha = \frac{m\sin(45^\circ + \alpha)}{\sin\alpha}$.

SOC дүзбучаглы үчбучагында: $SO = OC\,\mathrm{tg}\alpha = m\,\mathrm{tg}\alpha$

Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot SO = \frac{1}{6} \times$

$$\times \frac{m\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{m\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin\alpha} \cdot m\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{m^3\sin^2(45^\circ+\alpha)}{6\cos^2\alpha}.$$

Јан үзләрин отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучаглары тә'јин едәк. $MONC$ дүзбучаглысында $OM = ON$ олдуғу үчүн бу дүзбучаглы квадратдыр. ONC үчбучагында $\sqrt{2}\,ON = OC$, $ON = \frac{OC}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

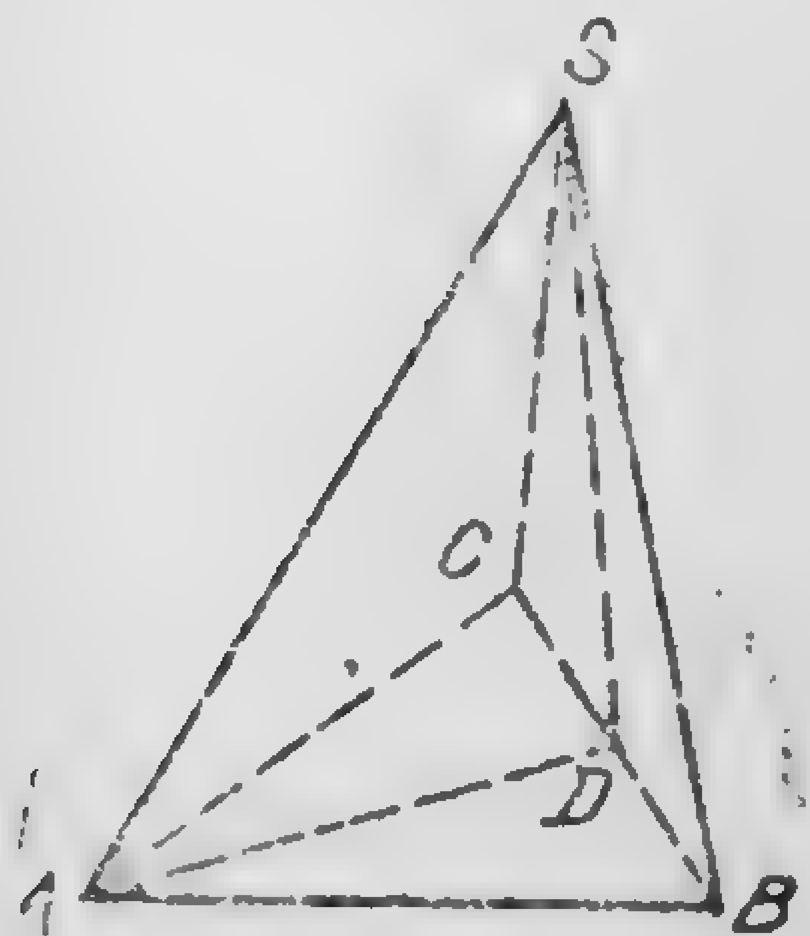
SON үчбучағында:

$$\angle SNO = \varphi, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{SO}{ON} = (m\,\mathrm{tg}\alpha) : \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

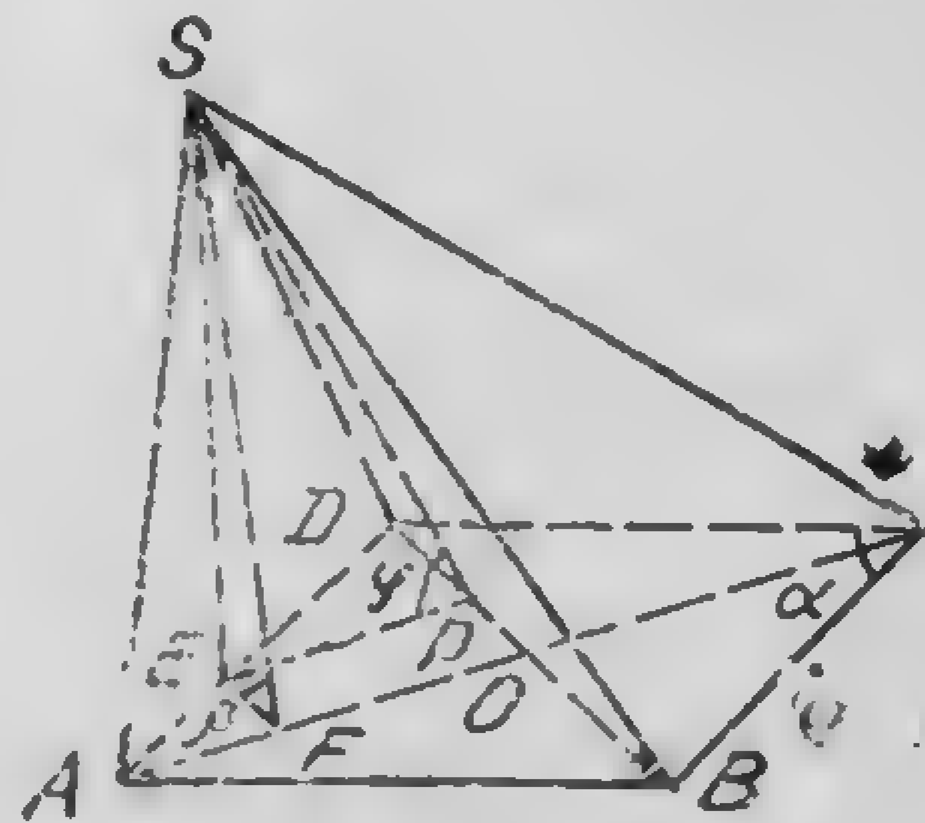
$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right).$$

105. *Чаваб.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$. Көстәриш. SBC вә ABC мүстәвиләри перпендикулјардыр. Бәрабәрјанлы SBC бучагларындан бири 60° олдуғу үчүн бәрабәртәрәфли үчбучагдыр (шәкил 100).

106. Пирамиданын һүндүрлүјү SAD јан үзүнүн (шәкил 101) үзәринә дүшүр. $EF \perp AC$, $EP \perp BD$ чәкәк. F



Шәкил 100



Шәкил 101

вә P нөгтәләрини S нөгтәси илә бирләшдирәк; үч перпендикулјар теоремина көрә $SF \perp AC$ вә $SP \perp BD$. Бурадан SFE вә SPE бучаглары хәтти бучаглар олур. Ромбун диагоналларынын хассәсинә көрә $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\alpha$, $AC \perp BD$; $EP \perp BD$, $AC \perp BD$ олдуғу үчүн $EP \parallel AC$. Демәли, $\angle DEP = \angle EAF$.

Пирамида отурачағынын саһәси: $S_{от} = a^2\sin\alpha$. SEF дүзбучаглы үчбучағындан: $EF = SE\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

SEP дүзбучаглы үчбучағындан: $EP = SE\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. AEF үчбучағындан: $EF = AE\sin\frac{\alpha}{2}$, EDP дүзбучаглы үчбучағында $EP = ED\cos\frac{\alpha}{2}$ олур, бурадан $ED = \frac{EP}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{SE\,\mathrm{ctg}\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad AE = \frac{EF}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{SE\,\mathrm{ctg}\,\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad AD = AE + ED =$$

$$= \frac{SE\,\mathrm{ctg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{SE\,\mathrm{ctg}\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}} = SE\left(\frac{\mathrm{ctg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mathrm{ctg}\,\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$a = SE\left(\frac{\mathrm{ctg}\,\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mathrm{ctg}\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$SE = \frac{a\sin\alpha}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\beta + \sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\varphi\right)}.$$

Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{от}SE = \frac{1}{3}a^2\sin\alpha \times$

$$\times \frac{a\sin\alpha}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\beta + \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\varphi\right)} = \frac{a^3\sin^2\alpha}{6\left(\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\beta + \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\varphi\right)}.$$

107. Верилир: $EABCD$ пирамидадыр, AED вә AEB, јан үзләри отурачага перпендикулјардыр, $EO = R$, $\angle EDA = \angle EBA = \alpha$ (шәкил 102). AE парчасы $ABCD$ мүстәвисинә перпендикулјар олачагдыр. $AD \perp DC$ вә AD парчасы ED маилин проjексиjасы олдуғундан үч пер-

пендикулјар теоремнә көрә $ED\perp DC$. Демәли, EDA бучағы хәтти бучагдыр. Һәмин гајда үзрә EBA бучағы да хәтти бучагдыр $\triangle ADE=\triangle ABE$ $ED=EB$ вә $\triangle EDC=\triangle EBC$.

ABE үчбучағын саһәси: $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AE$. ABE үчбучағында:

$$AE=BE\sin\alpha=2R\sin\alpha,\quad AB=BE\cos\alpha=2R\cos\alpha,$$

бурадан

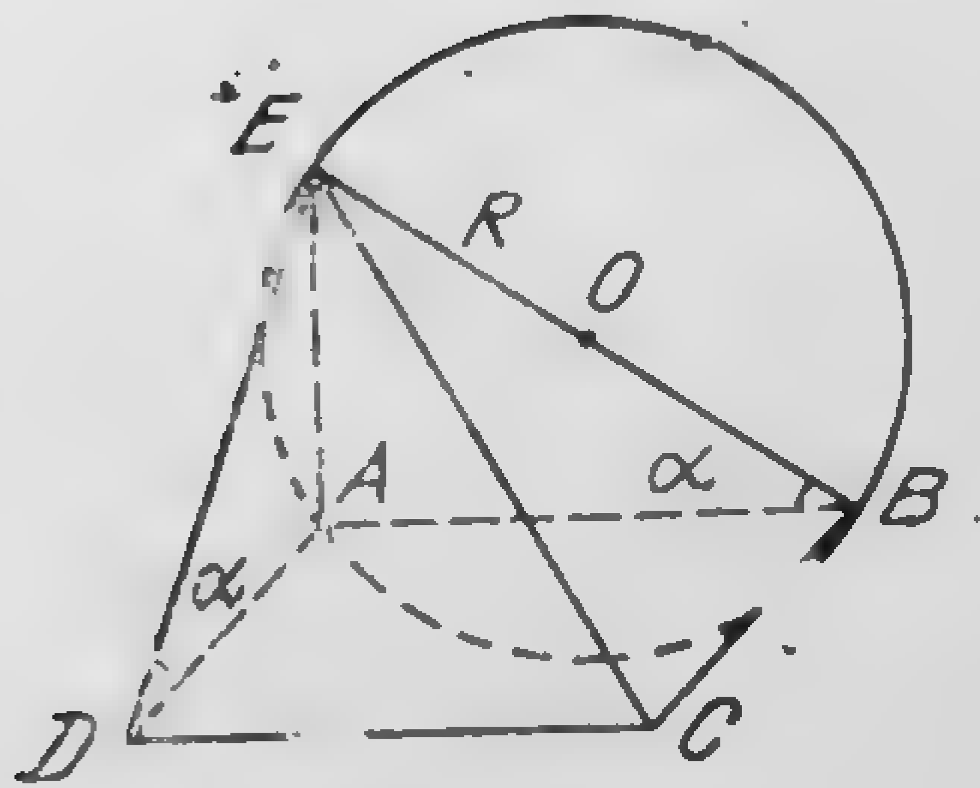
$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\alpha=2R^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

EBC үчбучағын саһәси: $S_2=\frac{1}{2}BC\cdot BE=\frac{1}{2}AB\times$

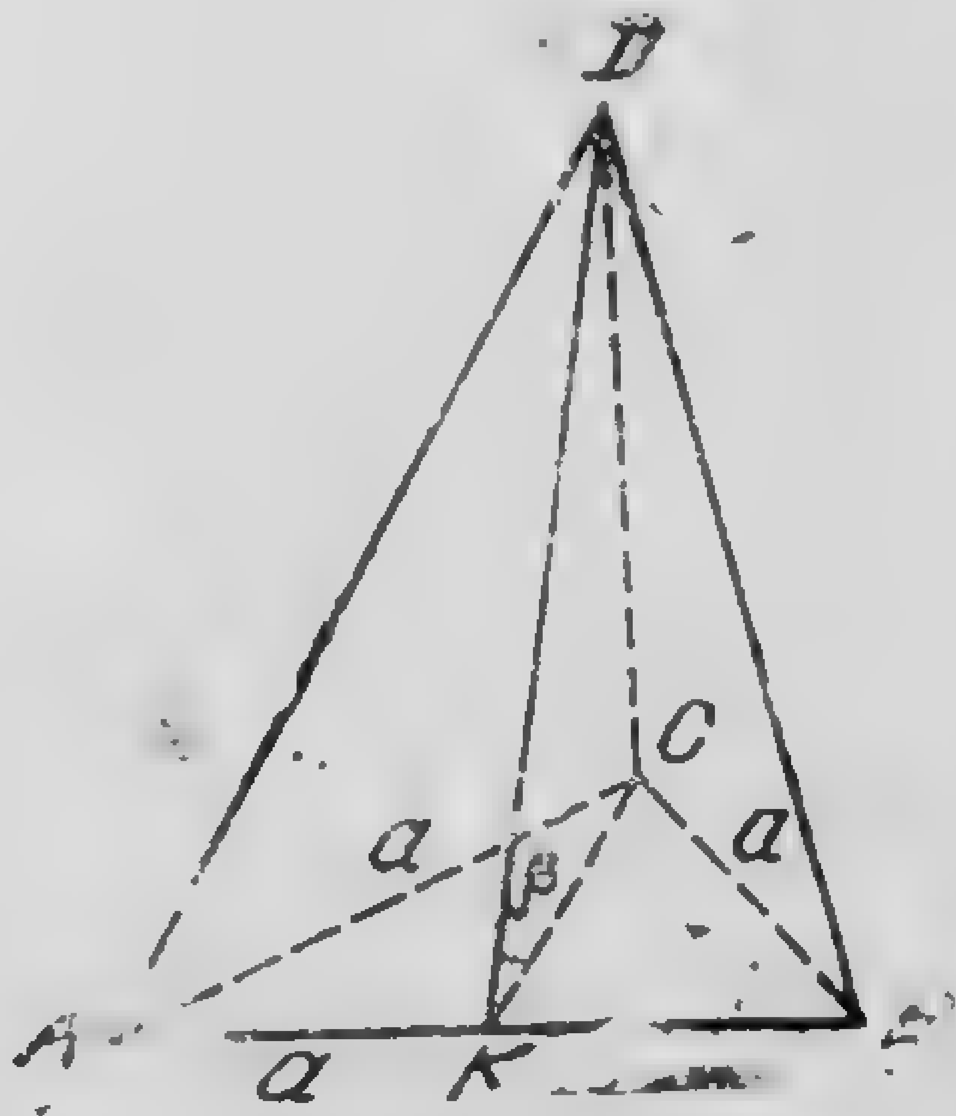
$$\times BE=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha 2R=2R^2\cos\alpha.$$

Отурачағын саһәси: $S=AB^2=4R^2\cos^2\alpha$. Пирамиданын там сәтһи:

$$S_т=S+2S_1+2S_2=4R^2\cos^2\alpha+2(2R^2\sin\alpha\cos\alpha)+$$
$$+2(2R^2\cos\alpha)=4R^2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha+1)=4R^2\cos\alpha\times$$



Шәкил 102



Шәкил 103

$$\times\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=8R^2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Бурадан:

$$S_т=8\sqrt{2}R^2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

108. $CK\perp AB$ чәкәк (шәкил 103). Үч перпендикулјар теоремнә көрә $DK\perp AB$ вә DKC хәтти бучагдыр. $\triangle ACD=\triangle BCD$. Пирамиданын јан сәтһи: $S_{јан}=S_{ADC}+$

$$+S_{BCD}+S_{ABD}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DC+\frac{1}{2}AB\cdot DK=$$
$$=a\left(DC+\frac{1}{2}DK\right).$$

ACK үчбучағында: $CK=AC\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. DKC үчбучағында: $DC=CK\,tg\,\beta=\frac{a\sqrt{3}}{2}\,tg\,\beta$, $DK=\frac{KC}{\cos\beta}=\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\beta}$.

$$S_{јан}=a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}tg\beta+\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\beta}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{1}{2\cos\beta}\right)=$$
$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos\beta}\left(\sin\beta+\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos\beta}(\sin\beta+\sin 30^\circ)=$$
$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-15^\circ\right).$$

109. Фәрз едәк ки, SD пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 104). $DM\perp AB$, $DN\perp AC$ чәкәк. Үч перпендикулјар теоремнә көрә $SM\perp AB$, $NS\perp AC$ олур. Бурада $\angle SMD=\angle SND=\varphi$ отурачаг тилләриндәки хәтти бучаглары олур (SD катети $\triangle SDM=\triangle SOM$), ортаг вә ити бучаглары бәрабәр олдуғундан) $DM=DN$. $\triangle DMB=\triangle DNC$-дән $BD=CD$, јә'ни D нөгтәси BC-нин орта нөгтәсидир. ABC дүзкүн үчбучағын тәрәфини x илә ишарә едәк, онда $AD=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ олур. Мә'лумдур ки, $BD^2=BM\cdot AB$ вә ја $\left(\frac{x}{2}\right)^2=BM\cdot x$, $BM=\frac{x}{4}$. BMD үчбучагларында: $MD=\sqrt{BD^2-BM^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^2}=$

$$=\frac{x\sqrt{3}}{4}.$$

BMD үчбучагларында:

$$MD = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}.$$

$$\triangle SMD\text{-дән:}\ \ SD = MD \operatorname{tg}\varphi = \frac{x\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}\varphi.$$

$$SBD\text{-дән:}\ \ \angle SBD = y \text{ гәбул едәк},$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{SD}{BD} = \frac{x\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}\varphi : \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi, \text{ бурадан}$$

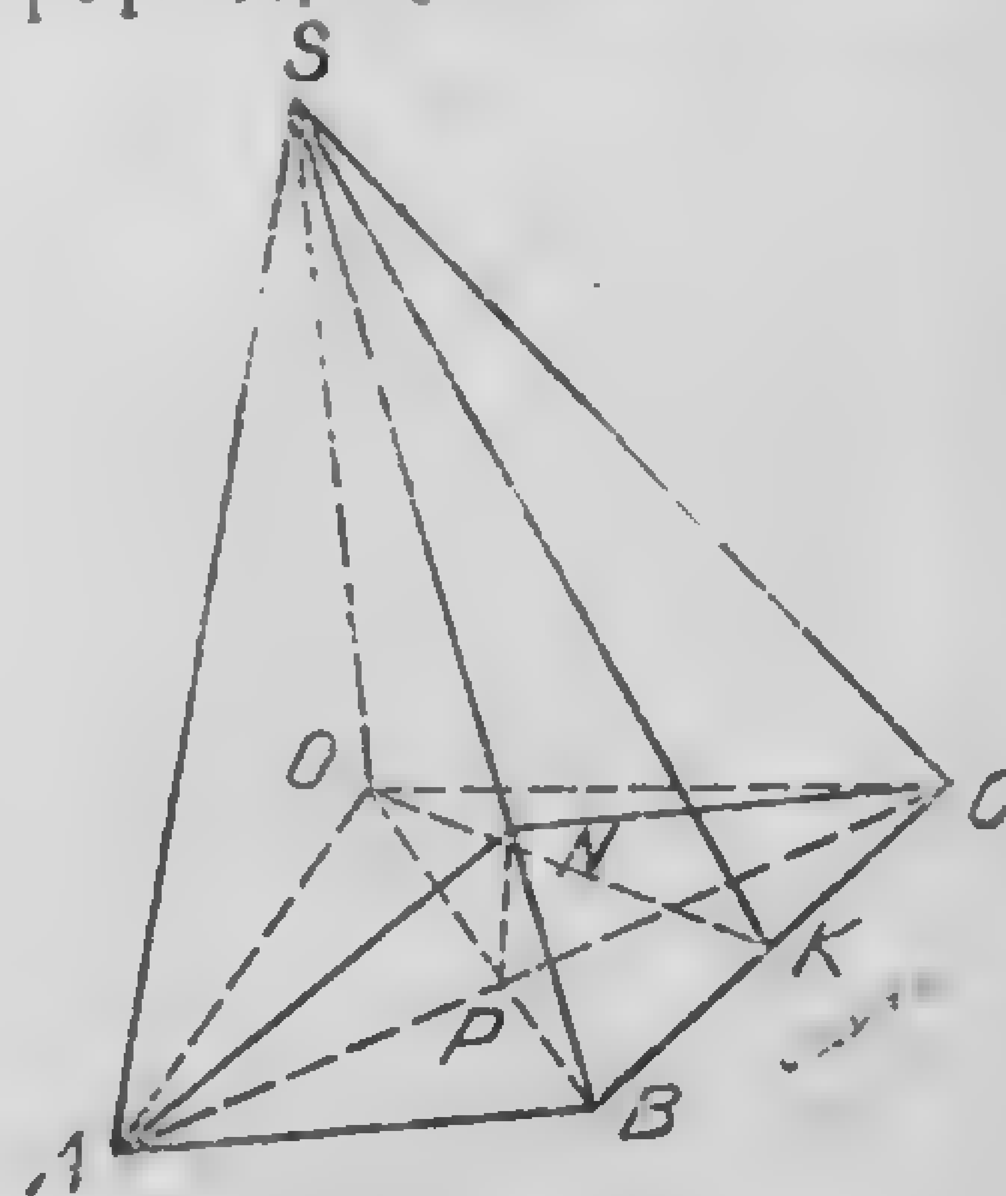
$$y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{2}\right).$$

$\triangle ASD$-дән: $\angle SAD = z$ гәбул едәк, $\operatorname{tg} z = \frac{SD}{AD} =$

$$= \frac{x\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{4} : \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi, \ \ z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right).$$

110. $\angle SKO = x$ гәбул едәк (шәкил 105). Бу бучағы тапмаг үчүн SOK дүзбучаглы үчбучагында SK вә SO тәрәфләрини билмәк лазымдыр. AC парчасындан SB тилинә перпендикулјар мүстәви кечирәк, онда ANC бучагы јан тилдәки икиүзлү бучағын хәтти бучағы, $SB \perp$ $\perp AN$, $SB \perp CN$, $SB \perp PN$. ANB вә CBN дүзбучаглы үчбучагларында BN катети ортаг, AB вә BC һипотенузлары бәрабәр олдугу үчүн дүзбучаглы үчбу-

Шәкил 104



Шәкил 105

чаглар бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, ANC үчбучагы бәрабәрјанлы үчбучагдыр.

SBO вә NPO дүзбучаглы үчбучагларында SBO ити бучагы ортаг олдуғу үчүн $\triangle SOB \backsim \triangle PBN$ олур. BOC мәркәзи бучаг $\frac{360^\circ}{n}$; дикәр тәрәфдән $\angle BOK = \frac{180^\circ}{n}$ олачагдыр.

PCB вә OBK үчбучагларын ујғун тәрәфләри перпендикулјар олдуғундан $\angle PCB = \angle BOK$ олур. Демәли, $\angle PCB = \frac{180^\circ}{n}$. $BC = 2a$ гәбул едәк. $SK \cdot BC = SB \cdot CN$, бурадан

$$SK = \frac{SB \cdot CN}{2a}. \qquad (1)$$

$\triangle SOB \backsim \triangle PNB$ олдугу үчүн $PB : SB = PN : SO$ вә ја $SB = \frac{SO \cdot PB}{PN}$, буну (1)-дә нәзәрә алсаг, $SK = \frac{SO \cdot BP}{PN} \times$ $\times \frac{CN}{2a}$ вә ја $\frac{SO}{SK} = \frac{2a \cdot PN}{BP \cdot CN}$. Демәли, $\sin x = \frac{SO}{SK} = \frac{2a \cdot PN}{BP \cdot CN}$.

$$CBP \text{ үчбучағында: } BP = BC \sin\frac{180^\circ}{n} = 2a \sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$PC = BC\cos\frac{180^\circ}{n} = 2a\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

$$PNC \text{ үчбучағында: } PN = PC \operatorname{ctg}\alpha = 2a\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$CN = \frac{PC}{\sin\alpha} = \frac{2a\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\alpha}. \ \ \sin x = \frac{SO}{SK} = \frac{2a \cdot PN}{BP \cdot CN} =$$

$$= \frac{2a \cdot 2a\cos\frac{180^\circ}{n}\operatorname{ctg}\alpha}{2a\sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{2a\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

111. Мәсәләни 105-чи шәкилдән истифадә едәрәк һәлл едәк. Пирамиданын јан тилинин отурачаг мүстәвисилә әмәлә кәтирдији бучағы y илә ишарә едәк, $\sin y = \frac{SO}{SB} = \frac{PN}{BP}$. BCP үчбучағында: $BP = BC\sin\frac{180^\circ}{n} =$

$= 2a\sin\frac{180°}{n}$, $PC = BC\cos\frac{180°}{n} = 2a\cos\frac{180°}{n}$, PNC-үчбучағында: $PN = PC\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 2a\cos\frac{180°}{n}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

$$\sin y = \frac{PN}{BP} = \frac{2a\cos\frac{180°}{n}\,\mathrm{ctg}\alpha}{2a\sin\frac{180°}{n}} = \mathrm{ctg}\frac{180°}{n}\,\mathrm{ctg}\alpha.$$

112. 105-чи шәкилдән истифадә едәрәк, мәсәләни ашағыдакы гајда үзрә һәлл едирик.

OBK үчбучағында:

$$\frac{BK}{OB} = \sin\frac{180°}{n},\quad OB = \frac{BK}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{a}{\sin\frac{180°}{n}},$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OB^2\sin\frac{360°}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\sin^2\frac{180°}{n}}\times$$

$$\times 2\sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n} = a^2\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}.$$

Бурадан пирамиданын отурачағынын саһәси

$$S = na^2\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}.$$

$\triangle SOB \backsim \triangle PNB$ олдуғу үчүн

$$SO : PN = OB : BN \text{ вә ја } SO = \frac{PN\cdot OB}{BN} \qquad (1)$$

BCP үчбучағындан: $BP = BC\sin\frac{180°}{n} = 2a\sin\frac{180°}{n}$,

$$PC = BC\cos\frac{180°}{n} = 2a\cos\frac{180°}{n}.$$

PNC үчбучағындан: $PN = PC\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 2a\cos\frac{180°}{n}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

PBN дүзбучаглы үчбучағында: $BN = \sqrt{BP^2 - PN^2} =$

$$= \sqrt{\left(2a\sin\frac{180°}{n}\right)^2 - \left(2a\cos\frac{180°}{n}\,\mathrm{ctg}\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{\sin^2\frac{180°}{n}\sin^2\alpha - \cos^2\frac{180°}{n}\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{-\cos\left(\alpha + \frac{180°}{n}\right)\cos\left(\alpha - \frac{180°}{n}\right)}}{\sin\alpha}.$$

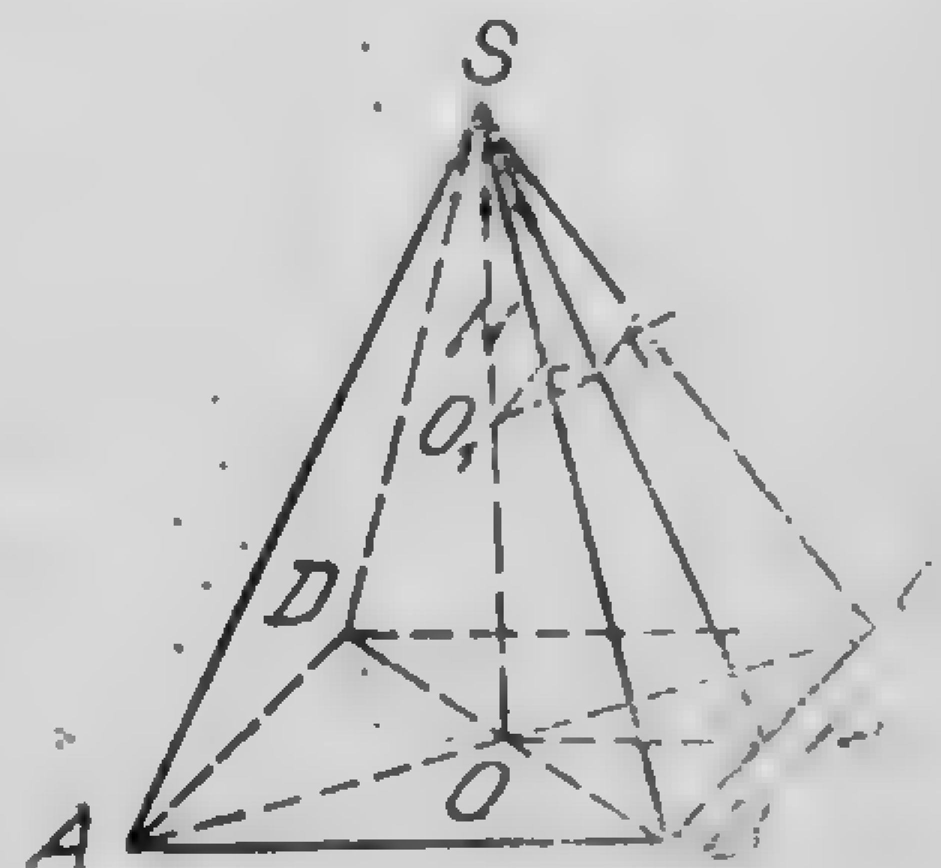
PN, OB, BN-нин гијмәтләрини (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$SO = \frac{a\,\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}\cos\alpha}{\sqrt{-\cos\left(\alpha + \frac{180°}{n}\right)\cos\left(\alpha - \frac{180°}{n}\right)}}.$$

Пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{na^3\mathrm{ctg}^2\frac{180°}{n}\cos\alpha}{3\sqrt{-\cos\left(\alpha + \frac{180°}{n}\right)\cos\left(\alpha - \frac{180°}{n}\right)}}.$$

113. Тутаг ки, SO пирамиданын һүндүрлүјү (шәкил 106), O_1 онун орта нөгтәси, $O_1N \perp SB$, $O_1K \perp (SBC)$. $\triangle SO_1N \backsim \triangle SOB$ (дүзбучаглы үчбучагларын бир ити бучаглары ортаг олдуғу үчүн). $O_1K \perp SM$ олдуғуну асанлыгла көстәрмәк олар. SO_1K вә SOM дүзбучаглы үчбучагларында OSM ити бучағы ортаг олдуғу үчүн охшардыр. SOM мүстәвиси $ABCD$ вә SBC мүстәвиләринә перпендикулјар олдуғу үчүн онларын кәсишмә хәтти олан BC-јә дә перпендикулјар олур. Демәли, $OM \perp BC$, $SM \perp BC$, $SO = H$, $AB = x$ гәбул едәк. $\triangle SOM \backsim \triangle SO_1K$ олдуғу үчүн $SM : OM = SO_1 : O_1K$ вә ја $SM : \frac{x}{2} = \frac{H}{2} : a$, $SM = \frac{Hx}{4a}$, $\triangle SOB \backsim \triangle SO_1N$, $SB : OB = SO_1 : O_1N$ вә ја $SB = \frac{Hx}{2h\sqrt{2}}$; SBM үчбучағында: $SB^2 = BM^2 + SM^2$ вә ја $\left(\frac{xH}{2h\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{Hx}{4a}\right)^2$, бурадан $H^2 = \frac{4a^2h^2}{2a^2 - h^2}$,

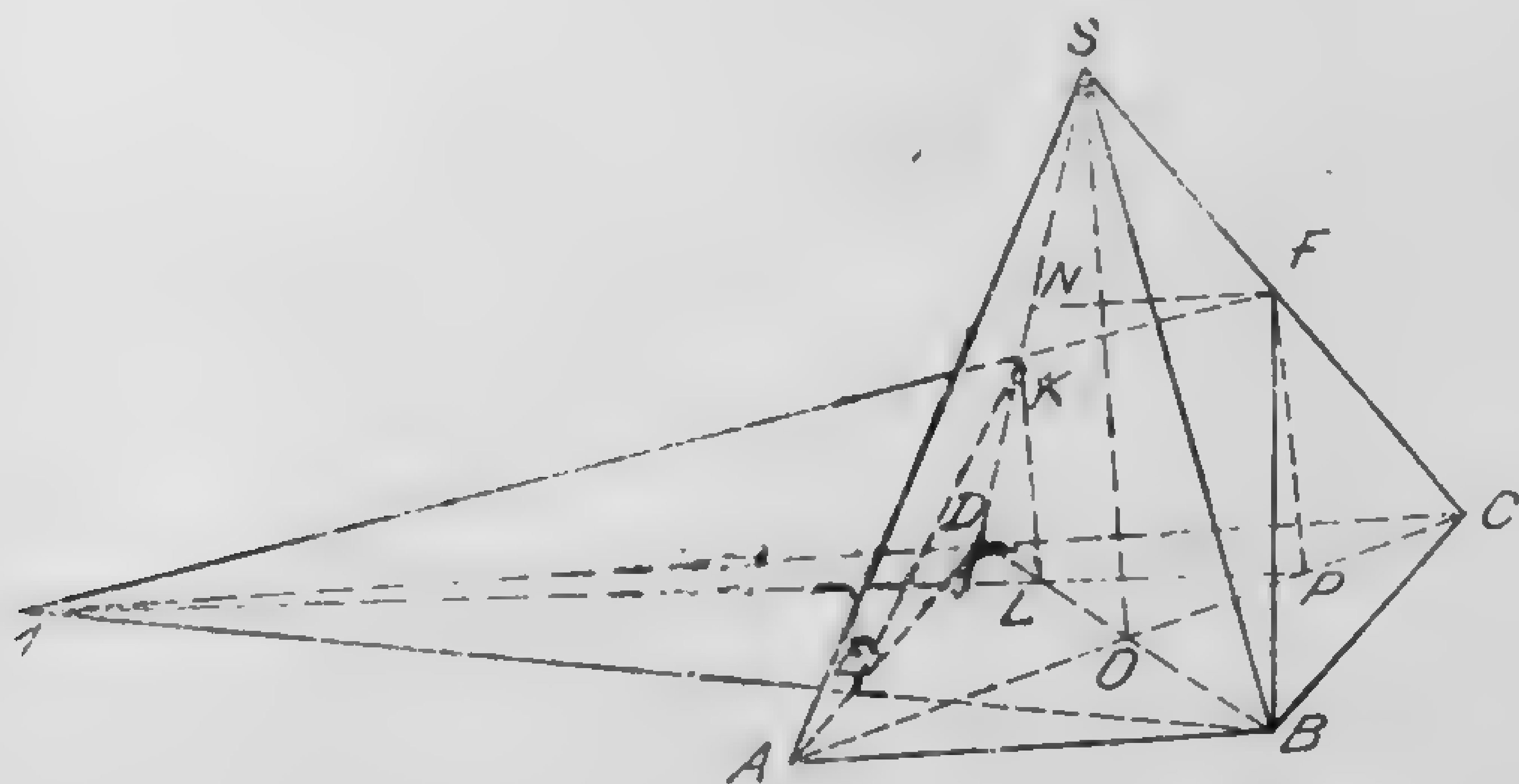


Шәкил 106

$H=\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}$. SOM үчбучагында: $SM^2=SO^2+OM^2$ вә ја $\frac{x^2H^2}{16a^2}=H^2+\frac{x^2}{4}$, бурадан $x^2=\frac{16a^2H^2}{H^2-4a^2}$. Бу бәрабәрликдә H гијмәтини нәзәрә алсаг, $x^2=\frac{8a^2h^2}{h^2-a^2}$. Пирамиданын һәчми: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{8a^2h^2}{h^2-a^2}\cdot\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{8a^2h^2}{h^2-a^2}\cdot\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}=$

$$=\frac{16a^4h^3}{3(h^2-a^2)\sqrt{2a^2-h^2}}.$$

114. MC дүз хәтти SDC мүстәвиси үзәриндәдир (шәкил 107). M вә F нөгтәләрини бирләшдирәк, онда MF вә SD дүз хәтт парчалары K нөгтәсиндә кәсишир. M илә B вә B илә F нөгтәләрини бирләшдирәк. Беләликлә $BFKE$ кәсијини алырыг. $FN\parallel CD$ чәкәк. $SF=FC$. $FN\parallel CD$ олдуғу үчүн $SN=ND$ олур. Она көрә дә FN парчасы SCD үчбучагын орта хәттидир. Бурадан $FN=\frac{1}{2}CD$. $\triangle MDK\backsim\triangle KNF$ ($\angle MKD=\angle NKF$ гаршылыглы, $\angle MDK=\angle FNK$ паралел хәтләрин чарпаз бучаглары олдуғундан). FP вә KL парчалары $ABCD$ мүстәвисинә перпендикулјар чәкәк. $\triangle MKL\backsim\triangle MFP$ олур (бир ити бучағы ортаг олан дүзбучаглы үчбучаглар олдуғу үчүн). FP вә SO парчалары ејни мүстәвијә чәкилән перпендикулјарлар олдуғуна көрә $FP\parallel SO$ олур.



Шәкил 107

$SF=FC$ вә $FP\parallel SO$ олдуғундан FP парчасы SOC үчбучағын орта хәттидир. Она көрә $FP=\frac{1}{2}SO$ олур. $SO=h$, $CD=x$ гәбул едәк. Верилән пирамиданын отурачағынын саһәси: $S_{от}=x^2$, верилән пирамиданын һәчми: $V_1=\frac{1}{3}x^2h$.

$FMBC$ пирамидасынын һәчмини тә'јин едәк: $S_{MBC}=$

$$=\frac{1}{2}MC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot x=\frac{3}{2}x^2,$$

$$V_{FBCM}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}MC\cdot BC\right)\cdot FP=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^2\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4}x^2h.$$

$KMED$ пирамидасынын һәчмини тә'јин едәк:

$$V_{KMED}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot MD\cdot ED\right)\cdot KL=\frac{1}{3}x\cdot ED\cdot KL$$

ED-ни x, KL парчасыны исә h илә ифадә едәк. $\triangle MBC\backsim\triangle MED$ олдуғу үчүн $ED:MD=BC:MC$ вә ја

$ED:2x=x:3x$, $ED=\frac{2}{3}x$. $\triangle MDK\backsim\triangle NFK$-дан:

$MK:KF=MD:FN$ вә ја $MK:KF=2x:\frac{x}{2}$, бурадан

$MK=4KF$, $MF=MK+KF=4KF+KF=5KF$.

$\triangle MKL\backsim\triangle MFP$ олдуғундан $KL:FP=MK:MF$ вә ја $KL:\frac{1}{2}h=4KF:5KF$, бурадан $KL=\frac{2}{5}h$.

$$V_{KMED}=\frac{1}{3}x\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{2}{5}h=\frac{4x^2h}{45}.$$

$$V_{FKBCDE}=V_{FBCM}-V_{KMED}=\frac{1}{4}x^2h-\frac{4x^2h}{45}=\frac{29x^2h}{180},$$

$$V_{SFBAEK}=V_{SABCD}-V_{FKBCDE}=\frac{1}{3}x^2h-\frac{29x^2h}{180}=\frac{31x^2h}{180}.$$

$$V_{SFBAEK}:V_{FKBCDE}=\left(\frac{31}{180}x^2h\right):\left(\frac{29}{180}x^2h\right),$$

бурадан

$$V_{SFBAEK}:V_{FKBCDE}=31:29.$$

115. Тутаг ки, $MNEF$ кәсији AS вә BC тилинә паралел олан һәр һансы кәсикдир (шәкил 108), K нөгтәси исә BC парчасынын орта нөгтәсидир. SK вә AK

Шәкил 108

парчалары бәрабәрјанлы үчбучағын медианы олдуғундан $SK \perp BC$, $AK \perp BC$. Ајдындыр ки, $MNEF$ кәсији дүзбучаглыдыр. $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ вә ABC бәрабәртәрәфли олдуғу үчүн AMN үчбучағы да бәрабәртәрәфли олачагдыр. Бурадан

$$MN = AM. \qquad (1)$$

Һәмин гајда үзрә BMF үчбучағы да бәрабәртәрәфли олдуғуну исбат едирик. Она көрә дә

$$MF = BM. \qquad (2)$$

(1) вә (2) бәрабәрликләрдән $MN + MF = AM + BM = AB = a$.

Дүзбучаглынын ики мүхтәлиф тәрәфләрин чәми сабит вә бу тәрәфләр бәрабәр оланда дүзбучаглынын саһәси ән бөјүк олар. $MN = x$, $MF = y$ илә ишарә едәк. $x + y = a$, $S = xy$ һасили ән бөјүк олмасы үчүн $x = y$ олмалыдыр. Онда $x + y = a$, $2x = a$, $x = \frac{a}{2}$,

$S_{max} = xy = x^2 = \frac{a^2}{4}$.

Бурадан ашкар олур ки, квадратын тәрәфи үчбучағын орта хәттидир, јә'ни тетраедрин тилләри ортасындан кечир (шәкил 108, б). Тутаг ки, $MNEF$ кәсији BC вә SA тилләринә паралел олан квадратдыр. $FA_1 \parallel AB$ вә $EA_1 \parallel AC$ чәкәк. Алынан $AMNA_1FE$ чохүзлү призмадыр. BF парчасы SBC үчбучағын орта хәтти ол-

дуғуна көрә $SP = PK$. ASK үчбучағында PA_1 парчасы SK тәрәфинин ортасындан үчүнчү тәрәфә чәкилән паралел дүз хәтт олдуғуна көрә $SO_1 = O_1O$.

Дүзкүн пирамиданын тә'рифинә көрә онун SO һүндүрлүјү отурачағы харичинә чәкилмиш чеврәнин O мәркәзиндән кечир. $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$ олур. ASO үчбучағында:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Онда $OO_1 = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Призманын һәчми:

$$V = \frac{AM^2\sqrt{3}}{4}\cdot OO_1 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{32}.$$

$$V_{ABCA_1FE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}}\right] =$$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{18}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{7a^3\sqrt{2}}{96}.$$

Тетраедрин биринчи һиссәсинин һәчми:

$$V_1 = V_{ABCA_1FE} - V = \frac{7a^3\sqrt{2}}{96} - \frac{a^3\sqrt{2}}{32} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Тетраедрин һәчми:

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Тетраедрин икинчи һиссәсинин һәчми:

$$V_3 = V_2 - V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Онда $V_1 : V_3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} : \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$, бурадан $V_1 : V_3 = 1 : 1$.

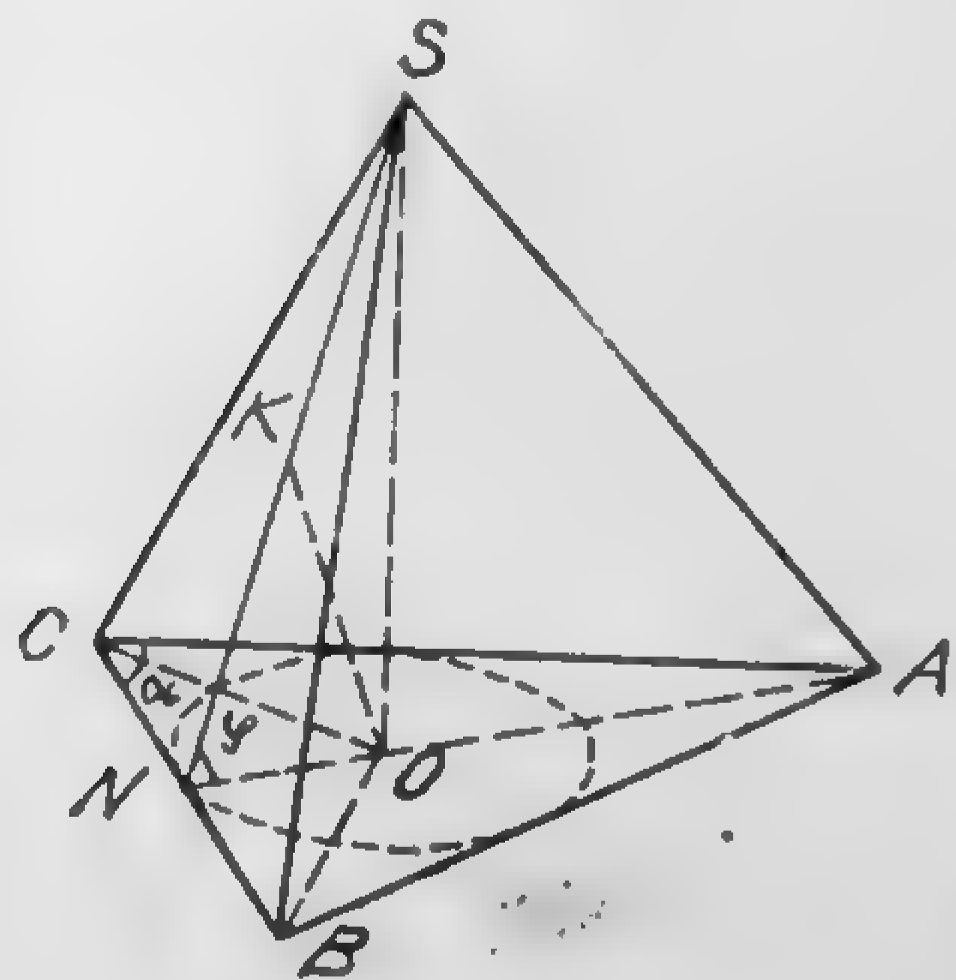
116. O нөгтәси бучағын тәрәфләриндән ејни узаглыгда олдуғундан CO парчасы ACB бучағынын тәнбөләни олачагдыр (шәкил 109). OK парчасы SNO дүзбучаглы үчбучағын һипотенузуна чәкилән медиан ол-

дугу үчүн $OK = \frac{1}{2} SN$ олур. Бурадан $SN = 2KO = 2d$, SNO дүзбучаглы үчбучағында: $NO = SN\cos\varphi = 2d\cos\varphi$, CON дүзбучаглы үчбучағында: $\angle OCN = \frac{\alpha}{2}$, $CN = ON \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2d\cos\varphi \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Бурадан $BC = 2CN = 4d\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. ACN үчбучағында: $\angle CAN = 90° - \alpha$,

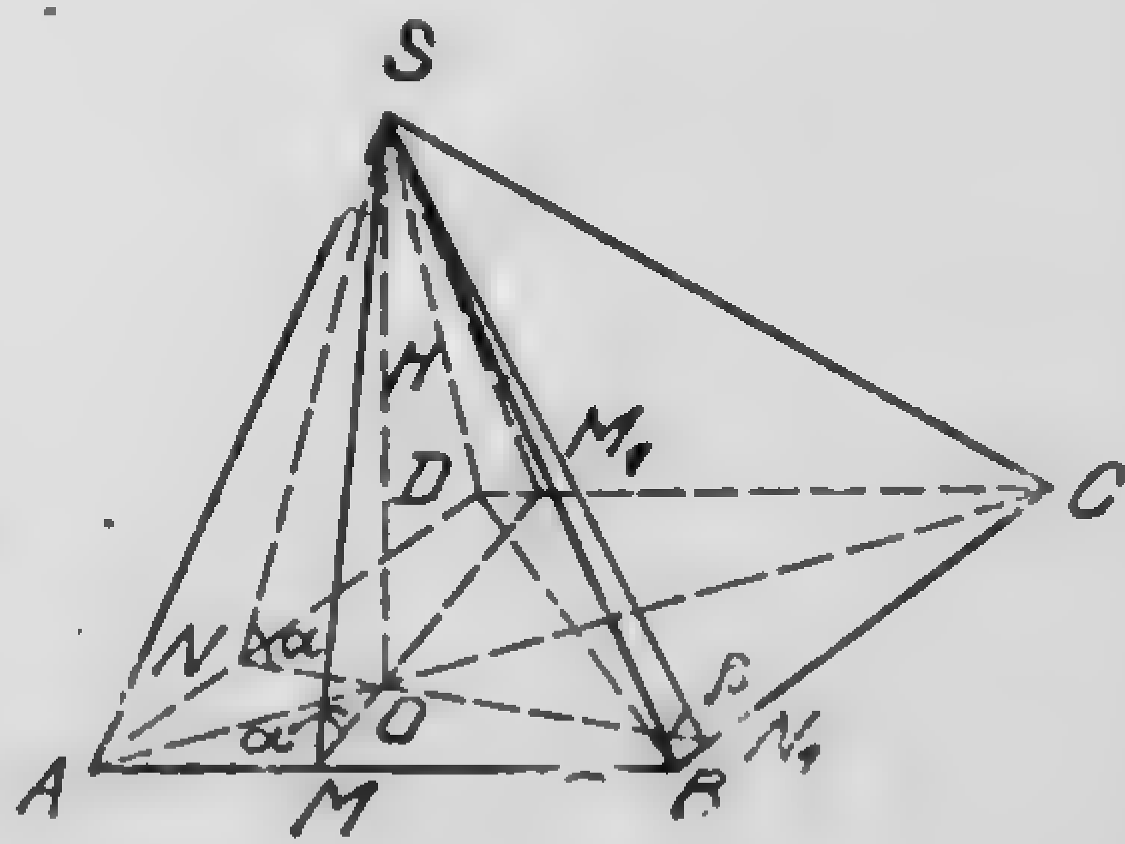
$$AN = CN\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = 2d\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Пирамиданын отурачағынын саһәси: $S_{от} = \frac{1}{2} BC \cdot AN = \frac{1}{2}\cdot 4d\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot 2d\cos\varphi\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha = 4d^2\cos^2\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Пирамиданын бүтүн јан үзләри отурачаг мүстәвиси илә јәни φ бучағы әмәлә кәтирдијиндән онун саһәсини $S_т = \frac{2S_{от}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$ дүстуруна көрә һесабламаг олар. Онда $S_т = 8d^2\cos\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

117. Тутаг ки, SO пирамиданын һүндүрлүјүдүр (шәкил 110). SMM_1, SNN_1 вә SN_1N икиүзлү бучагларын хәтти бучагларыдыр. MM_1 вә NN_1 парчалары исә ромбун һүндүрлүкләридир. Пирамида һүндүрлүјүнүн һара дүшдүјүнү тә'јин едәк. $\triangle SNO = \triangle SOM$ (SO катети ортаг вә ити



Шәкил 109



Шәкил 110

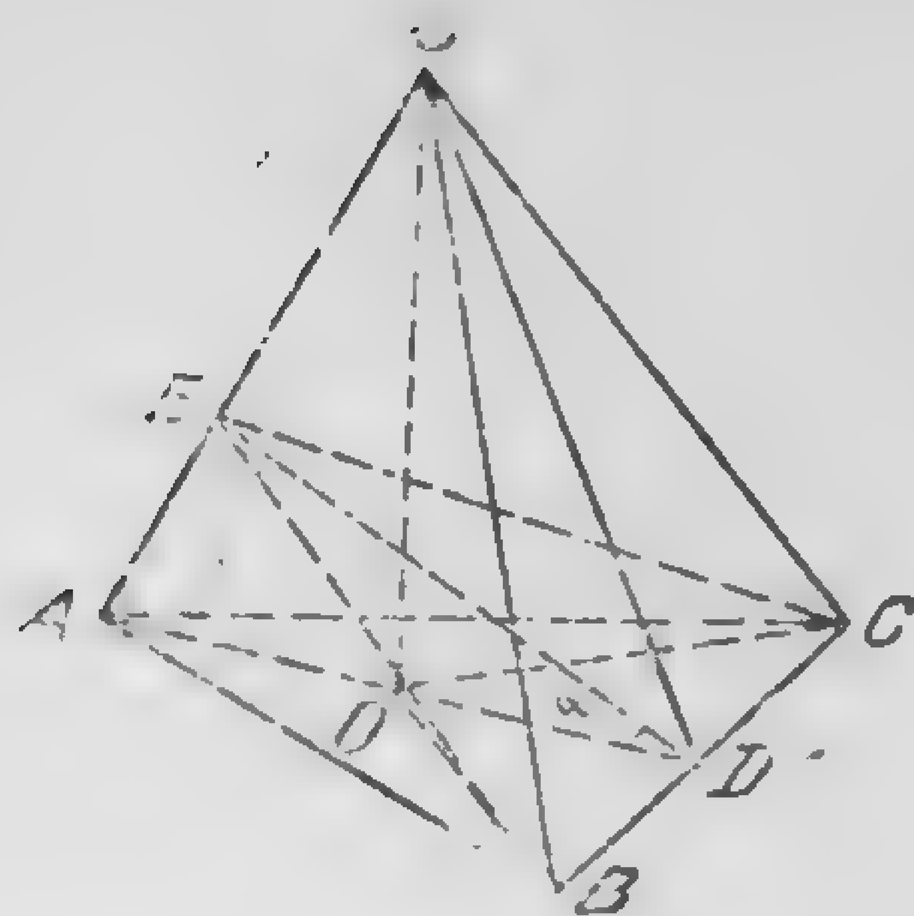
бучаглары бәрабәр $\angle SMO = \angle SNO$) үчүн $OM = ON$. Демәли, пирамида һүндүрлүјүнүн O отурачағы AC диагоналы үзәринә дүшүр. $ON_1 = NN_1 - ON$, $OM_1 = MM_1 - OM$ бәрабәрликләриндә $MM_1 = NN_1$ (јәни ромбун һүндүрлүкләри олдугу үчүн), $OM = ON$ олдуғундан $OM_1 = ON_1$. $\triangle SON_1 = \triangle SOM$ (SO катети ортаг, $ON_1 = OM_1$). Демәли, $\angle SM_1O = \angle SN_1O$ олур. SON_1 үчбучағында: $ON_1 = H\operatorname{ctg}\beta$, $\triangle SON$ үчбучағында: $ON = H\operatorname{ctg}\alpha$. Бурадан: $NN_1 = ON + ON_1 = H\operatorname{ctg}\alpha + H\operatorname{ctg}\beta = \frac{H\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Пирамиданын отурачағынын саһәси: $S_{от} = BC\cdot NN_1 = \frac{aH\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{aH^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. SNO үчбучағында: $SN = \frac{SO}{\sin\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha}$. SON_1 үчбучағында

$$SN_1 = \frac{SO}{\sin\beta} = \frac{H}{\sin\beta};\ S_т = S_{от} + 2S_{ASB} + 2S_{SCB} =$$

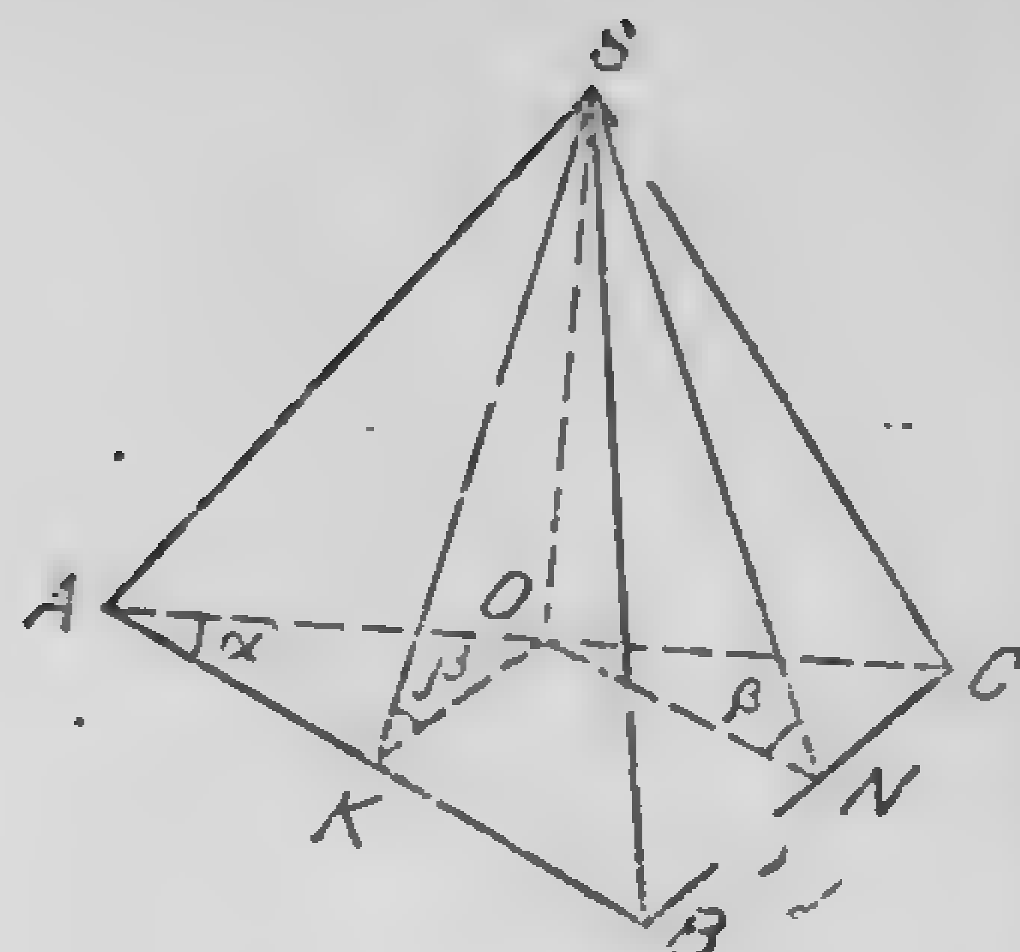
$$= aH(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) + \frac{aH}{\sin\alpha} + \frac{aH}{\sin\beta} = aH\left(\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta + 1}{\sin\beta}\right) = aH\left(\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\cos^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\right) =$$

$$= \frac{aH\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

118. ADE вә ASO дүзбучаглы үчбучагларында SAO бучағы ортаг олдуғундан $\angle ASO = \angle ADE$ олачагдыр (шәкил 111). ASD үчбучағы бәрабәрјанлы үчбучагдыр, онда $\angle ASD = 2\angle ASO = 2\alpha$. Верилән пирамиданын кәсији илә отурачағы арасындакы һиссәсинә тәпәси A нөгтәсиндә отурачағы BCE кәсији, о бири һиссәсинә исә тәпәси верилән пирамиданын тәпәси отурачағы BCE олан пирамида кими көтүрмәк олар; бурадан ајғын олараг AE вә SE парчалары һәмин пирамидаларын һүндүрлүкләри олачагдыр. Ахтарылан һиссәнин һәчми:



Шәкил 111



Шәкил 112

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}BC\cdot ED\right)\cdot SE.$$

Икинчи һиссәнин һәчми: $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}BC\cdot ED\right)\cdot AE.$

Биринчи бәрабәрлији икинчи бәрабәрлијә бөлсәк:

$$V_1 : V = SE : AE \qquad (1)$$

алырыг. DSE дүзбучаглы үчбучағында $SE = ED\operatorname{ctg}\times$ $\times\angle ESD = ED\operatorname{ctg}2\alpha$. AED дүзбучаглы үчбучағында: $AE = ED\operatorname{tg}\alpha$. AE вә SE-нин гијмәтләрини (1)-дә јеринә јазсаг:

$$V_1 : V = (ED\operatorname{ctg}2\alpha):(ED\operatorname{tg}\alpha),\quad V_1 : V = \operatorname{ctg}2\alpha : \operatorname{tg}\alpha,$$

бурадан

$$V_1 = \frac{V\operatorname{ctg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = V\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha.$$

119. Пирамиданын SO һүндүрлүјүнү чәкәк (шәкил 112). Гаршылыглы перпендикулјар ики мүстәвидән биринә перпендикулјар вә о бири мүстәви илә ортаг нөгтәси олан дүз хәтт һаггында олан теоремә көрә пирамиданын һүндүрлүјү бүтүнлүкдә ASC мүстәвиси үзәринә дүшәчәкдир. Демәли, пирамиданын һүндүрлүјү AC һипотенузун үзәринә дүшүр. $OK\perp AB$ чәкәк, S нөгтәсини K нөгтә си илә бирләшдирәк. Онда $SK\perp AB$ олур (үч перпендикулјар теореминә көрә). Демәли, SKO бучағы хәтти бучагдыр. Һәмин гајда үзрә SNO хәтти бучағыны гуруруг. SKO вә SNO дүзбучаглы үчбучагларында SO катети ортаг, $\angle SKO =$

$=\angle SNO$ олдуғундан үчбучаглар бәрабәрдир. Демәли, $KO = ON$ олур. $BNOK$ дүзбучаглысында $KO = ON$ олдуғундан дүзбучаглы квадратдыр. ABC үчбучағында: $BC = AC\sin\alpha = c\sin\alpha$, $AB = AC\cos\alpha = c\cos\alpha$. AKO үчбучағында $AK = OK\operatorname{ctg}\alpha$. OK парчасыны тә'јин едәк: $AB = AK + KB = OK\operatorname{ctg}\alpha + KB$. Лакин бурада $AB = c\cos\alpha$, $KB = OK$ олдуғундан һәмин бәрабәрлик ашағыдакы кими олур: $OK\operatorname{ctg}\alpha + OK = c\cos\alpha$, $OK(\operatorname{ctg}\alpha + 1) = c\cos\alpha$; $OK(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}45^\circ) = c\cos\alpha$, бурадан:

$$OK = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}.$$

SOK үчбучағындан $SK = OK\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$.

Пирамиданын һәчми: $V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(BC\cdot AB)\cdot SO\right)$,

$$V = \frac{\sqrt{2}c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{48\sin(\alpha+45^\circ)}.$$

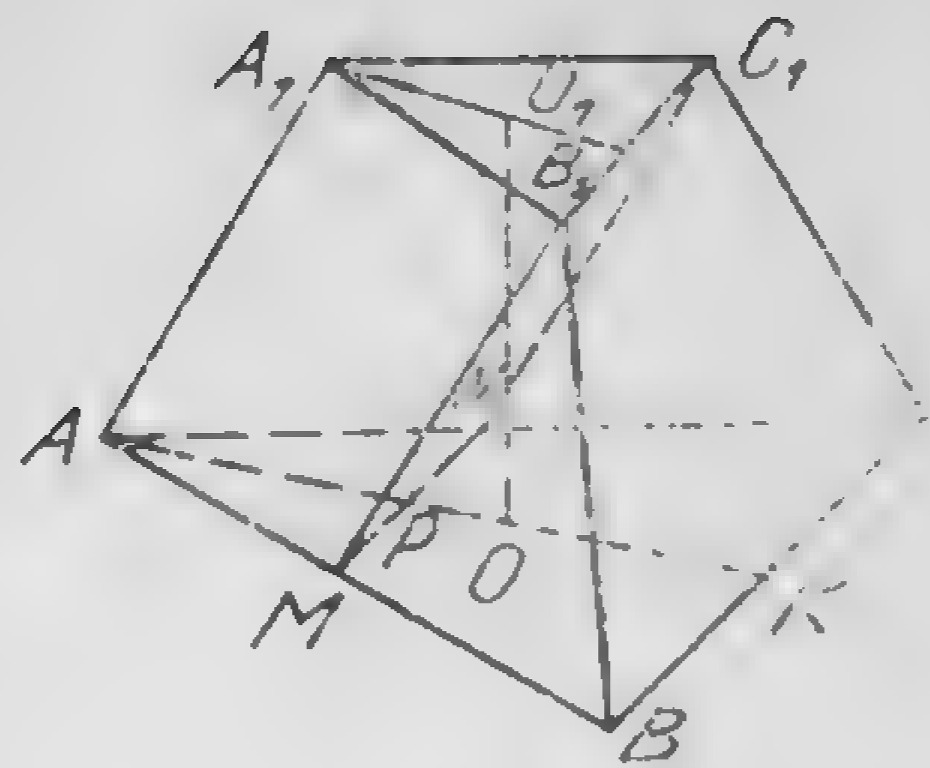
120. $ABCA_1B_1C_1$ кәсик пирамидасы верилир. $BC : B_1C_1 = 1:2$, B_1C_1NM мүстәвиси AA_1 тилинә паралелдир (шәкил 113). $B_1C_1 \parallel MN$, $MB_1 \parallel AA_1$, $NC_1 \parallel AA_1$.

Демәли, $AMNB_1C_1A_1$ чохүзлүсү призмадыр. Тутаг ки, OO_1 пирамиданын, AP парчасы AMN үчбучағынын, AK исә ABC үчбучағынын һүндүрлүјүдүр. $MN = B_1C_1 = x$, $BC = 2x$ гәбул едәк.

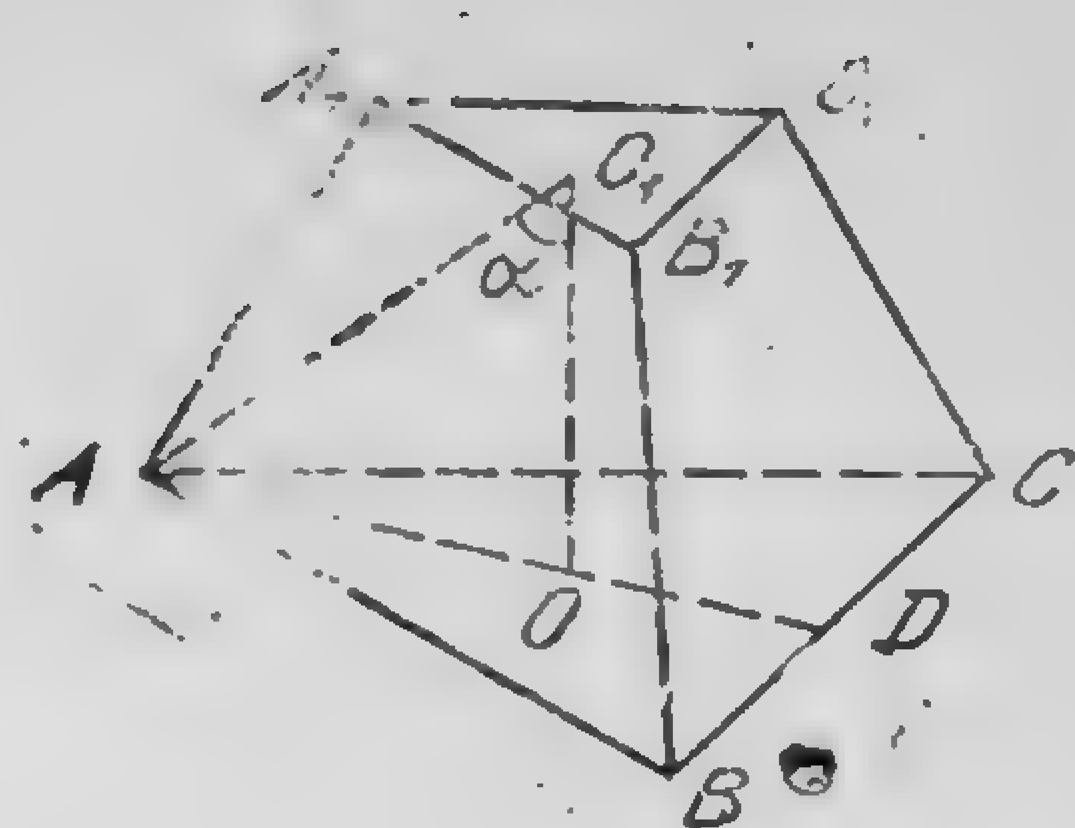
Призманын һәчми: $V_1 = \frac{1}{2}AP\cdot MN\cdot OO_1 = \frac{1}{2}AP\times x\cdot OO_1$; $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ олдуғу үчүн $\frac{AK}{AP} = \frac{BC}{MN}$ вә а $\frac{AK}{AP} = \frac{2x}{x}$, $AK = 2AP$. Кәсик пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\cdot OO_1\left(\frac{1}{2}BC\cdot AK + \frac{1}{2}MN\cdot AP + \sqrt{\left(\frac{1}{2}BC\cdot AK\right)\cdot\left(\frac{1}{2}MN\cdot AP\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot OO_1\left(\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2AP + \frac{1}{2}x\cdot AP + \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2AP\left(\frac{1}{2}x\cdot AP\right)}\right) = \frac{7}{6}\cdot OO_1\cdot x\cdot AP.$$



Шәкил 113



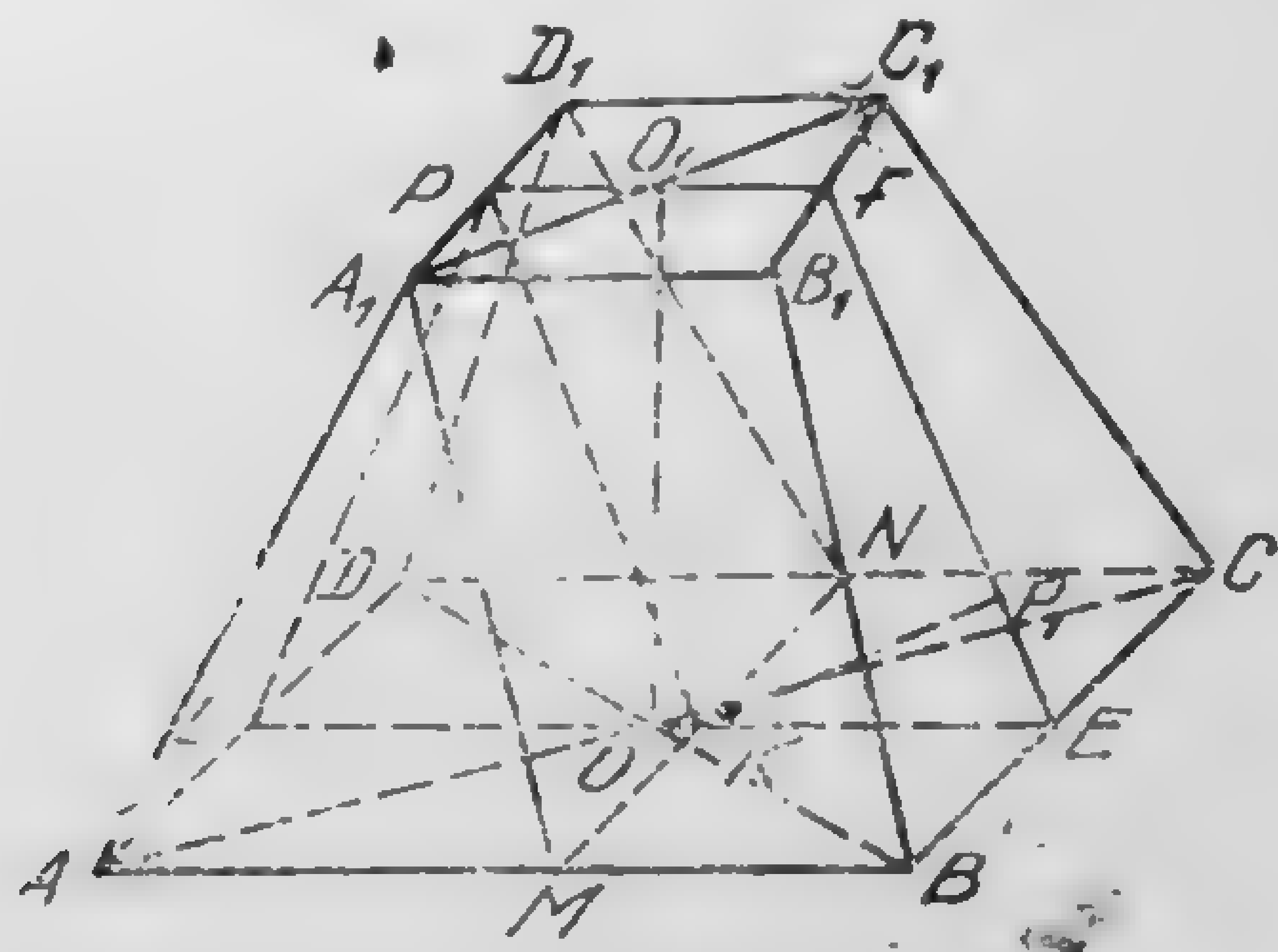
Шәкил 114

Пирамиданын икинчи һиссәсинин һәчми: $V_2 = V - V_1 =$
$$= \frac{7}{6} \cdot OO_1 \cdot x \cdot AP - \frac{1}{2} \cdot OO_1 \cdot x \cdot AP = \frac{2}{3} \cdot OO_1 \cdot x \cdot AP.$$
Пирамида һиссәләринин һәчмләри нисбәти:
$$V_1 : V_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot AP \cdot x \cdot OO_1\right) : \left(\frac{2}{3} \cdot OO_1 \cdot x \cdot AP\right),$$
бурадан
$$V_1 : V_2 = 3:4.$$

121. *Чаваб:* $V = \frac{2}{3}(a + b + \sqrt{ab}) \sqrt{\frac{a}{3\sqrt{3}}} \operatorname{ctg} \alpha.$

Көстәриш. 114-чү шәкилдән истифадә един.

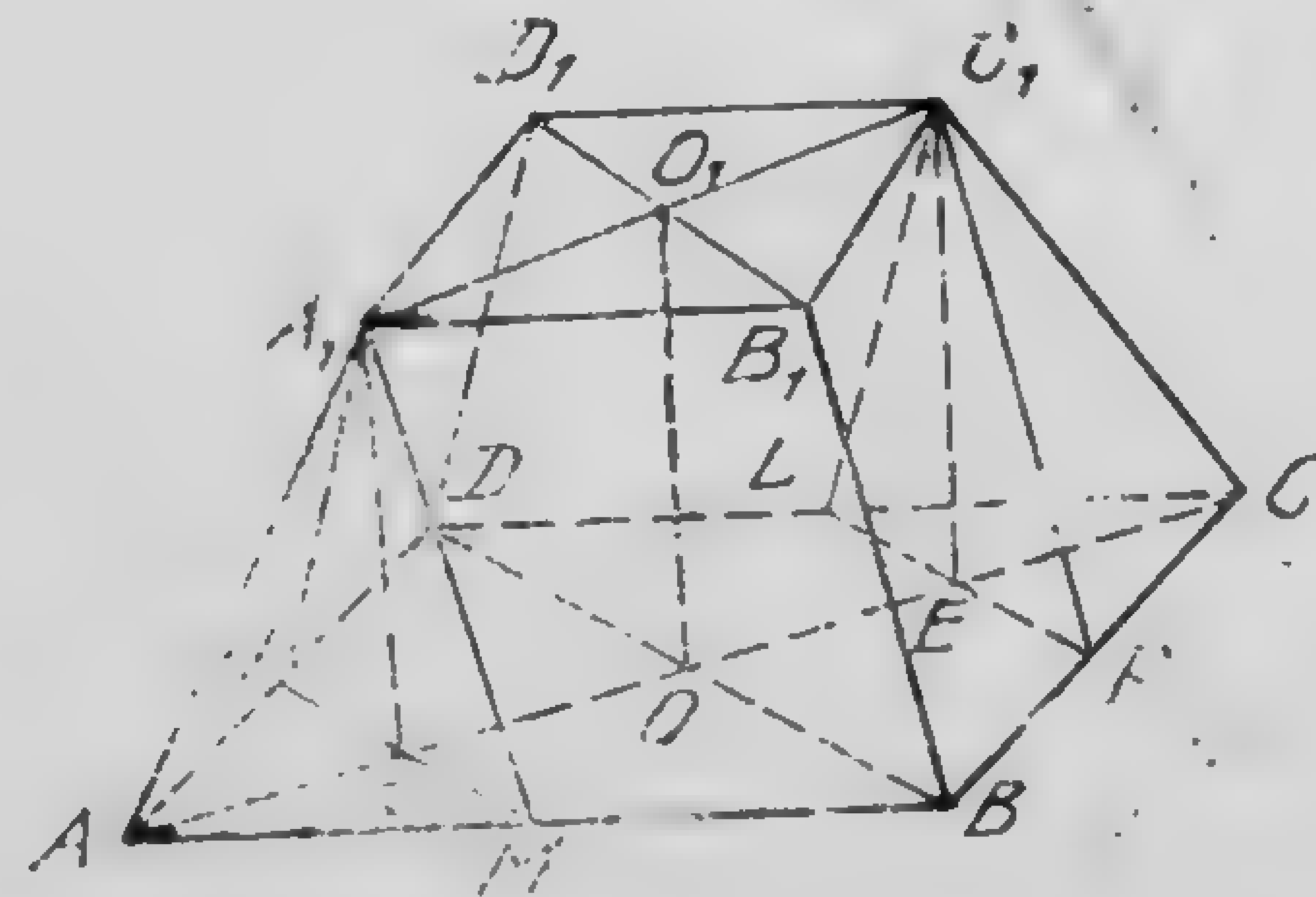
122. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүзкүн дөрдбучаглы кәсик пирамидадыр. $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $OO_1 = h$, MND_1A_1 мүстәвиси BCC_1B_1 үзүнә паралелдир (шәкил 115).



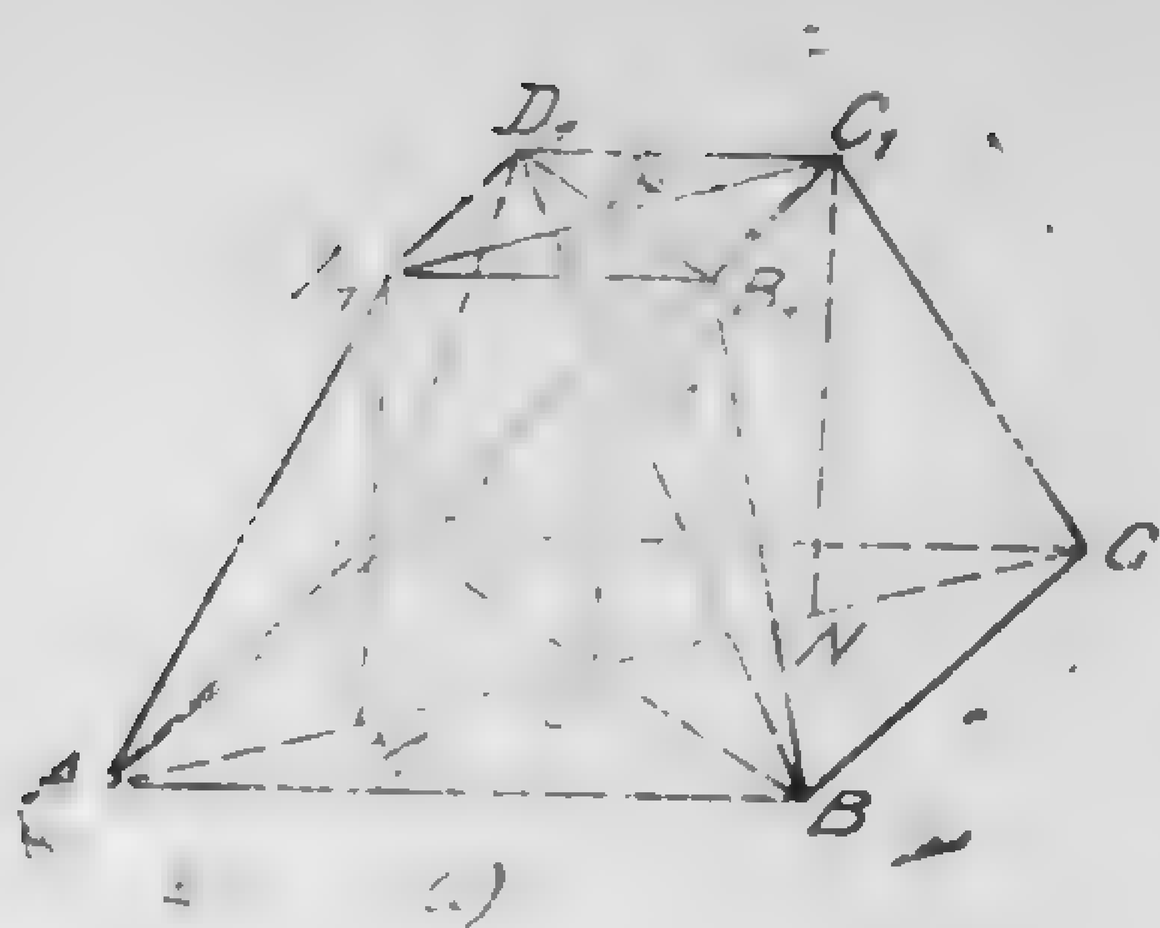
Шәкил 115

A_1MND_1 кәсијинин BB_1C_1C үзүнә бәрабәр олдуғуну исбат едәк. $A_1M \parallel BB_1$, $D_1N \parallel CC_1$, $MN \parallel A_1D_1$, $MN \parallel BC$ олур. BMA_1B_1 дөрдбучаглысында $A_1M \parallel BB_1$ вә $BM \parallel A_1B_1$ олдуғундан дөрдбучаглы паралелограмдыр. Һәмин сәбәбә көрә $BMNC$ вә CND_1C_1 дөрдбучаглылары да паралелограмдыр. MND_1A_1 вә BCC_1B_1 трапесијаларында $MN = BC$, $A_1M = BB_1$, $ND_1 = CC_1$, $A_1D = B_1C_1$ (паралелограмын гаршы тәрәфләри олдугу үчүн) олдуғундан бу трапесијалар бир-бирилә бәрабәрдир. $A_1B_1 = D_1C_1 = MB = NC$ (паралел мүстәвиләр арасында галан паралел хәтләр олдугу үчүн). Бурадан ајдындыр ки, $MND_1A_1B_1C_1CB$ фигуру призмадыр. Отурачағын OE вә пирамиданын EF апофемләриндән $EFPL$ мүстәвисини кечирәк. Бу мүстәви BC-јә перпендикулјар олачагдыр ($OE \perp BC$, $EF \perp BC$ олдуғу үчүн). Демәли, $EFPL$ мүстәвиси пирамиданын отурачагларына перпендикулјардыр, $PK = EF$ олур (ики паралел мүстәвинин үчүнчү мүстәви илә кәсишмә хәтләри олдугу үчүн). Бурадан $KPEF$ дөрдбучаглысы паралелограм олур. Призманын KP_1 һүндүрлүјүнү чәкәк. Призманын һәчми:
$$V = \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot EF \cdot KP_1 = \frac{a + b}{2} \cdot EF \cdot KP_1. \qquad (1)$$

$KEFP$ паралелограмын саһәси: $S_1 = KE \cdot OO_1 = bh$. Һәмин саһә: $S_1 = EF \cdot KP_1$, бурадан $EF \cdot KP_1 = bh$ вә $KP_1 = \frac{bh}{EF}$, бу бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг:
$$V = \frac{a + b}{2} \cdot EF \cdot \frac{bh}{EF} = \frac{a + b}{2} \cdot bh.$$



Шәкил 116



Шəкил 117

123. *Чаваб.* $V = abh$. Көстəриш. 116-чы шəкилдəн истифадə един.

124. $BD \parallel B_1D_1$ олдуғундан O_1O вə O_1O_2 парчалары бир дүз хəтт үзəриндəдир, јə'ни OO_2 парчасы трапесијанын һүндүрлүјүдүр (шəкил 117). Дикəр тəрəфдəн бу парча дүзкүн пирамиданын отурачагларынын мəркəзлəриндəн кечдији үчүн пирамиданын да һүндүрлүјү олачагдыр. Демəли, кəсик пирамиданын диагоналларынын кəсишмə нөгтəси пирамиданын отурачагларынын мəркəзиндəн кечəн һүндүрлүјү үзəринə дүшүр. Пирамиданын A_1M вə C_1N һүндүрлүклəрини чəкəк. AO_1O вə AC_1N дүзбучаглы үчбучагларында бир ити бучагы ортаг олдуғу үчүн бу үчбучаглар охшардыр. AA_1C_1C трапесијасында $AC = AM + MN + NC = 2AM + A_1C_1$ вə ја

$$a\sqrt{2} = 2AM + b\sqrt{2},\quad AM = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2},$$

бурадан

$$NC = AM = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2};\quad AN = AC - NC = a\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2} = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}.$$

$\triangle AO_1O \sim \triangle ACN$ олдуғу үчүн $\frac{OO_1}{C_1N} = \frac{AO}{AN}$ вə ја $OO_1 = h\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}(a+b)}$. Бурадан $OO_1 = \frac{ah}{a+b}$;

$O_1O_2 = CO_2 - OO_1 = h - \frac{ah}{a+b} = \frac{bh}{a+b}$. Верилəн кəсик пирамиданын һəчми: $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$.

Отурачагы верилəн кəсик пирамиданын алт отурачагы вə үст отурачагы олан пирамидаларын һəчмлəри уйғун олараг:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2\cdot\frac{ah}{a+b} = \frac{a^3h}{3(a+b)},\quad V_2 = \frac{1}{3}b^2\cdot\frac{bh}{a+b} = \frac{b^3h}{3(a+b)}.$$

Ахтарылан һəчм: $V_3 = V - (V_1 + V_2) = \frac{1}{3}h(a^2 + ab +$

$$+ b^2) - \left[\frac{a^3h}{3(a+b)} + \frac{b^3h}{3(a+b)}\right] = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2) -$$

$$- \frac{h}{3(a+b)}\cdot(a+b)(a^2 - ab + b^2) = \frac{2}{3}abh.$$

125. Фəрз едəк ки, кəсик пирамиданын үст вə алт отурачагларынын саһəлəри уйғун (шəкил 118) олараг S_1 вə S_2-јə бəрабəрдир, орта кəсијин саһəси исə S_3 олсун. $BC = mx$, $B_1C_1 = nx$, $OO_1 = h$ гəбул едəк. $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$ (пирамидада паралел кəсиклəрин хассəлəринə көрə). B_2C_2 парчасы BB_1C_1C трапесијасынын орта хəтти олдуғу үчүн $B_2C_2 = \frac{BC + B_1C_1}{2} = \frac{(m+n)x}{2}$ олур. $\frac{S_1}{S_2} =$

$$= \left(\frac{B_1C_1}{BC}\right)^2 \text{ вə ја } \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{nx}{mx}\right)^2,\quad S_2 = \frac{S_1m^2}{n^2},$$

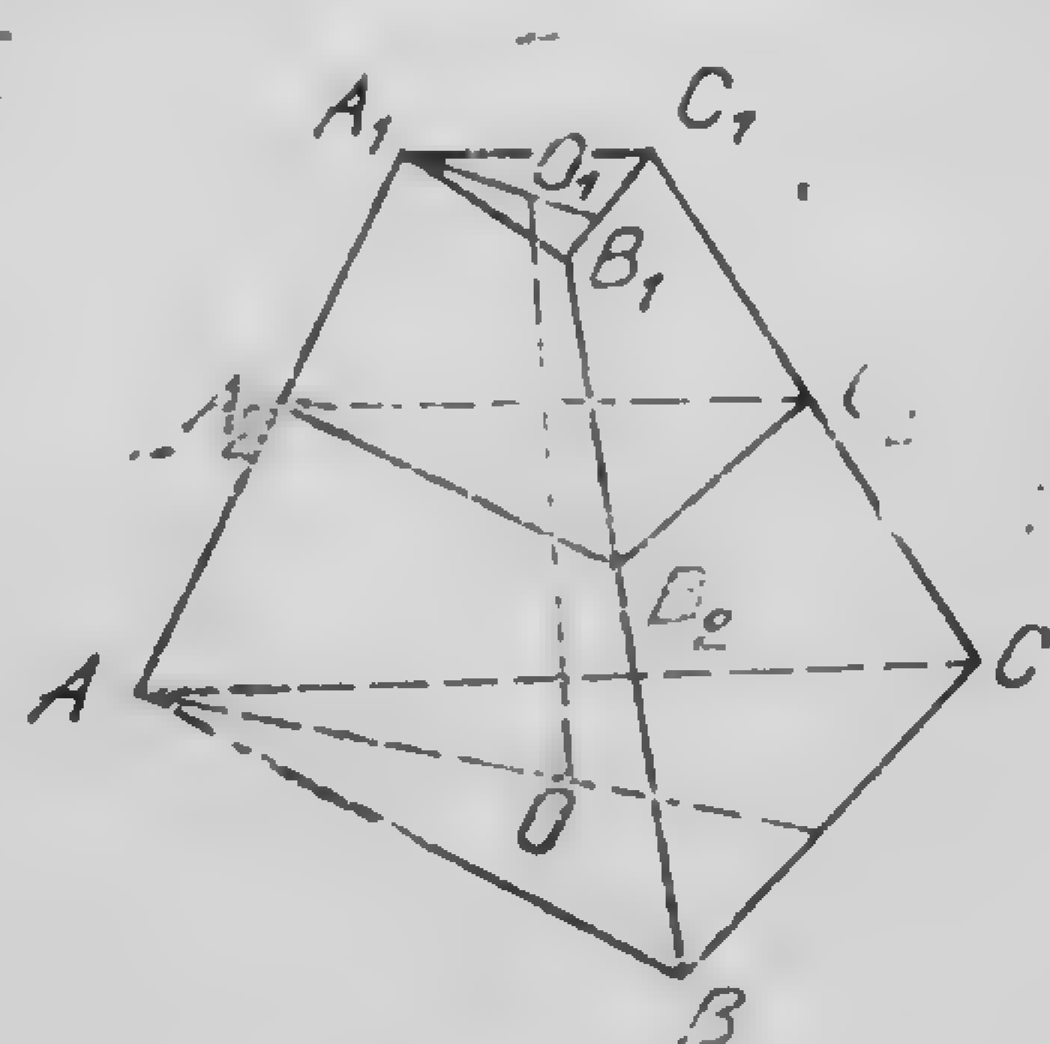
$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{(nx)^2}{\left[\frac{(m+n)x}{2}\right]^2},$$

$S_3 = \frac{S_1(m+n)^2}{4n^2}$ (охшар үчбучагларын саһəлəри нисбəти уйғун тəрəфлəрин квадратлары нисбəтинə бəрабəр олдуғуна көрə). Кəсик пирамиданын үст һиссəсинин һəчми:

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}(S_3 + S_1 + \sqrt{S_3S_1}) = \frac{h}{6}\times$$

$$\times\left[\frac{S_1(m+n)^2}{4n^2} + S_1 + \sqrt{\frac{S_1^2(m+n)^2}{4n^2}}\right],$$

бурадан



Шəкил 118

$$V_1 = \frac{S_1h(m^2 + 7n^2 + 4mn)}{24n^2}.$$

Икинчи һиссәнин һәчми $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2}(S_2 + S_3 + \sqrt{S_2S_3}) =$

$$= \frac{h}{6}\left[\frac{S_1m^2}{n^2} + \frac{S_1(m+n)^2}{4n^2} + \sqrt{\frac{S_1m^2}{n^2} \cdot \frac{S_1(m+n)^2}{4n^2}}\right].$$

Бурадан:

$$V_2 = \frac{S_1h(7m^2 + n^2 + 4mn)}{24n^2}.$$

Һиссәләрин һәчмләри нисбәти:

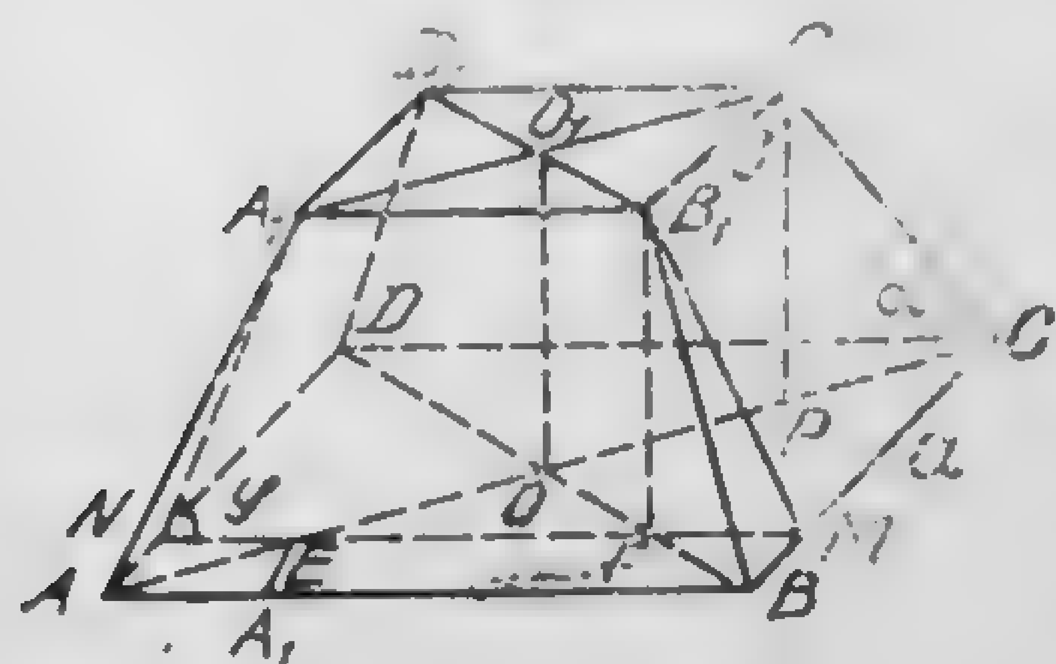
$$V_2 : V_1 = \frac{S_1h(7m^2 + n^2 + 4mn)}{24n^2} : \frac{S_1h(m^2 + 7n^2 + 4mn)}{24n^2},$$

$$V_1 : V_2 = (7m^2 + n^2 + 4mn) : (m^2 + 4mn + 7n^2).$$

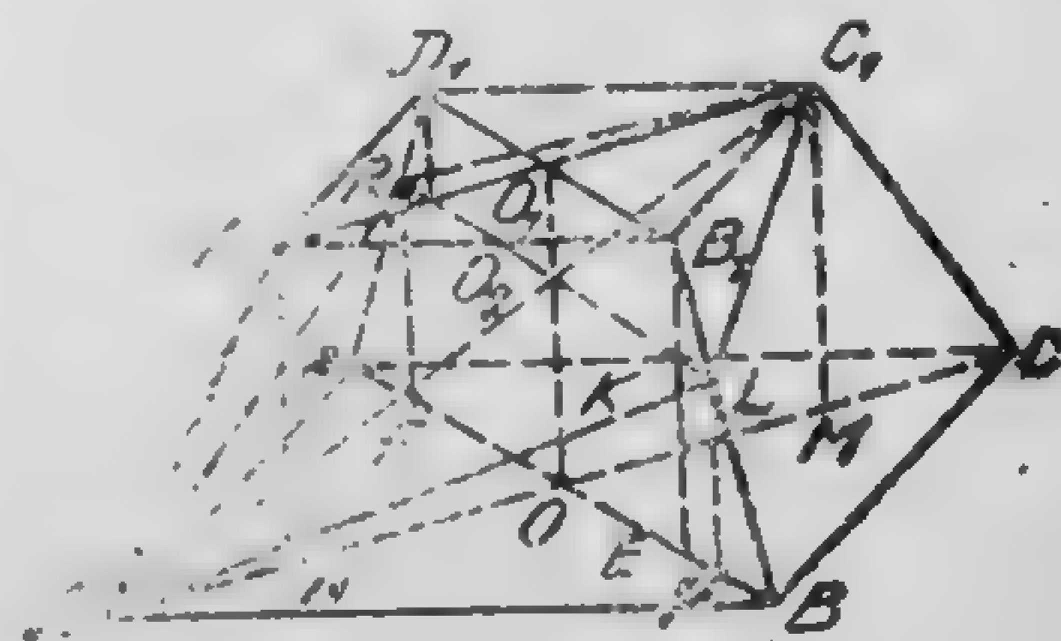
126. *Чаваб:* $V = \frac{\sqrt{2}}{6}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha \cdot \varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha)$.

Көстәриш. O вә O_1 отурачагларын диагоналларынын кәсишмә нөгтәләри, A_1C_1 вә AC дүз хәтләрини исә ики паралел мүстәвисинин үчүнчү AA_1C_1C мүстәвиси илә кәсишмә хәтти кими көтүрүн. Она көрә $A_1C_1 \parallel AC$ (шәкил 119), онда AA_1C_1C фигуру бәрабәрјанлы трапесија олачагдыр.

127. BB_1D_1D мүстәвиси (шәкил 120) ALC_1R мүстәвисинә паралел олан BD дүз хәтдән кечиб, ону кәсдији үчүн $LR \parallel BD$. BB_1D_1D трапесијасы бәрабәрјанлы вә $BD \parallel LR$ олдугу үчүн $B_1L = D_1R$, $LB = RD$. O вә O_1 мәркәзләрини бирләшдирән OO_1 парчасы пирамиданын һүндүрлүјү олачагдыр. OO_1 парчасы BB_1D_1D бәрабәрјанлы трапесијанын симметрија оху олдуғундан вә $RL \parallel BD$ олдугу үчүн O_2 нөгтәси RL-ин орта нөгтәсидир. ABL вә ADR үчбучагларында: $AB = AD$, $BL = DR$,



Шәкил 119



Шәкил 120

$\angle ABL = \angle ADR$ олдуғундан үчбучаглар бәрабәрдир, бурадан $AL = AR$.

Демәли, C_1LR үчбучағы бәрабәрјанлыдыр. AO_2 парчасы бәрабәрјанлы үчбучағын медианы олдуғундан һәм дә һүндүрлүкдүр. Һәмин сәбәбә көрә $C_1O_2 \perp RL$. Кәсијин саһәси: $S = \frac{1}{2}AC_1 \cdot LR$.

$$AC_1 = AN + NM + MC = 2MC + NM = 2MC + A_1C_1$$

вә ја

$$a\sqrt{2} = 2MC + b\sqrt{2}, \quad MC = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}.$$

Һәмин сәбәбә көрә

$$BE = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}, \quad AM = AC - MC = a\sqrt{2} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2} = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}.$$

AMC дүзбучаглы үчбучағында:

$$AC_1^2 = AM^2 + MC_1^2, \; AC_1^2 = \left[\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}\right]^2 + h^2.$$

$AC = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2} \cdot \triangle AMC_1 \backsim \triangle AO_2O$ олдуғу үчүн $OO_2 = \frac{C_1M \cdot AO}{AM} = \frac{ah}{a+b}$, бурадан $KE = OO_2 = \frac{ah}{a+b}$, $B_1K = OO_1 - KE = h - \frac{ah}{a+b} = \frac{bh}{a+b}$. $\triangle B_1KL \backsim \triangle B_1EB$ олдуғу үчүн $KL = \frac{BE \cdot B_1K}{B_1E} = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2} \cdot \frac{bh}{a+b} \cdot \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{2}(a-b)b}{2(a+b)}$. $RL = RF_1 + F_1K + KL = 2KL + F_1K = 2 \times \frac{\sqrt{2}(a-b)b}{2(a+b)} + \sqrt{2}b = \frac{2\sqrt{2}ab}{a+b}$.

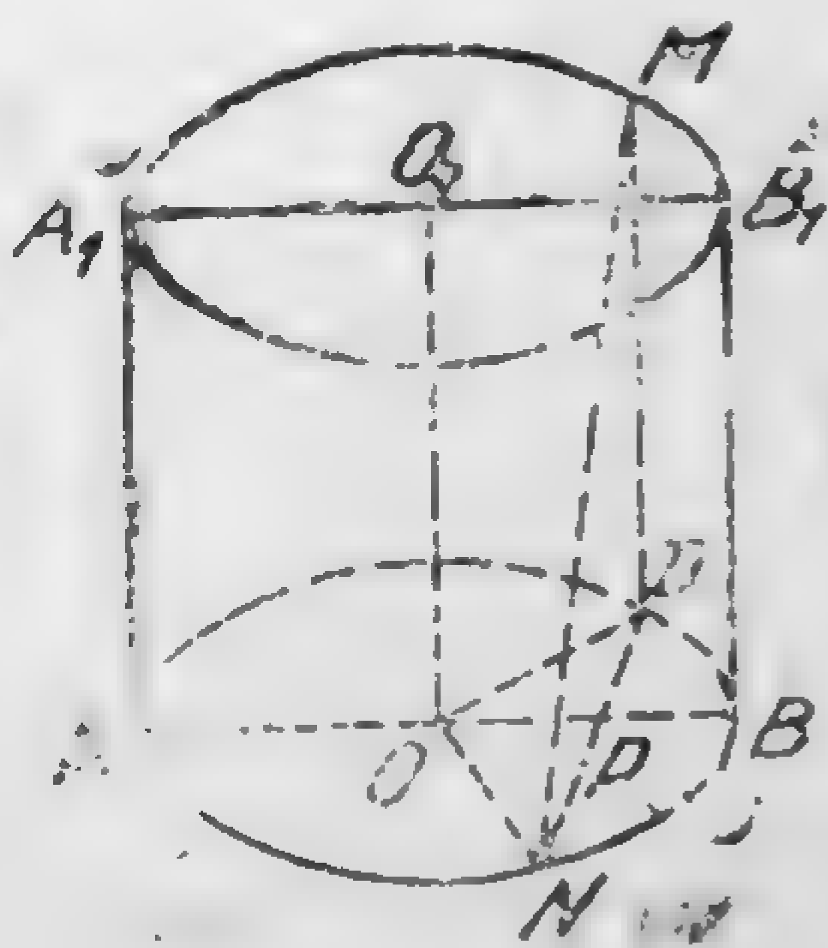
Кәсијин саһәси:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2} =$$

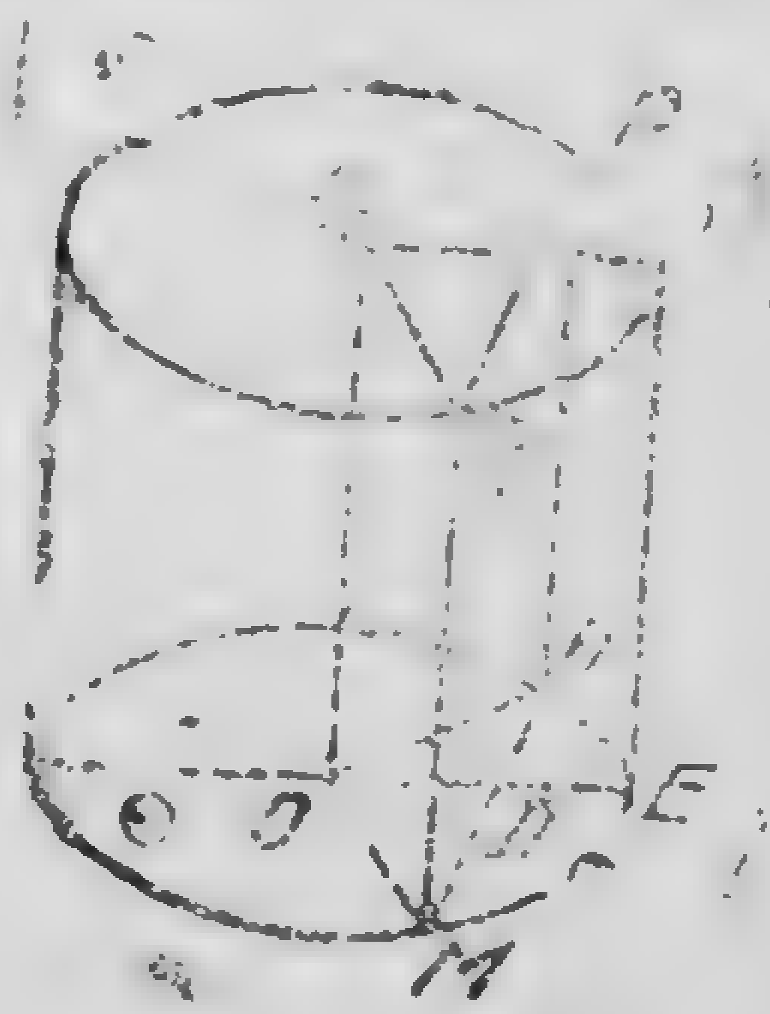
$$= \frac{\sqrt{2}ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2}.$$

128. ABB_1A_1 силиндрин ох кәсијидир, бу ох кәсији квадратдыр, $AO = R$, $\angle MND = \alpha$ (шәкил 121). Тутаг ки, MN дүз хәтт верилән хәтт, MD силиндрин һүндүрлүјү, OO_1 исә силиндрин охудур. Онда MN дүз хәтти илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучаг MND олачагдыр (дүз хәтлә мүстәви арасындакы бучағын тә'рифинә көрә). OP парчасы MND мүстәвисинә перпендикулјардыр. OP парчасы бүтүнлүкдә O чеврәси мүстәвиси үзәринә дүшүр. Демәли, $OP \perp ND$ ејни заманда OP парчасы MND мүстәвисинә перпендикулјар олдуғундан онун үзәриндә олан MN парчасына да перпендикулјар олур. OP парчасы ODN бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдуғундан һәм дә медиандыр. Она көрә $NP = PD$. Шәртә көрә $BB_1 = AB$. Демәли, $BB_1 = 2R$ олур. Буна көрә дә $MD = 2R$ олур. MND үчбучағында: $ND = MD \operatorname{ctg} \alpha = 2R \operatorname{ctg}\alpha$. Бурадан $NP = \frac{1}{2} ND = \frac{1}{2} \cdot 2R \operatorname{ctg}\alpha = R \operatorname{ctg} \alpha$. OPN үчбучағында $OP = \sqrt{ON^2 - PN^2} = \sqrt{R^2 - (R \operatorname{ctg}\alpha)^2} = R\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{R\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{R\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

129. OO_1 силиндрин охудур. $OO_1 = H$, $MNPQ$ кәсији квадратдыр, $\angle MEN = \alpha$ (шәкил 122). O_1 нөгтәсини Q илә, O нөгтәсини исә M илә бирләшдирәк. $MQ \parallel OO_1$. Демәли, $OMQO_1$ дөрдбучаглысы дүзбучаглыдыр. Она көрә $QM = OO_1$; OO_1 отурачаг мүстәвисинә пер-



Шәкил 121



Шәкил 122

пендикулјар вә $MQ \parallel OO_1$ олдуғу үчүн MQ дә отурачаға перпендикулјар олур. Демәли, $MNPQ$ кәсији отурачаға перпендикулјардыр. $OD \perp MN$ чәкәк. Онда $MD = \frac{1}{2} MN$ олур (вәтәрә перпендикулјар олан диаметрин хассәсинә көрә). $\angle MON = \smile MEN = \alpha$. OD парчасы OMN бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдуғундан һәм дә тәнбөләндир. ODM дүзбучаглы үчбучағында:

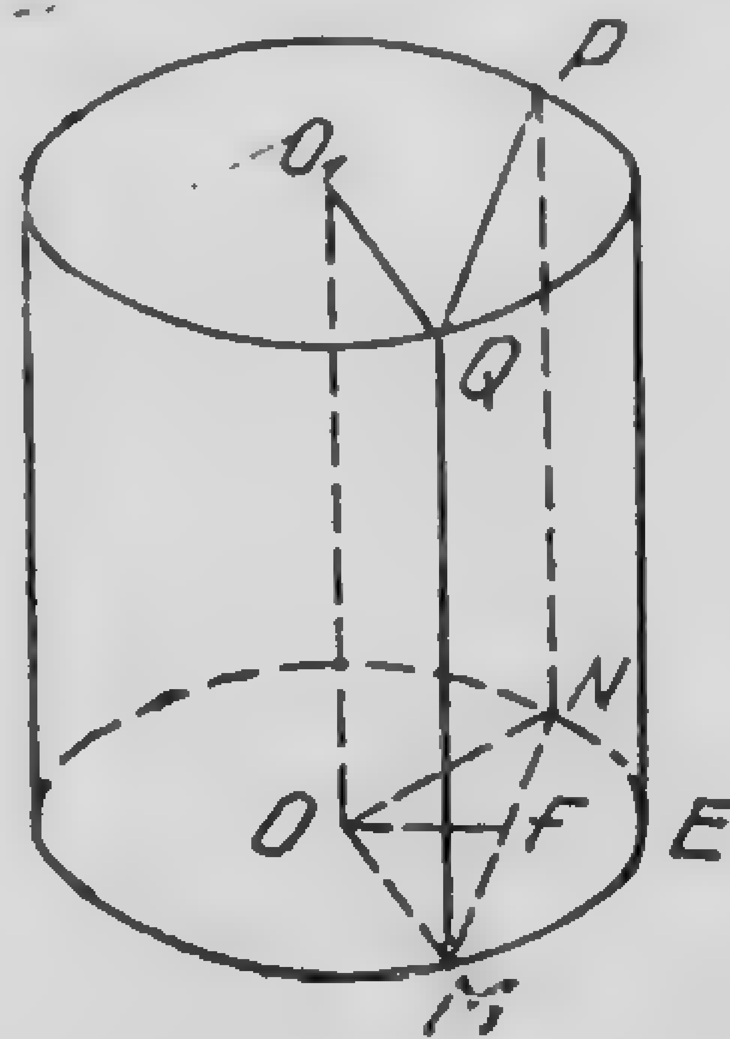
$$OD = DM \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} MN \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} H \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

130. *Ҹаваб:* $2hd \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

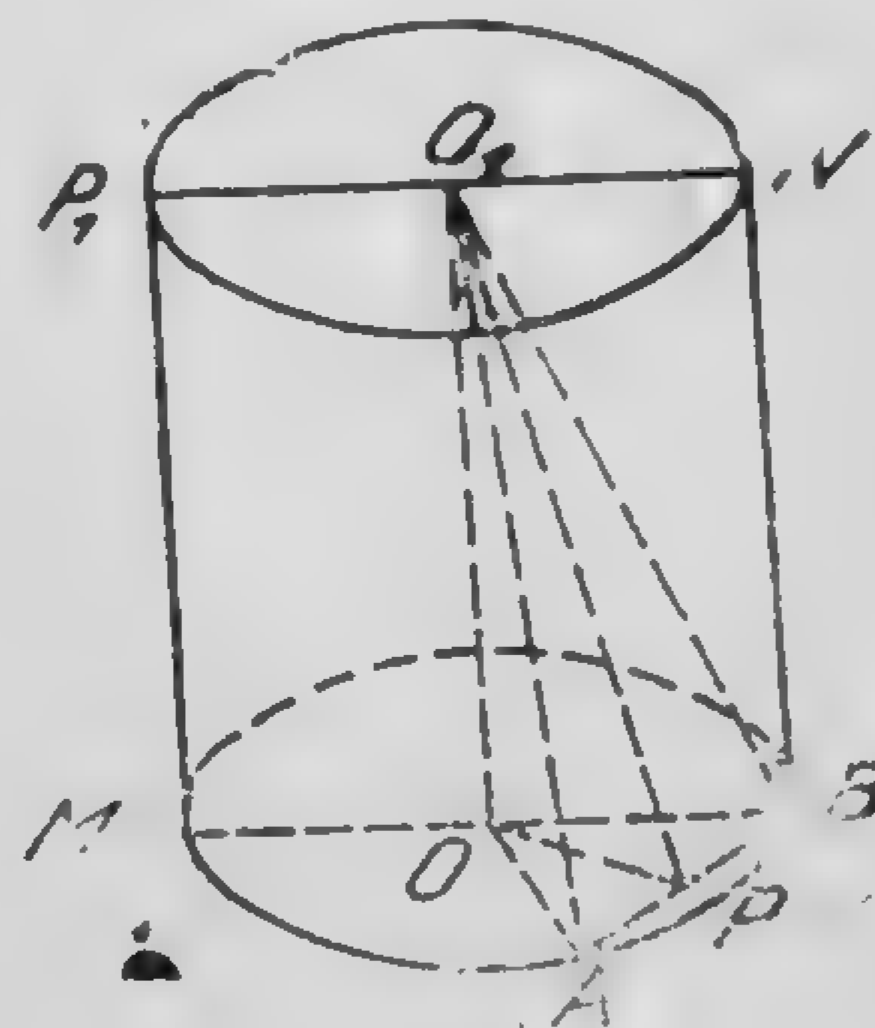
Көстәриш: O_1 нөгтәсини Q илә, O нөгтәсини исә M илә бирләшдирин. Онда $MQ \parallel OO_1$ вә OO_1 отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар олдуғундан QM дә һәмин мүстәвијә перпендикулјар олачагдыр (шәкил 123).

131. $MBNP_1$ силиндрин ох кәсији, AB исә силиндрин отурачаг чеврәси дахилинә чәкилмиш дүзкүн n-бучаглынын тәрәфидир. O вә O_1 нөгтәләри отурачагларын мәркәзләридир. $S_{AO_1B} = Q$, $\angle AO_1B = \alpha$ (шәкил 124).

Фәрз едәк ки, $AO = R$. Дүзкүн n бучаглынын мәркәзи бучағы: $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$. Фәрз едәк ки, P нөгтәси AB тәрәфинин орта нөгтәсидир. Онда OP вә O_1P парчалары бәрабәрјанлы үчбучагларын медианлары ол-



Шәкил 123



Шәкил 124

дугу үчүн $OP \perp AB$, $O_1P \perp AB$, $\angle AOP = \angle POB$, $\angle AO_1P = \angle PO_1B$ олур.

AOP үчбучағында:

$$AP = AO\sin\frac{180°}{n} = R\sin\frac{180°}{n}.$$

$$OP = AO\cos\frac{180°}{n} = R\cos\frac{180°}{n}.$$

Бурадан $AB = 2AP = 2R\sin\frac{180°}{n}$. AO_1P дүзбучағында:

$$O_1P = AP\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = R\sin\frac{180°}{n}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{AO_1B} = \frac{1}{2}AB\cdot PO_1 = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{180°}{n}\cdot R\sin\frac{180°}{n}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} =$$

$= R^2\sin^2\frac{180°}{n}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Шәртә көрә $R^2\sin^2\frac{180°}{n}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = Q$,

бурадан $R = \dfrac{\sqrt{Q}}{\sin\frac{180°}{n}\sqrt{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}}$.

OO_1P үчбучағында:

$$OO_1 = \sqrt{PO_1^2 - OP^2} = \sqrt{\left(R\sin\frac{180°}{n}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(R\cos\frac{180°}{n}\right)^2} =$$

$$= R\sqrt{\frac{\sin^2\frac{180°}{n}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{180°}{n}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{R\sqrt{\sin\left(\frac{180°}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Силиндрин һәҹми:

$$V = \pi\cdot AO^2\cdot OO_1 = \pi R^2\cdot\frac{R\sqrt{\sin\left(\frac{180°}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \pi\cdot\frac{Q}{\sin^2\frac{180°}{n}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sqrt{Q}}{\sin\frac{180°}{n}\sqrt{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\sin\left(\frac{180°}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\pi Q}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3\frac{180°}{n}}\cdot\sqrt{Q\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{180°}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180°}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

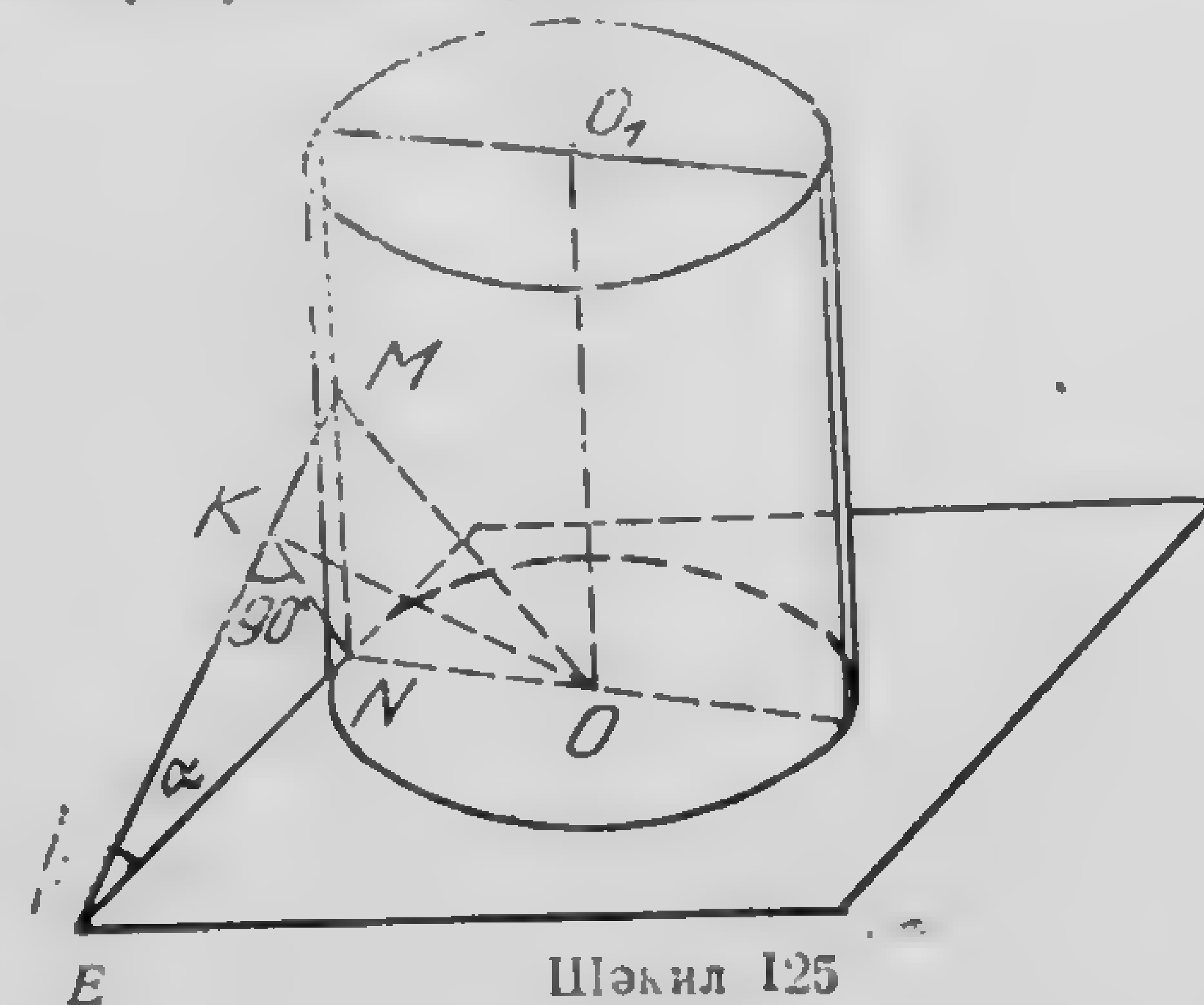
132. OO_1 силиндрин охудур, $ON = R$, $OM = d$, $\angle MEN = \alpha$ (шәкил 125).

Фәрз едәк ки, EN тохунан, OK исә силиндрин отурачаг мәркәзи илә дүз хәтт арасындакы мәсафәдир. O мәркәзини N тохунма нөгтәси илә бирләшдирәк, онда $ON \perp EN$ олачагдыр. MN парчасы силиндрин отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар олдуғундан ондан кечән MNE мүстәвиси дә силиндрин отурачағына перпендикулјар олур. $ON \perp EN$ вә $ON \perp MN$ олдуғу үчүн $ON \perp (MNE)$ олур. Демәли, NK парчасы OK парчасынын MEN мүстәвиси үзәриндәки проjексиjасы олачагдыр. $OK \perp ME$ олдуғундан $NK \perp ME$ (үч перпендикулјар теореминә көрә).

ONM дүзбучаглы үчбучағында:

$$MN = \sqrt{OM^2 - ON^2} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

MNK дүзбучаглы үчбучағында:



Шәкил 125

$$KN = MN\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha\sqrt{a^2 - R^2}$$

ONK-дан:

$$OK = \sqrt{ON^2 + KN^2} = \sqrt{R^2 + (\cos\alpha\sqrt{a^2 - R^2})^2} = \sqrt{R^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha}.$$

133. $ABCD$—кәсик конусун ох кәсијидир, $OO_1 = h$, $\angle DAO = \alpha$, $AD \perp BD$ (шәкил 126).

ABD дүзбучаглы үчбучагында $\angle ABD = 90° - \angle DAB$. Тутаг ки, OO_1 парчасы конусун отурачагларынын мәркәзләриндән чәкилән һүндүрлүк, DN исә D нөгтәсиндән чәкилән һүндүрлүкдүр. Онда DO_1 үст OB исә алт отурачагынын радиуслары олур. Конусун јан сәтһи:

$$S_{јан} = \pi(DO_1 + OB)\,AD = \pi(NO + OB)\cdot AD = \pi BN\cdot AD.$$

AND үчбучагындан:

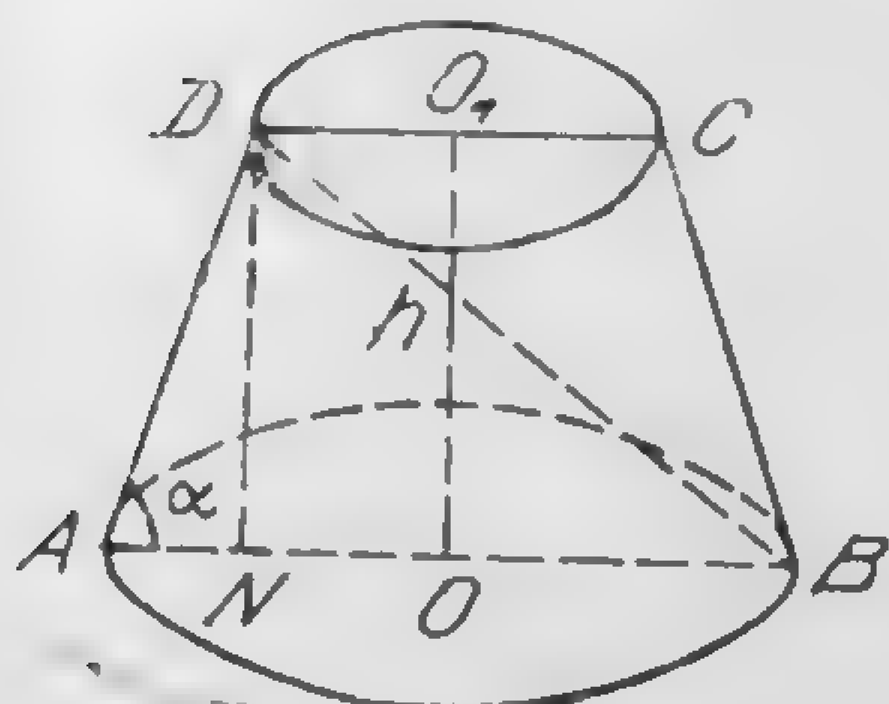
$$AD = \frac{DN}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

BDN-дән:

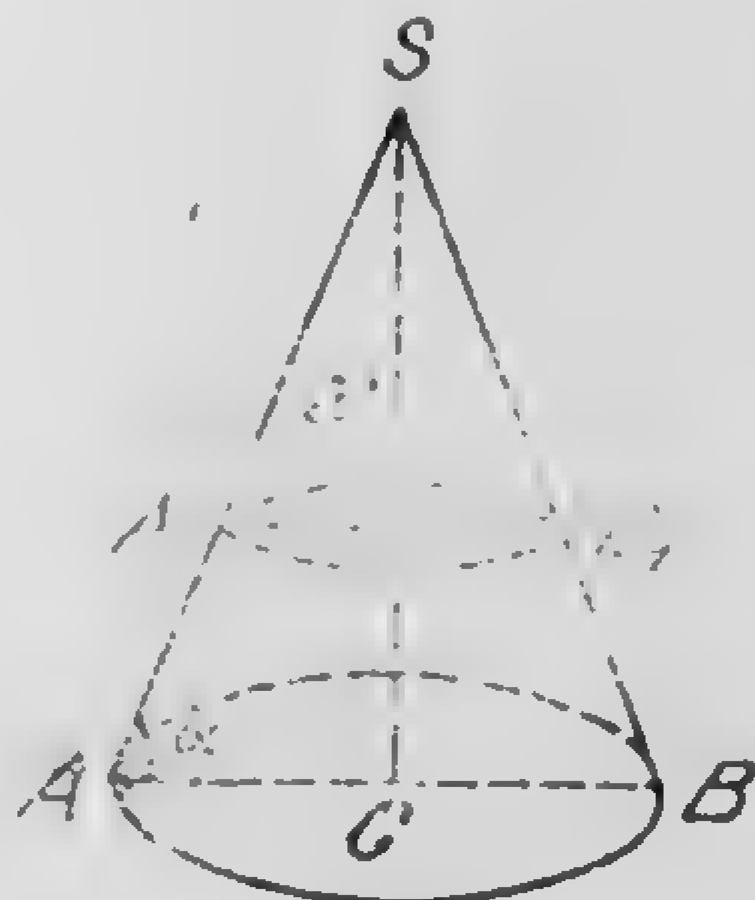
$$BN = DN\,\mathrm{ctg}(90° - \alpha) = h\,\mathrm{tg}\alpha.$$

$$S_{јан} = \pi\cdot BN\cdot AD = \pi h\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{\pi h^2}{\cos\alpha}.$$

134. Ох кәсији ASB олан конус верилир, $SO = H$, $\angle SAO = \alpha$, мәркәзи O_1 олан даирәнин мүстәвиси SO-ја перпендикулјардыр (шәкил 127). SO_1 парчасыны x илә ишарә едәк. Кәсән мүстәви илә конусун отурачаг мүс-



Шәкил 126



Шәкил 127

тәвиси паралелдир (ејни SO парчасына перпендикулјар олдуғуна көрә). A_1B_1 вә AB дүз хәтт парчалары ики паралел мүстәвинин үчүнчү мүстәви илә кәсишмә хәтләри олдуғундан $A_1B_1 \parallel AB$ олур. Она көрә $\angle SA_1B_1 = \angle SAB$ олачаглыр. ASO үчбучагында: $AS = \frac{SO}{\sin\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha}$, $AO = SO\,\mathrm{ctg}\alpha = H\,\mathrm{ctg}\alpha$.

Конусун там сәтһи: $S_т = \pi\cdot\frac{H}{\sin\alpha}\cdot H\,\mathrm{ctg}\alpha + \pi(H\,\mathrm{ctg}\alpha)^2 =$

$$= \frac{\pi H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\pi H^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\pi H\cos(1+\cos\alpha\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}.$$

A_1SO_1 үчбучагында:

$$A_1S = \frac{SO_1}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha},\quad A_1O_1 = SO_1\,\mathrm{ctg}\alpha = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

олур. Ох кәсији A_1SB_1 олан конусун јан сәтһи:

$$S_{јан} = \pi\cdot x\cdot\mathrm{ctg}\alpha\cdot\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{\pi x^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Шәртә көрә

$$\frac{\pi x^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\pi H^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha},\quad x^2 = H^2\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad x = H\cos\frac{\alpha}{2}.$$

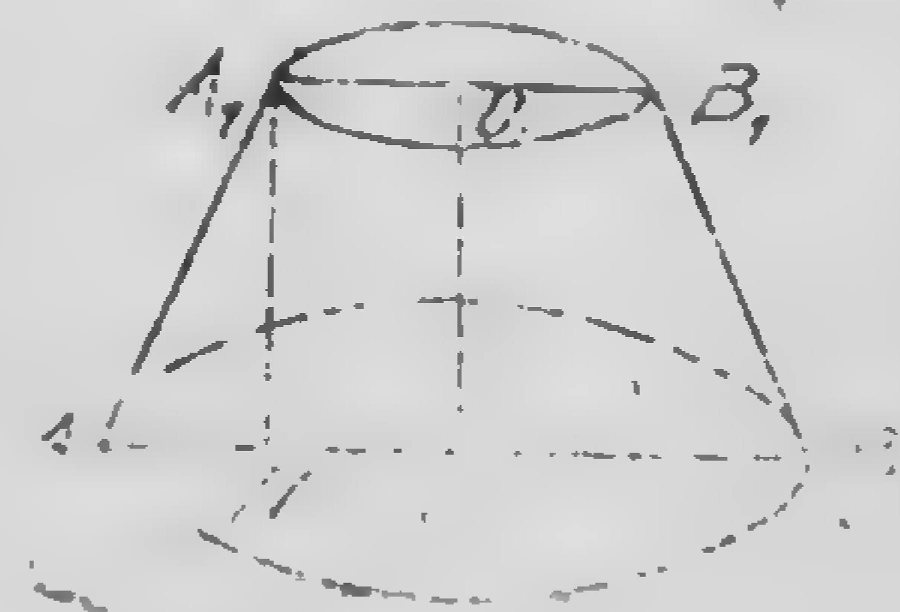
135. ABB_1A_1—ох кәсији олан конус, $AA_1 = l$, $\angle A_1AO = \varphi$, $\frac{\pi AO^2}{\pi A_1O_1^2} = 4$ (шәкил 128).

Тутаг ки, O вә O_1 кәсик конусун отурачагларынын мәркәзләридир. Она көрә AO вә A_1O_1 парчалары отурачаг чевrәләринин радиусу олачагдыр. Шәртә көрә $\frac{\pi AO^2}{\pi A_1O_1^2} = 4$. Бурадан $AO = 2A_1O_1$.

Конусун A_1N һүндүрлүјүн чәкәк. $NO = A_1O_1$, $AN = AO - NO = 2A_1O_1 - A_1O_1 = A_1O_1$.

Конусун һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi A_1N(AO^2 + AO\cdot A_1O_1 + A_1O_1^2) =$$



Шәкил 128

$$\frac{1}{3}\pi A_1N(A_1O_1^2 + A_1O_1\cdot A_1C_1 + A_1C_1^2) =$$

$$= \frac{7}{3}\pi A_1N\cdot A_1C_1^2.$$

AA_1N үчбучағында: $A_1N = AA_1\sin\varphi = l\sin\varphi$, $AN = AA_1\cos\varphi = l\cos\varphi$, $A_1O_1 = AN = l\cos\varphi$.

Ахтарылан һәчм:

$$V = \frac{1}{3}\pi l\sin\varphi\cdot 7(l\cos\varphi)^2 = \frac{7}{6}\pi l^3\sin 2\varphi\cos\varphi.$$

136. $P \parallel Q$, EDF—конусун ох кәсији, DO конусун охудур. $AB = a$, $\angle EDO = \alpha$, $\angle ANO = \beta$, $DN = NO$ (шәкил 129). $DO \perp Q$, $P \parallel Q$ олдуғундан $DO \perp P$. Буна көрә ANO вә NDB үчбучаглары дүзбучаглы үчбучаглардыр.

Бу дүзбучаглы үчбучагларда $\angle ANO = \angle DNB$ вә $ND = NO$ олдуғундан бу бучаглар бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, $AN = NB = \frac{AB}{2}$. ANO бучағы SDN үчбучағына нәзәрән харичи бучагдыр, она көрә $\angle ANO = \angle SDN + \angle DSN$ олур, бурада гијмәтләрини јеринә

Шәкил 129

јазаг: $\angle DSN = \beta - \alpha$ олар. NDL үчбучағында: $\angle DLN = 180° - (\alpha + \beta)$ олур. ANO үчбучағында: $ON = AN \times \sin(90° - \beta) = \frac{a}{2}\cos\beta$. Бурадан $DN = ON = \frac{a}{2}\cos\beta$

DSN үчбучағындан:

$$\frac{SN}{\sin\alpha} = \frac{DN}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad SN = \frac{DN\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\beta - \alpha)}.$$

NLD үчбучағындан:

$$\frac{NL}{\sin\alpha} = \frac{DN}{\sin[180° - (\alpha + \beta)]}, \quad NL = \frac{DN\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}.$$

Тәләб олунан парча:

$$SL = SN + NL = \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\beta - \alpha)} + \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{2}\left[\frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} + \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)}\right].$$

137. BSC—конусун ох кәсијидир, ASC конусун тәпәсиндән кечән кәсикдир, $\smile AC = \alpha$, $\angle SEO = \beta$ (шәкил 130).

Фәрз едәк ки, E нөгтәси AC парчасынын орта нөгтәсидир. SAC вә AOC бәрабәрјанлы үчбучагларында SE вә OE медианлары һәм тәнбөлән, һәм дә һүндүрлүкдүр. Она көрә $OE \perp AC$, $SE \perp AC$, $\angle ASE = \frac{1}{2}\angle ASC$. Демәли, SEO бучағы $SACO$ икиүзлү бучағын хәтти бучағыдыр. $\angle AOC = \smile AC = \alpha$. Фәрз едәк ки, $AO = R$, $\angle ASC = x$. ASE дүзбучаглы үчбучағында:

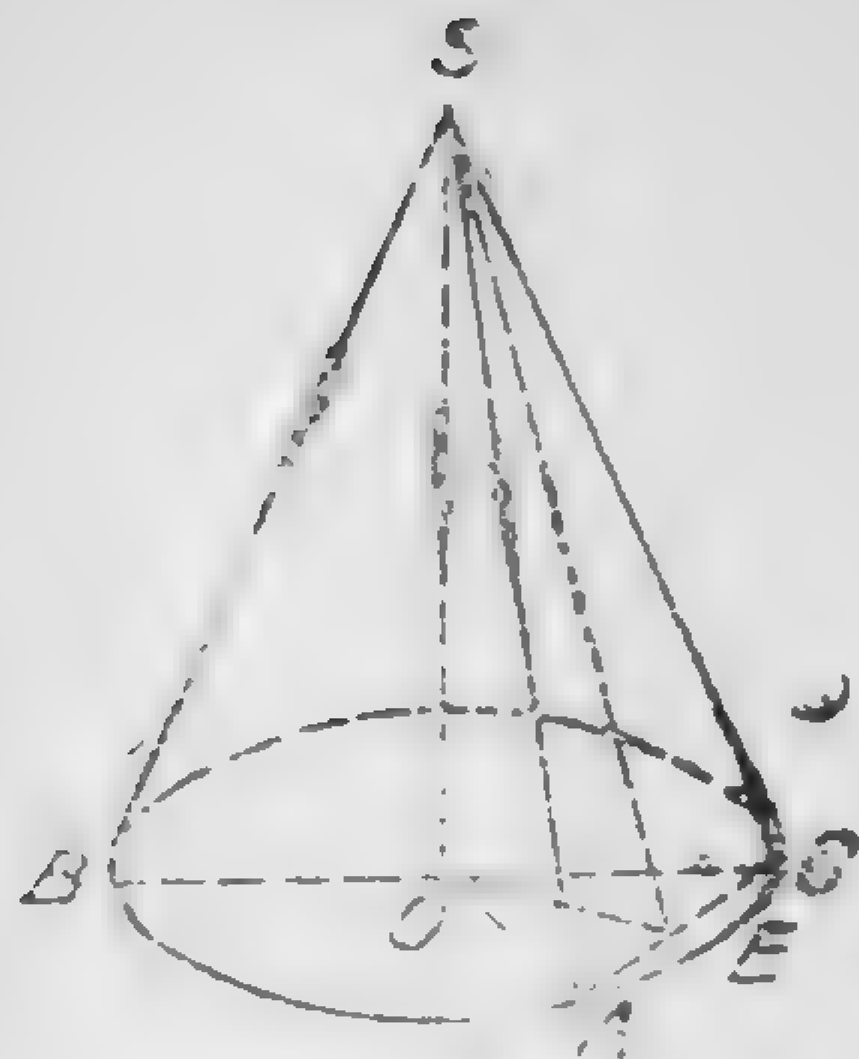
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{AE}{SE} \qquad (1)$$

AOE дүзбучаглы үчбучағында: $AE = AO\sin\frac{\alpha}{2} =$

$$= R\sin\frac{\alpha}{2}, \quad OE = AO\cos\frac{\alpha}{2} = R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

SEO үчбучағында: $SE = \frac{OE}{\cos\beta} = \frac{R\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.

AE вә SE-нин гијмәтләрини (1)-дә јеринә јазаг:



Шәкил 130

Шәкил 131

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{AE}{SE}=\left(R\sin\frac{\alpha}{2}\right):\left(R\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta,\quad x=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta\right).$$

138. Кәсик конусун үст вә алт отурачагларынын радиусларыны ујғун олараг r вә R илә, доғураны исә L илә ишарә едәк (шәкил 131). Онда үст вә алт отурачагларын саһәләри ујғун олараг $S_1=\pi r^2$, $S_2=\pi R^2$, јан сәтһи исә $S_{јан}=\pi(R+r)L$ олар. Шәртә көрә $\pi r^2:\pi R^2:\pi(R+r)L=m:n:P$, бурадан $\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{m}{n}$ вә ја

$$R=\frac{r\sqrt{n}}{\sqrt{m}}. \qquad (1)$$

Һәмин гајда үзрә $\frac{\pi R^2}{\pi(R+r)L}=\frac{n}{P}$ вә ја $L=\frac{R^2P}{n(R+r)}$,

бурада (1) бәрабәрлијин нәзәрә алсаг,

$$L=\frac{\sqrt{m}rP}{m(\sqrt{n}+\sqrt{m})};\quad AK=AO-KO=AO-A_1O_1=$$

$$=R-r=\frac{r\sqrt{n}}{\sqrt{m}}-r=\frac{r(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{\sqrt{m}}.$$

AA_1K дүзбучаглы үчбучагында:

$$\cos\varphi=\frac{AK}{AA_1}=\frac{r(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{\sqrt{m}}:\frac{\sqrt{m}rP}{m(\sqrt{n}+\sqrt{m})}=\frac{n-m}{P},$$

$$\text{бурадан}\quad \varphi=\arccos\frac{n-m}{P}.$$

139. $\angle ADB=\varphi$, $S_{ADB}=S$, $\angle DKO=\alpha$ (шәкил 132). $OK\perp AB$ чәкәк. Үч перпендикулјар теореминә көрә $DK\perp AB$ олур. Демәли, DKO бучағы хәтти бучагдыр. DK парчасы ADB бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдуғундан $AK=KB$, $\angle ADK=\angle KDB$ олур. Конусун DO һүндүрлүјүнү H илә ишарә едәк. DKO үчбучағында: $DK=\frac{DO}{\sin\alpha}=\frac{H}{\sin\alpha}$. ADK үчбучағында: $AK=DK\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=$

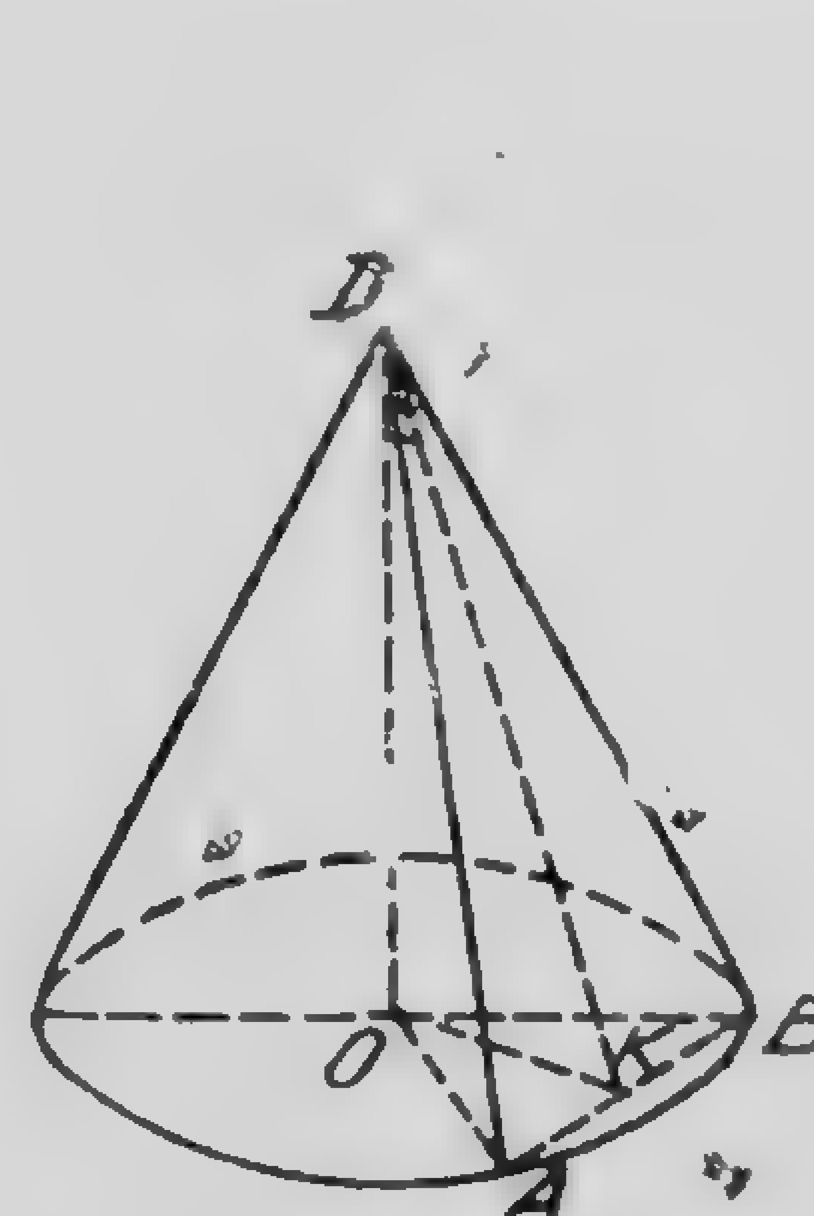
$$=\frac{H}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\quad \text{бурадан}\quad AB=2AK=\frac{2H}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

$$S_{ADB}=\frac{1}{2}AB\cdot DK=\frac{1}{2}\cdot\frac{2H}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{H}{\sin\alpha}=\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

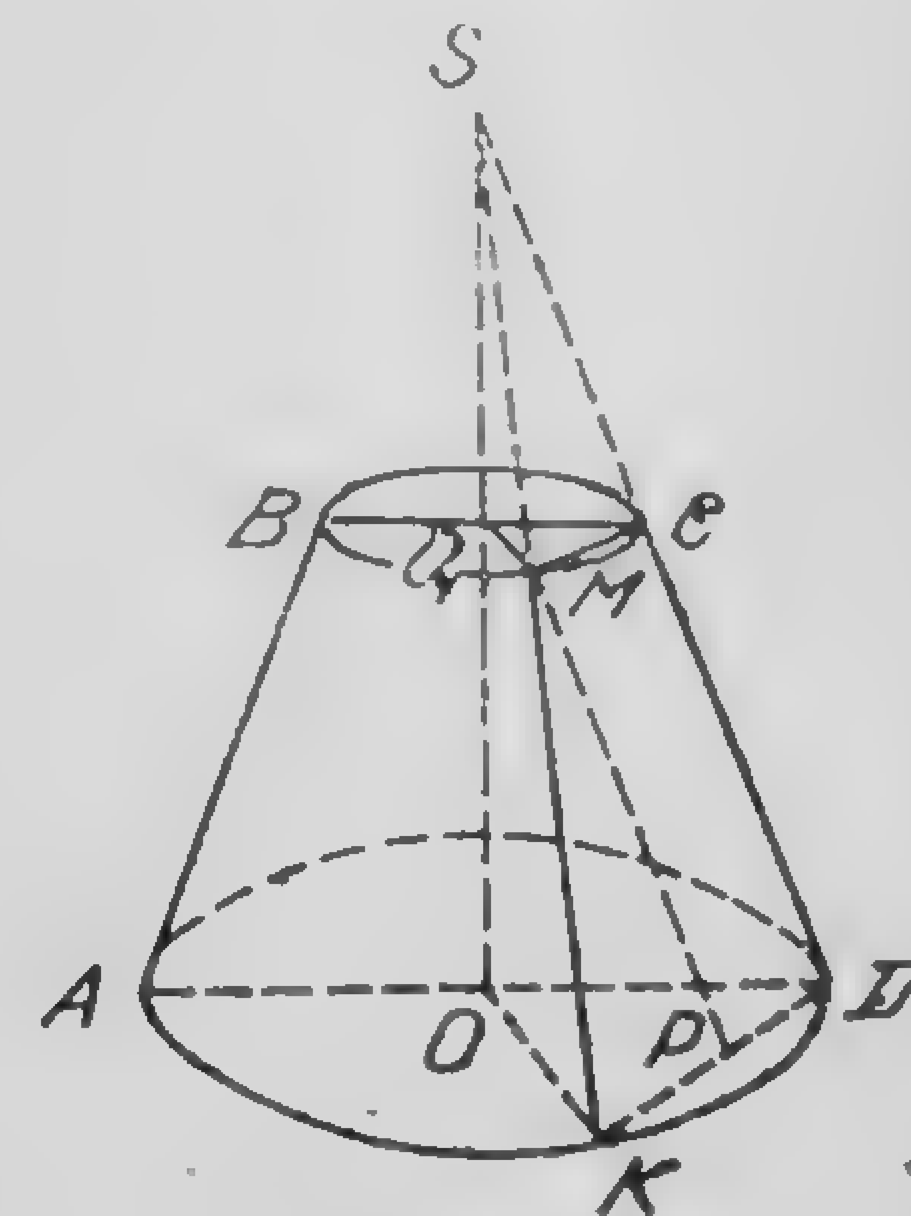
Шәртә көрә:

$$\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=S,\quad H=\sin\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}.$$

140. $\angle KSD=\beta$, $KD=m$, $MC=n$, $\cup KD=\alpha$, $\cup MC=\alpha$ (шәкил 133). $KD\parallel MC$. Мәркәзи бучаглар $\angle KOD=$



Шәкил 132



Шәкил 133

$KD = \alpha$, $\angle MO_1C = \alpha$ олур. Верилән KM вә CD доғранларынын арасындакы бучаг, онларын узантыларынын кәсишмәсиндә алынан бучаг олачагдыр. $MP \parallel CD$ чәкәк. Онда $\angle KMP = \angle KSD$.

Демәли, KMP үчбучағы бәрабәрјанлы үчбучагдыр. $PD = MC$ (паралелограмын гаршы тәрәфләри олдугу үчүн). Бурадан $KP = KD - PD = KD - MC = m - n$. KMP бәрабәрјанлы үчбучағында

$$\angle MPK = 90° - \frac{\beta}{2}, \quad \frac{MK}{\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{KP}{\sin\beta},$$

$$MK = \frac{KP\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\beta} = \frac{(m-n)\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{m-n}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

OKD бәрабәрјанлы үчбучағында:

$$\angle OKD = 90° - \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{OD}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{KD}{\sin\alpha},$$

$$OD = \frac{KD\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

O_1MC бәрабәрјанлы үчбучағында:

$$\angle O_1MC = 90° - \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{O_1C}{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{MC}{\sin\alpha},$$

$$O_1C = \frac{MC\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{n}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Конусун јан сәтһи:

$$S_{јан} = \pi(OD + O_1C)MK = \pi\left(\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{n}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) \times$$

$$\times \frac{m-n}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\pi(m^2 - n^2)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

141. BLC үчбучағын бәрабәрјанлы үчбучаг олдуғу аjдындыр. AO парчасы BAC бучағынын тәнбөләни олдуғу үчүн һәм дә ABC үчбучағынын медианы олачагдыр (шәкил 134). LK парчасы BCL бәрабәрјанлы үчбучағын медианы олдуғундан һәм һүндүрлүк, һәм дә тәнбөләндир. Тутаг ки, $OB = R$, $\angle BLC = x$. BLK дүзбучаглы үчбучағында:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{BK}{BL}; \quad AO = 2R, \quad OB = R.$$

$$\triangle OBK\text{-дан } BK = OB\sin 60° = R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\triangle OBK\text{-дан } AB = AO\cos 30° = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Шәртә көрә конус бәрабәртәрәфли олдуғу үчүн $SB = 2R$. SAB дүзбучаглы үчбучағында: $SA = \sqrt{AB^2 + SB^2} =$

$$= \sqrt{(R\sqrt{3})^2 + (2R)^2} = R\sqrt{7},$$

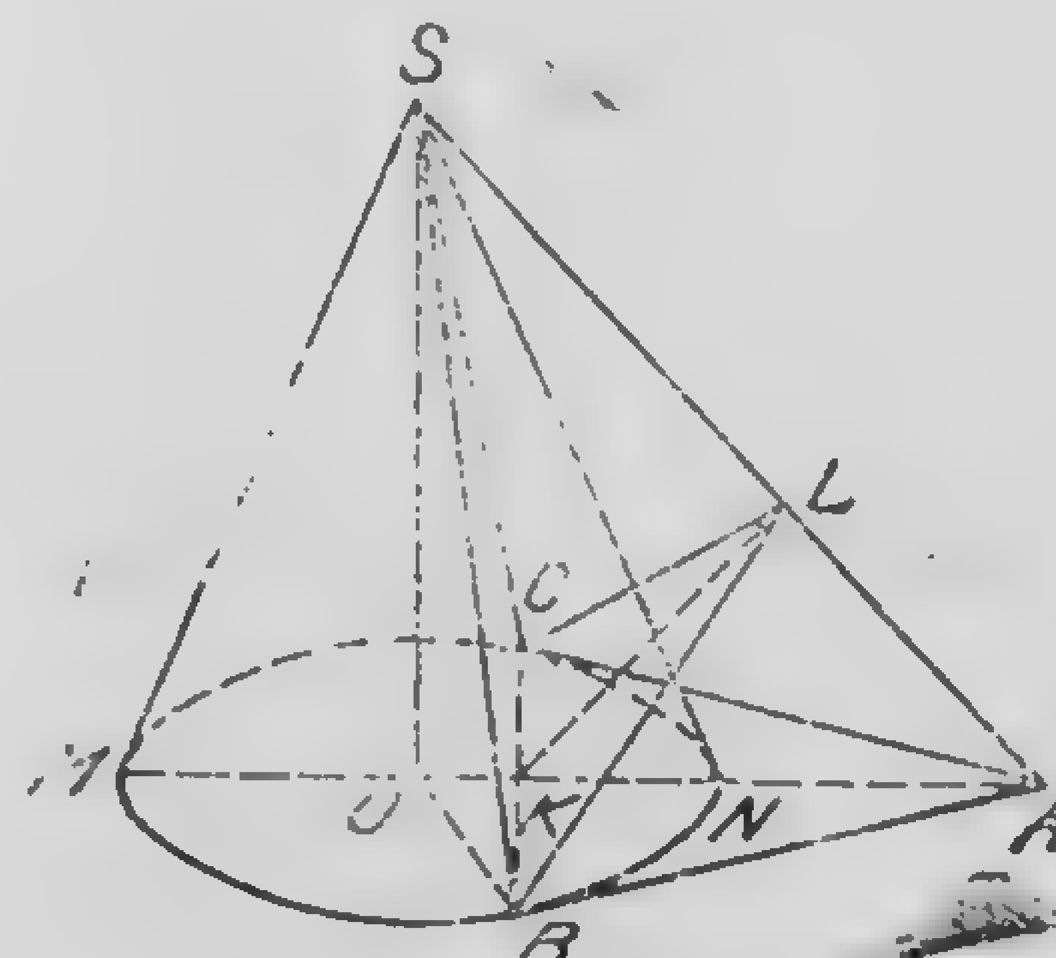
$$BL = \frac{BS \cdot AB}{AS} = \frac{2R\sqrt{3}R}{R\sqrt{7}} = \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Беләликлә,

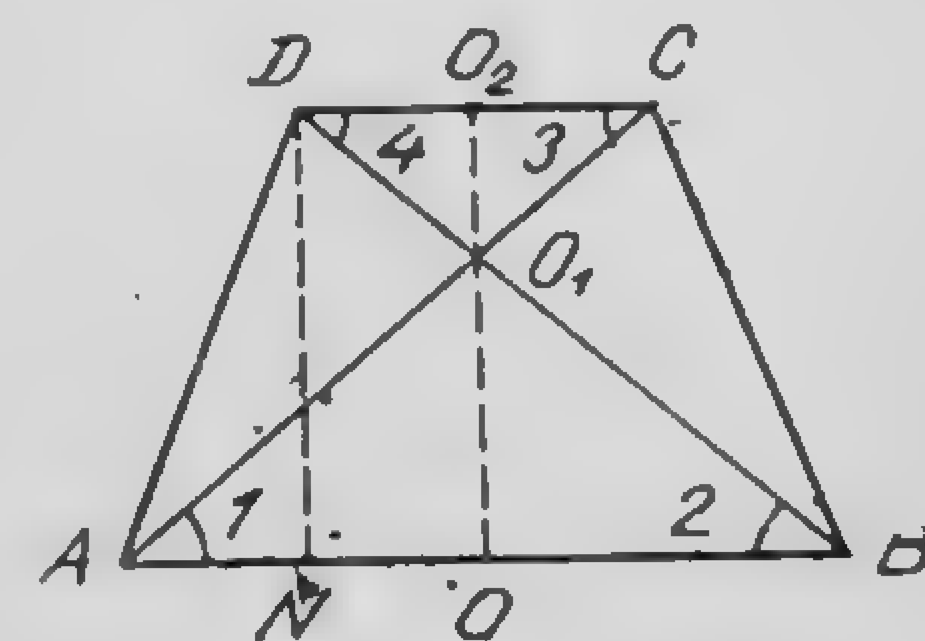
$$\sin\frac{x}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} : \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

бурадан

$$x = 2\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}.$$



Шәкил 134



Шәкил 135

142. $ABCD$ кәсик конусун ох кәсијидир. $AC \perp BD$, $AD = l$, $\angle DAB = \alpha$ (шәкил 135). ABC вә ADB үчбучагларында AB ортаг тәрәф, $\angle CBA = \angle DAB$ (бәрабәрјанлы трапесијанын отурачағына битишик бучаглар олдуғу үчүн), $BC = AD$ олдуғундан бу үчбучаглар бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, $\angle 1 = \angle 2$. Дикәр тәрәфдән $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$. Демәли, $\angle 3 = 45°$, $\angle 4 = 45°$ олур. Фәрз едәк ки, OO_2 конусун һүндүрлүјүдүр. OO_1 парчасы бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдуғу үчүн һәм медиан, һәм дә тәнбөләндир, јә'ни $AO = OB = \frac{1}{2} AB$, $\angle AO_1O = \frac{1}{2} \angle AO_1B$, бурадан $\angle AO_1O = 45°$. Һәмин гајда үзрә $DO_2 = O_2C = \frac{1}{2} DC$, $\angle DO_1O_2 = \frac{1}{2} \angle DO_1C = 45°$ олур. Демәли, AO вә DO_2 парчалары конусун радиусларыдыр. $\triangle ADN$-дән: $DN = AD\sin\alpha = l\sin\alpha$. ABD үчбучағында:

$$\frac{AB}{\sin[180° - (\alpha + 45°)]} = \frac{AD}{\sin 45°}, \quad AB = \frac{AD\sin(\alpha + 45°)}{\sin 45°} =$$

$$= \frac{2l\sin(\alpha + 45°)}{\sqrt{2}}; \quad AO = \frac{1}{2} AB = \frac{l\sin(\alpha + 45°)}{\sqrt{2}}.$$

ADC үчбучағындан $DC = \frac{AD\sin(\alpha - 45°)}{\sin 45°} = \frac{2l\sin(\alpha - 45°)}{\sqrt{2}}$,

$$DO_2 = \frac{1}{2} DC = \frac{l\sin(\alpha - 45°)}{\sqrt{2}}.$$

Кәсик конусун там сәтһи:

$$S_т = \pi(AO + DO_2)AD + \pi AO^2 + \pi DO_2^2 =$$

$$= \pi\left[\frac{l\sin(\alpha + 45°)}{\sqrt{2}} + \frac{l\sin(\alpha - 45°)}{\sqrt{2}}\right]l +$$

$$+ \frac{\pi l^2\sin^2(\alpha + 45°)}{2} + \frac{\pi l^2\sin^2(\alpha - 45°)}{2} =$$

$$= \frac{\pi l^2}{\sqrt{2}}[\sin(\alpha + 45°) + \sin(\alpha - 45°)] +$$

$$+ \frac{\pi l^2}{2}[\sin^2(\alpha + 45°) + \sin^2(\alpha - 45°)] =$$

$$= \frac{\pi l^2}{\sqrt{2}} \cdot 2\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi l^2}{2} = \pi l^2\sin\alpha +$$

$$+ \frac{\pi l^2}{2} = \pi l^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\pi l^2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right).$$

Кәсик конусун һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\pi DN(AO^2 + AO_1DO_2 + DO_2^2).$$

Дүстура дахил олан ифадәләрин гијмәтләринин јеринә јазсаг, конусун һәчмини тә'јин етмиш оларыг:

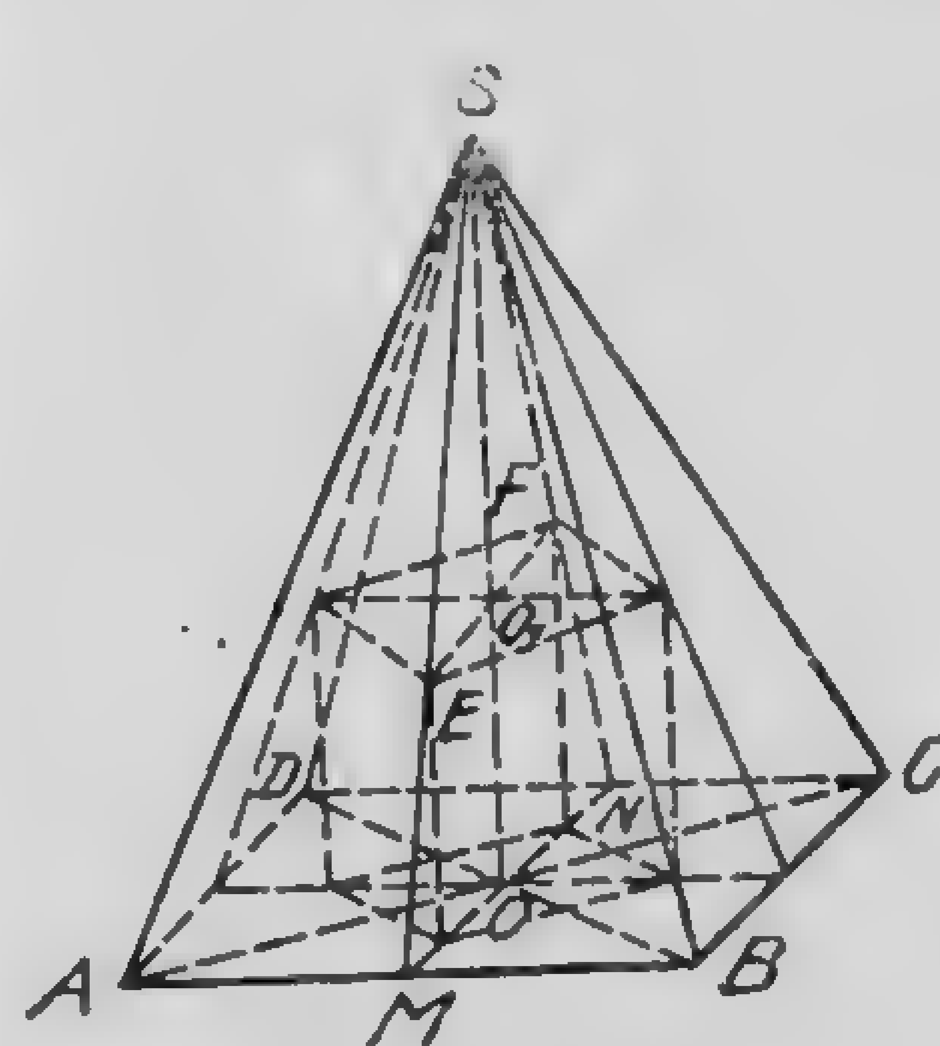
$$V = \frac{\pi l^3\sin\alpha}{12}(1 + 2\sin^2\alpha).$$

143. $SABCD$ дүзкүн дөрдбучаглы пирамидадыр, $AB = a$, $\angle SAO = \alpha$ (шәкил 136).

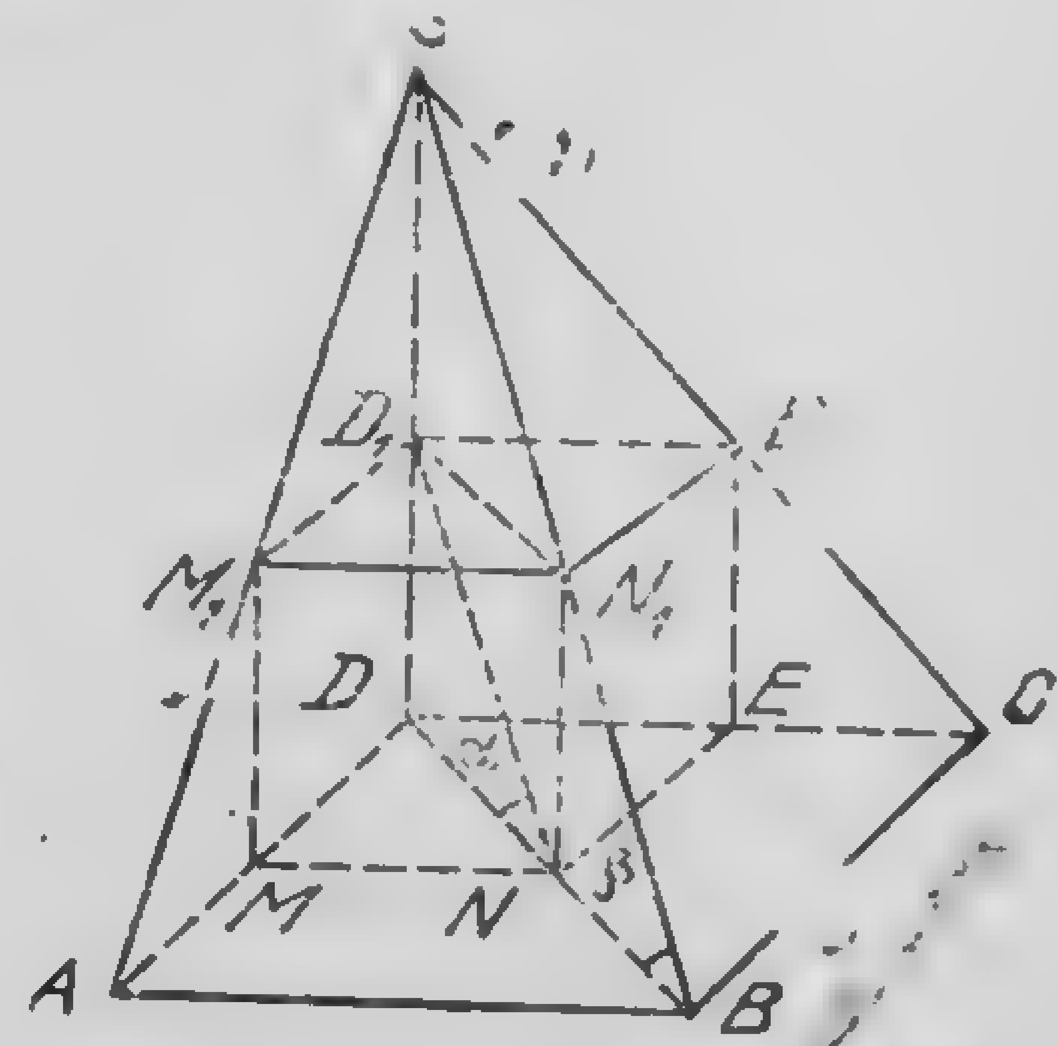
EF вә MN дүз хәтләрини ики паралел мүстәвинин үчүнчү бир SMN мүстәвиси илә кәсишмә хәтти кими көтүрмәк олар, онда $EF \parallel MN$ олачагдыр. Она көрә $\triangle SMN \sim \triangle SEF$ олур. OO_1 парчасыны, јә'ни кубун тилини x илә ишарә едәк. Мә'лумдур ки, $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

SAO үчбучағында $SO = AO\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\,\alpha$; $SO_1 = SO - OO_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\,\alpha - x$.

$\triangle SMN \sim \triangle SEF$ олдуғу үчүн јаза биләрик: $EF : MN = SO_1 : SO$ вә ја $x = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{2}(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)} = \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha - 45°)}$.



Шәкил 136



Шәкил 137

144. $SABCD$ верилән пирамида, $ABCD$ исә квадратдыр; $AB = a$, SAD вә SDC үзләри отурачага перпендикулјардыр, $\angle SBD = \beta$, $MNEDM_1N_1E_1D_1$ дүзбучаглы паралелепипеддир. $\angle D_1ND = \alpha$ (шәкил 137). SAD вә SDC мүстәвиләри үчүнчү $ABCD$ мүстәвисинә перпендикулјар олдуғундан онларын кәсишмә хәтти олан SD парчасы да $ABCD$ мүстәвисинә перпендикулјар олур. Демәли, SD парчасы пирамиданын һүндүрлүјүдүр. $MN \parallel AB$ вә $NE \parallel BC$ олдуғу үчүн $MNED$ дүзбучаглысы $ABCD$-јә охшардыр. Демәли, $DMNE$ дүзбучаглысы квадратдыр.

D_1N_1 вә DB дүз хәтләрини ики паралел мүстәвинин үчүнчү SDB мүстәвиси илә кәсишмә хәтти кими көтүрмәк олар, онун үчүн $D_1N_1 \parallel DB$ олачагдыр. Бурадан $\angle SN_1D_1 = \angle SBD$. ABD дүзбучаглы үчбучағында: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. SBD үчбучағында: $SD = BD\operatorname{tg}\beta = a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$. MN парчасыны x илә ишарә едәк. Онда $DN = x\sqrt{2}$ олачагдыр. ND_1D үчбучағында: $DD_1 = DN\operatorname{tg}\alpha = x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, SD_1N_1 үчбучағында:

$$SD_1 = D_1N_1\operatorname{tg}\beta = x\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta, \quad SD = SD_1 + DD_1 =$$

$$= x\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta + x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha; \quad x\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta + x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha = a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta,$$

$$x = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Паралелепипедин һәчми:

$$V = MN^2 \cdot DD_1 = x^2 \cdot x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha = x^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \left[\frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]^3 \cdot \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\,a^3\cos^2\alpha\sin\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

145. Мә'лумдур ки, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ вә $AC \parallel A_1C_1$ олачагдыр (шәкил 138). Бунлар ики паралел мүстәвинин үчүнчү мүстәви илә кәсишмә хәтләридир. $AO \parallel A_1O_1$ олдуғундан $\angle AOA_1 = \angle OA_1O_1$. Демәли, $\angle AOA_1 = \beta$.

AOA_1 үчбучағында:

$$\angle OAA_1 = \alpha, \quad \angle AOA_1 = \beta, \quad \angle AA_1O = 180^\circ - (\alpha+\beta),$$

$AO = OB = OC = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, A_1O-ну тапаг, синуслар теореминә көрә

$$\frac{A_1O}{\sin\alpha} = \frac{AO}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]}, \quad A_1O = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)}.$$

OA_1O_1 дүзбучаглы үчбучағында:

$$OO_1 = A_1O\sin\beta = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)}, \quad A_1O_1 = A_1O\cos\beta = \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)}.$$

A_1O_1 дүзкүн үчбучағын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусудур. Она көрә үчбучағын тәрәфи:

$$A_1B_1 = A_1O_1\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\,a\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

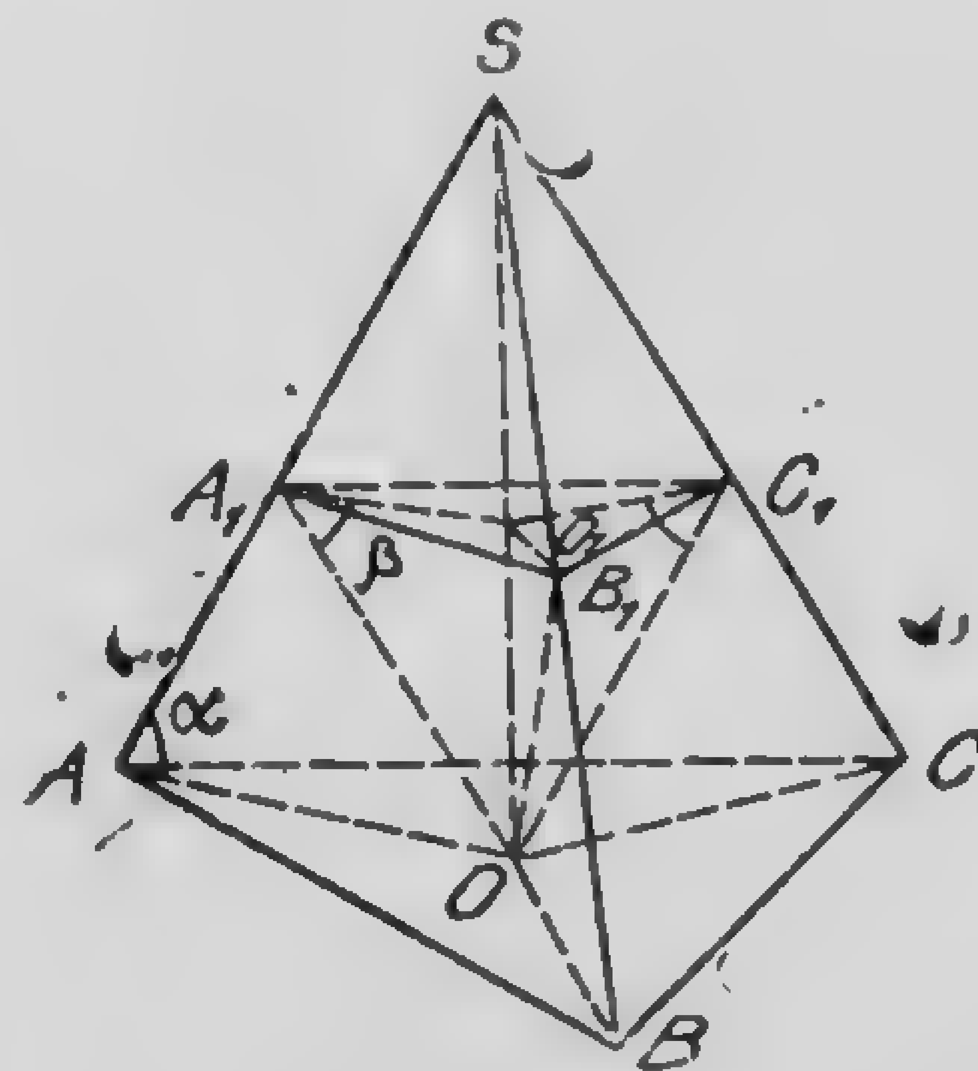
$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}\,a^2\sin^2\alpha\cos^2\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Пирамиданын һәчми:

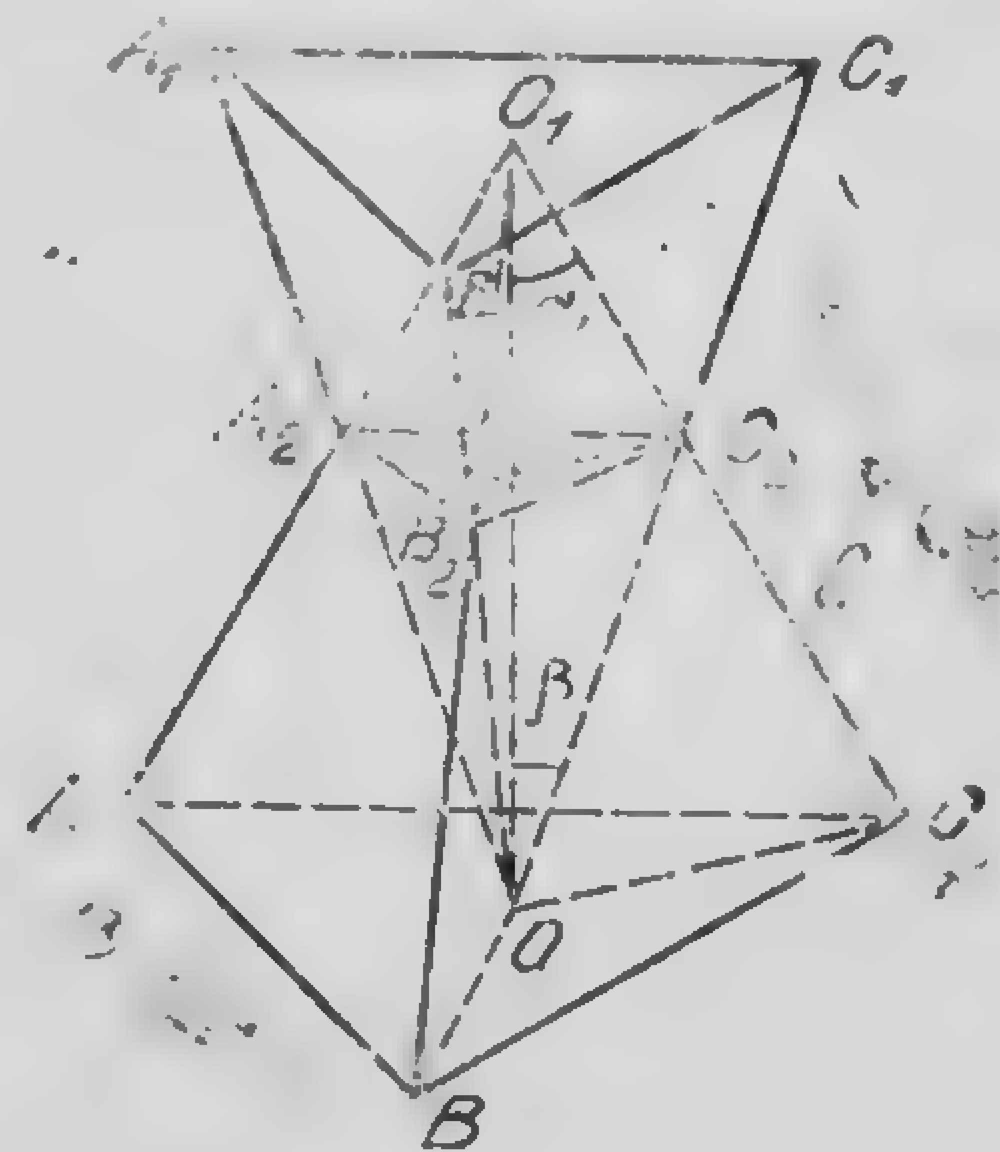
$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{A_1B_1C_1}\cdot OO_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,a^2\sin^2\alpha\cos^2\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)} \times$$

$$\times \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^3\sin^3\alpha\sin\beta\cos^2\beta}{12\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

146. $\angle B_2OB = \angle O_1OB - \angle O_1OB_2 = 90^\circ - \beta$, $\angle C_2OC = \angle O_1OC - \angle O_1OC_2 = 90^\circ - \beta$. Бу бәрабәрликләрдән $\angle B_2OB = \angle C_2OC$ олур (шәкил 139). $B_2A_2C_2$ кәсијин ABC отурачағына паралел олдуғуну исбат едәк. BB_2O вә OC_2C үчбучагларыны нәзәрдән кечирәк. Бу үчбучагларда $\angle OCC_2 = \angle OBB_2$ (дүзкүн пирамиданын јан



Шәкил 138



Шәкил 139

тилә илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучаглар олдугу үчүн), $\angle B_2OB = \angle C_2OC$ вә $OB = OC$ олдуғуна көрә үчбучаглар бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, $BB_2 = CC_2$. Буна көрә дә $B_2C_2 \parallel BC$. Һәмин гајда үзрә $A_2B_2 \parallel AB$, $A_2C_2 \parallel AC$ олдуғуну исбат едирик. Бурадан $A_2B_2C_2$ кәсији пирамиданын отурачағына паралел олур. Ики пирамида үчүн ортаг олан һиссәнин һәчми, отурачаглары ортаг олан $A_2B_2C_2$ үчбучағы, һүндүрлүкләри O_1K вә OK олан ики пирамиданын һәчмләри cәминә бәрабәр олачагдыр. Һәмин пирамидаларын отурачагларынын саһәсини S илә ишарә едәк. Онда

$$V = \frac{1}{3} S\cdot O_1K + \frac{1}{3} S\cdot OK =$$

$$= \frac{1}{3} S(O_1K + OK) = \frac{1}{3} S\cdot OO_1$$

O_1CC үчбучағындан: $CO_1 = O_1C\cos\alpha = l\cos\alpha$.
O_1KC_2 үчбучағындан: $O_1K = KC_2 \operatorname{ctg}\alpha$.
OKC_2 үчбучағындан: $OK = KC_2 \operatorname{tg}\beta$.
Лакин $OO_1 = O_1K + OK = KC_2\operatorname{ctg}\alpha + KC_2 \operatorname{ctg}\beta =$

$$= KC_2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = KC_2\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

бурадан $KC_2 = \dfrac{l\cos\alpha\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

$$S = \frac{1}{2} B_2C_2^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cdot KC_2)^2 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}KC_2^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

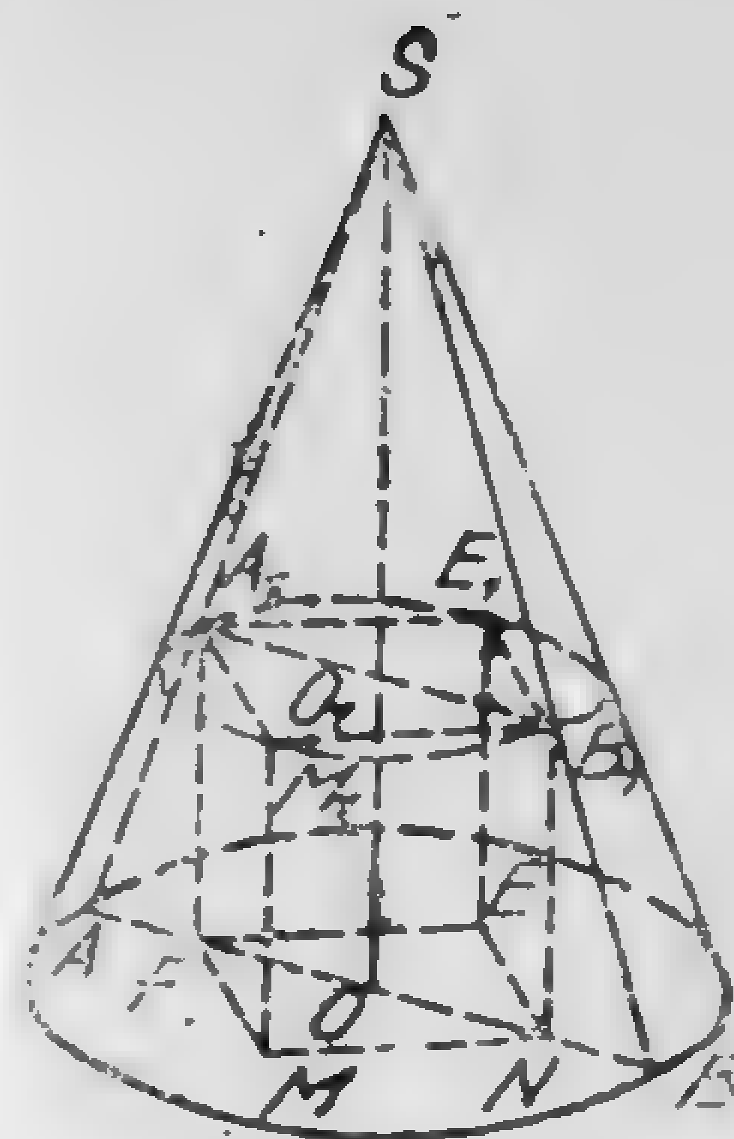
Һиссәсинин һәчми:

$$V = \frac{1}{3} S\cdot OO_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\sin\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)}\, l\cos\alpha =$$

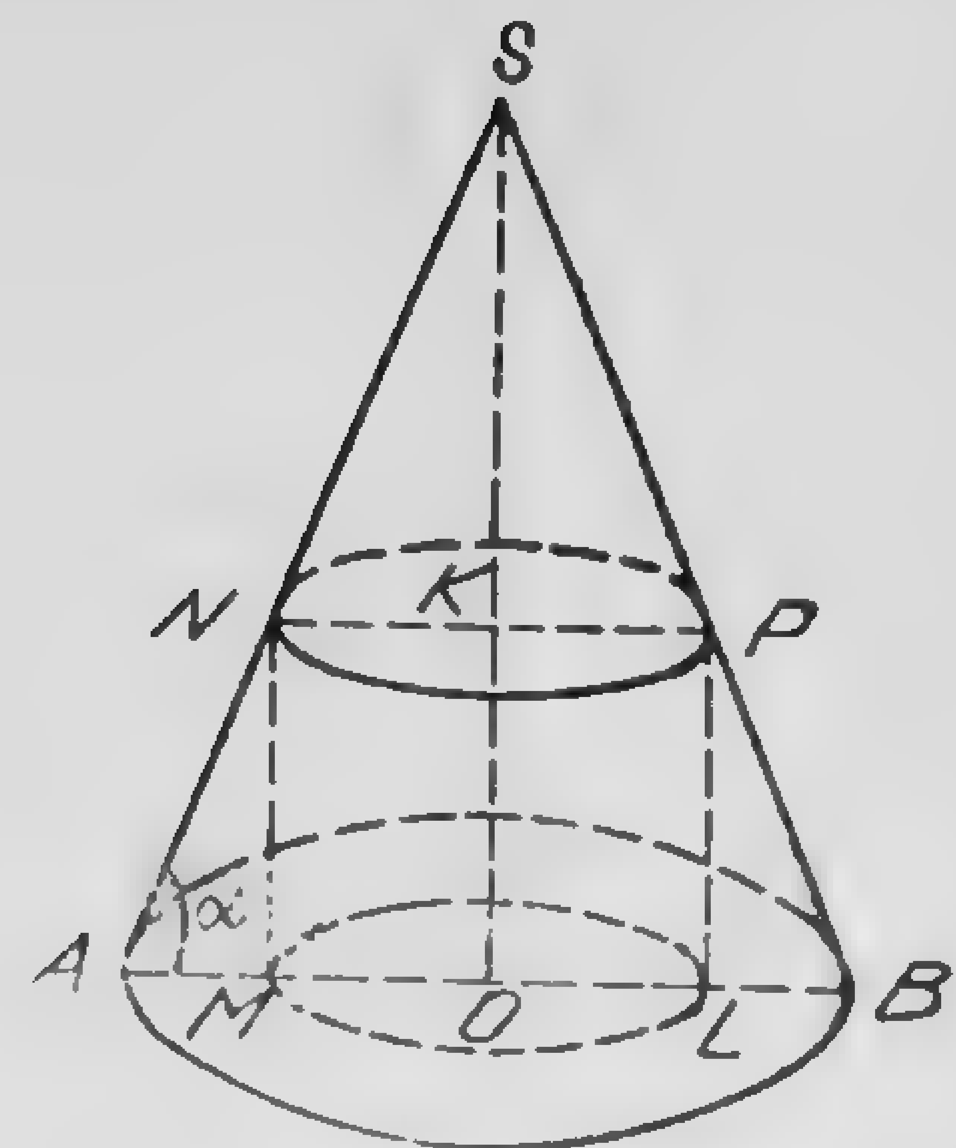
$$= \frac{\sqrt{3}\,l^3\cos^3\alpha\sin^2\alpha\sin^2\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

147. SAB — конусун ох кәсији, ME_1 исә онун дахилинә чәкилмиш кубдур, $SA = l$, $\angle SAO = \alpha$ (шәкил 140).

Кубун үст отурачаг мүстәвисинин конусла кәсији даирә олачагдыр. Конус сәтһинин A_1, M_1, B_1 вә E_1 нөгтәләри һәм чеврәнин вә һәм дә $A_1M_1B_1E_1$ квадратынын тәпә нөгтәләри олдуғундан квадрат харичинә чә-



Шәкил 140



Шәкил 141

килмиш чеврә олачагдыр. $A_1O \parallel AO$. Буна көрә $\angle SA_1O_1 = \angle SAO$. Фәрз едәк ки, кубун тили x олсун, онда $A_1O_1 = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

SAO үчбучағындан: $SO = SA\sin\alpha = l\sin\alpha$.

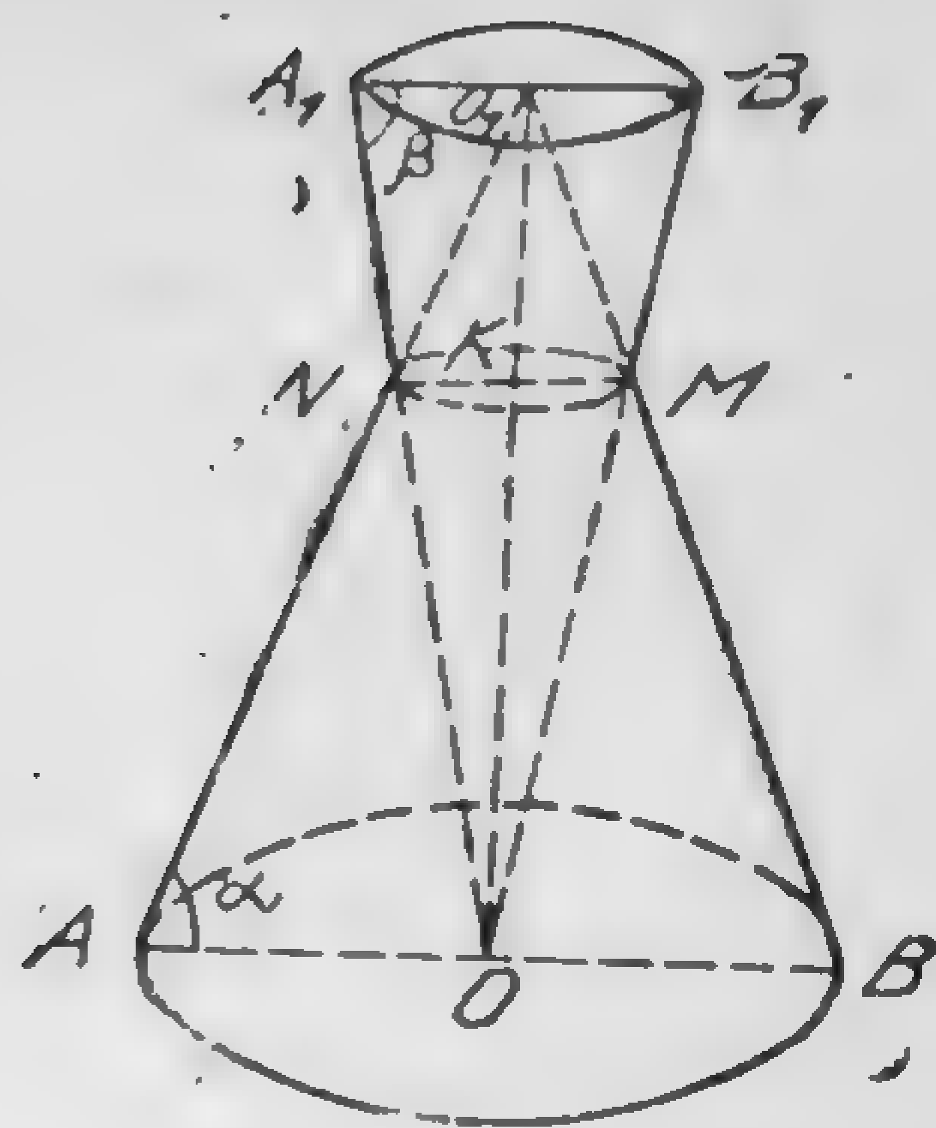
SA_1O_1 үчбучағындан: $SO_1 = A_1O_1 \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$.

Бурадан $SO = OO_1 + SO_1 = x + \dfrac{x\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$. Бу бәрабәрликдә SO-нун гијмәтини јеринә јазаг: $x + \dfrac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha = l\sin\alpha$,

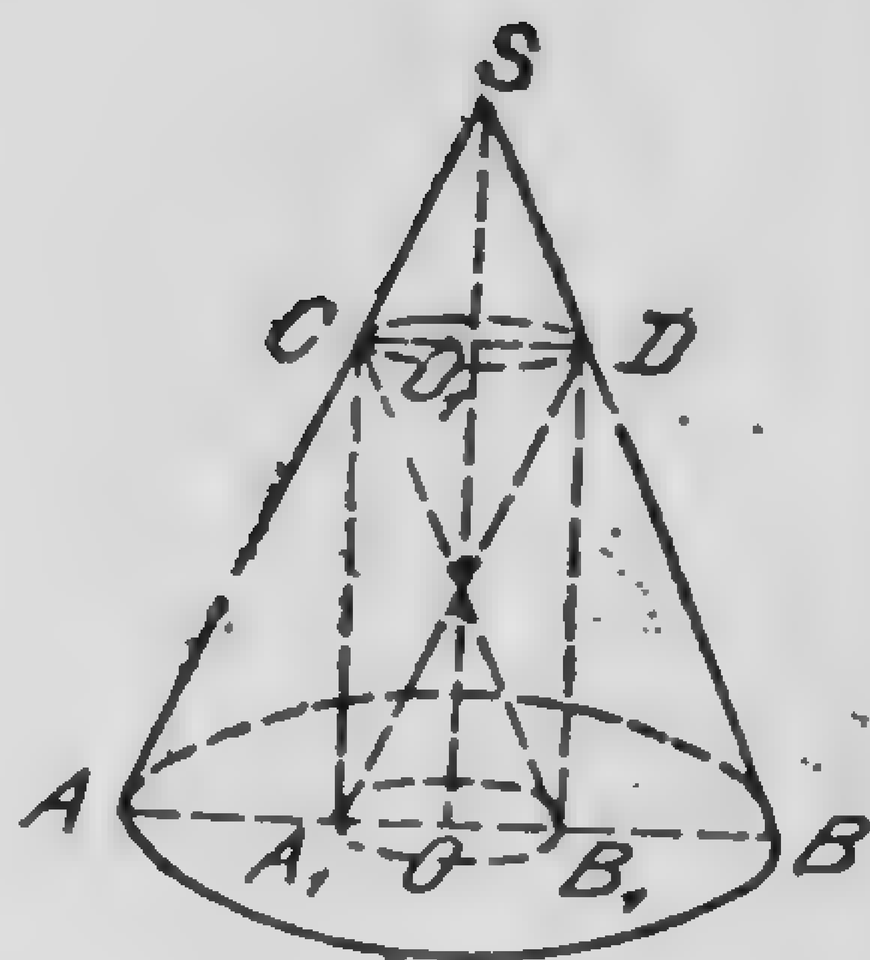
нәтичәдә $x = \dfrac{\sqrt{2}\,l\sin\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$ алырыг.

148. ASB конусун ох кәсији, $MNPL$ исә дахилә чәкилмиш бәрабәртәрәфли силиндрин ох кәсијидир, $AS = l$, $\angle SAO = \alpha$ (шәкил 141). $NP \parallel AB$ олдуғу үчүн $\angle SNP = \angle SAB$ олачагдыр. ASO үчбучағында: $SO = AS\sin\alpha = l\sin\alpha$. MN парчасыны x илә ишарә едәк. Силиндр бәрабәртәрәфли олдуғу үчүн $NP = x$ олачагдыр. SNK үчбучағында: $SK = NK\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $SO = OK + SK = x + \dfrac{x\operatorname{tg}\alpha}{2}$, бурада SO-нун гијмәтини јеринә јазаг:

$$x + \frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha = l\sin\alpha,\quad x = \frac{2l\sin\alpha}{2+\operatorname{tg}\alpha}.$$



Шәкил 142



Шәкил 143

149. $OO_1 = H$, $\angle O_1AO = \alpha$, $\angle OA_1O_1 = \beta$ верилир (шәкил 142). Конусларын јан сәтһләринин кәсишмә хәттиндән кечән мүстәви конусун отурачагларына паралел олдуғуну исбат едәк. Фәрз едәк ки, AO_1B вә A_1B_1O конусларын ох кәсијидир. A_1B_1 вә AB дүз хәтләри ики паралел мүстәвинин үчүнчү мүстәви илә кәсишмәсиндән алынан хәтләр олдуғундан бир-биринә паралелдир. Паралел дүз хәтләрин чарпаз бучаглары олдуғу үчүн $\angle A_1OA = \angle OA_1O_1$, $\angle B_1OB = \angle OB_1O_1$. Лакин $\angle OA_1O_1 = \angle OB_1O_1$. Демәли, $\angle A_1OA = \angle B_1OB$ олур. ANO вә BOM үчбучагларында $AO = OB$ вә бу тәрәфләрә битишик ујғун бучаглар бәрабәр олдуғу үчүн үчбучаглар бәрабәрдир. Демәли $AN = BM$. Дикәр тәрәфдән $\angle O_1MK = \angle O_1BO$, $\angle OMK = \angle OB_1O_1$. O_1KM үчбучағында $KO_1 = KM \operatorname{tg} \alpha$. OKM үчбучағында: $OK = KM \operatorname{tg} \beta$. Лакин $OO_1 = OK + KO_1 = KM \operatorname{tg}\beta + KM \operatorname{tg}\alpha$. Шәртә көрә $KM \operatorname{tg}\beta + KM \operatorname{tg}\alpha$, бурадан $KM = \frac{H \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Чеврәнин узунлуғу: $c = \frac{2\pi H \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

150. *Чаваб.* $V = \frac{10\pi l^3}{81} \sin 2\alpha \cos\alpha$.

Көстәриш. CD вә AB дүз хәтләри ики паралел мүстәвинин үчүнчү мүстәви илә кәсишмәсиндән алынан хәтләр олдуғундан бир-биринә паралелдир (шәкил 143).

151. $\angle AA_1O = \angle ASB$, $\angle BB_1O = \angle BSA$. Паралел дүз хәтләрин чарпаз бучаглары олдуғундан $\angle A_1OB_1 = \angle AA_1O = \angle BB_1O$ (шәкил 144).

Асанлыгла исбат етмәк олар ки, AA_1B_1O вә BB_1A_1O дөрдбучаглылары паралелограмдыр. AA_1B_1O паралелограм олдуғундан $AO = A_1B_1$, јә'ни кәсик конусун үст отурачағынын диаметри алт отурачағынын радиусуна бәрабәрдир. Паралелограмын гаршы тәрәфләри олдуғу үчүн $OB_1 = AA_1$. Демәли, $OB_1 = a$. Һәмин сәбәбә көрә $A_1O = BB_1 = a$.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OO_1 (AO^2 + AO \cdot A_1O_1 + A_1O_1^2) -$$

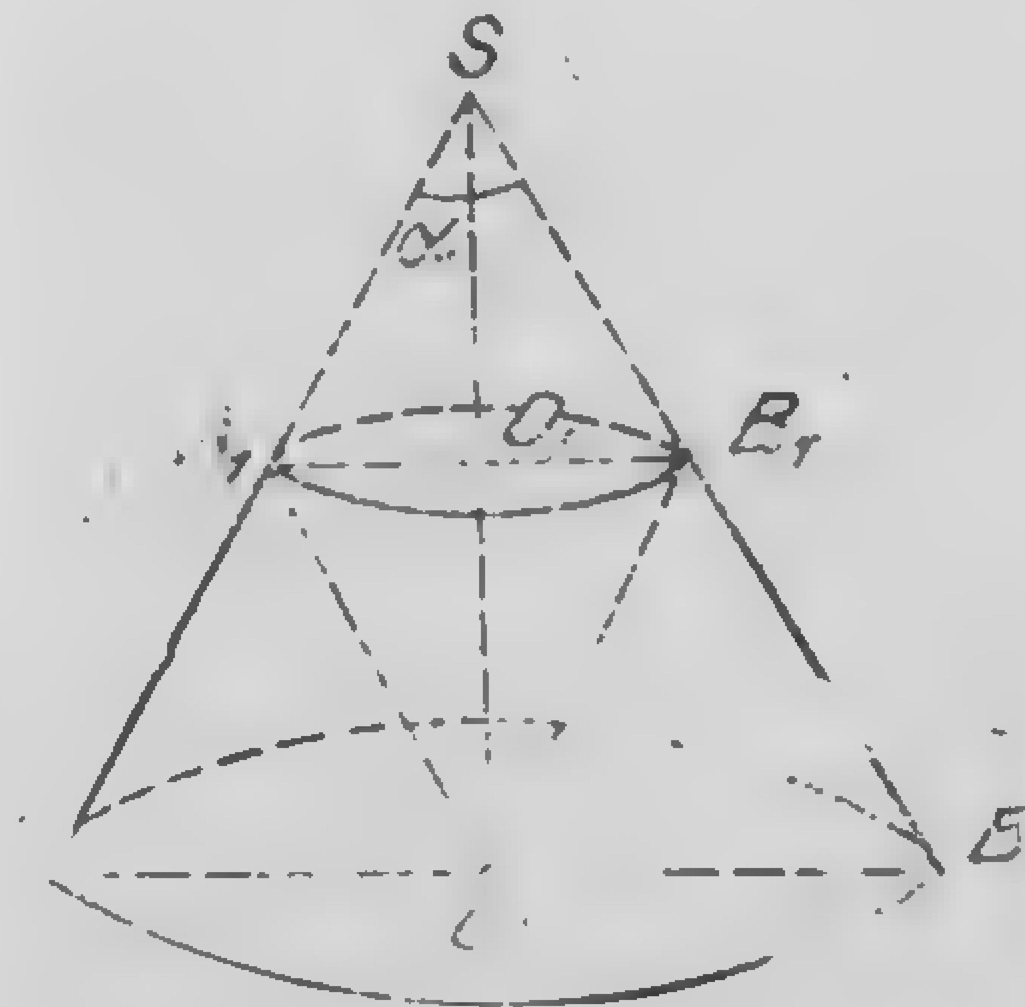
$$- \frac{1}{3}\pi OO_1 \cdot A_1O_1^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot OO_1 \{[(2A_1O_1)^2 +$$

$$+ 2A_1O_1 \cdot A_1O_1 + A_1O_1^2] - A_1O_1^2\} = 2\pi OO_1 \cdot A_1O_1^2.$$

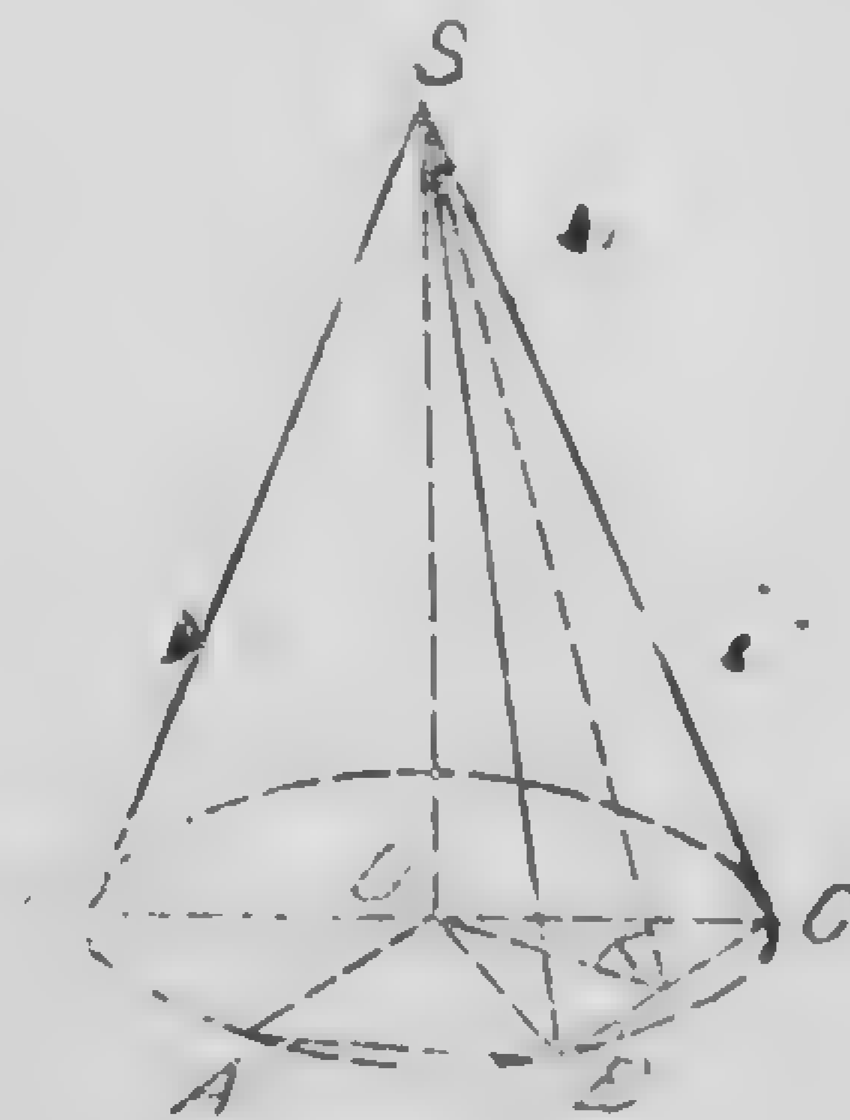
OA_1O_1 дүзбучаглы үчбучағында $\angle A_1OO_1 = \frac{\alpha}{2}$, $A_1O_1 = OA_1 \sin\frac{\alpha}{2} = a \sin\frac{\alpha}{2}$, $OO_1 = OA_1 \cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$V = 2\pi \cdot a \cos\frac{\alpha}{2} \cdot a^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = \pi a^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2}.$$

152. SMC конусун ох кәсији, AB парчасы исә конусун дахилинә чәкилмиш дүзкүн n-бучаглы пирамида отурачағынын бир тәрәфидир (шәкил 145).



Шәкил 144



Шәкил 145

K нөгтәси BC тәрәфинин орта нөгтәси олсун. OBC вә SBC бәрабәрјанлы үчбучагларында OK вә SK медианлары һәм һүндүрлүк, һәм дә тәнбөләндир. Бурадан $OK \perp BC$, $SK \perp BC$ олур. Демәли, SKO бучағы отурачаг тилиндәки икиүзлү бучағын хәтти бучағыдыр.

Тутаг ки, $OB = R$, $\angle SKO = x$. Дүзкүн n-бучаглынын мәркәзи бучағы $\angle BOC = \frac{360^\circ}{n}$, онда $\angle BOK = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$.

BOK үчбучағында: $OK = OB \cos \frac{180^\circ}{n} = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.

Шәртә көрә конус бәрабәртәрәфлидир. Она көрә дә $SM = 2R$ олур. SOM үчбучағында: $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$.

SKO үчбучағында: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{SO}{OK} = \frac{R\sqrt{3}}{R \cos \frac{180^\circ}{n}}$,

бурадан $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$.

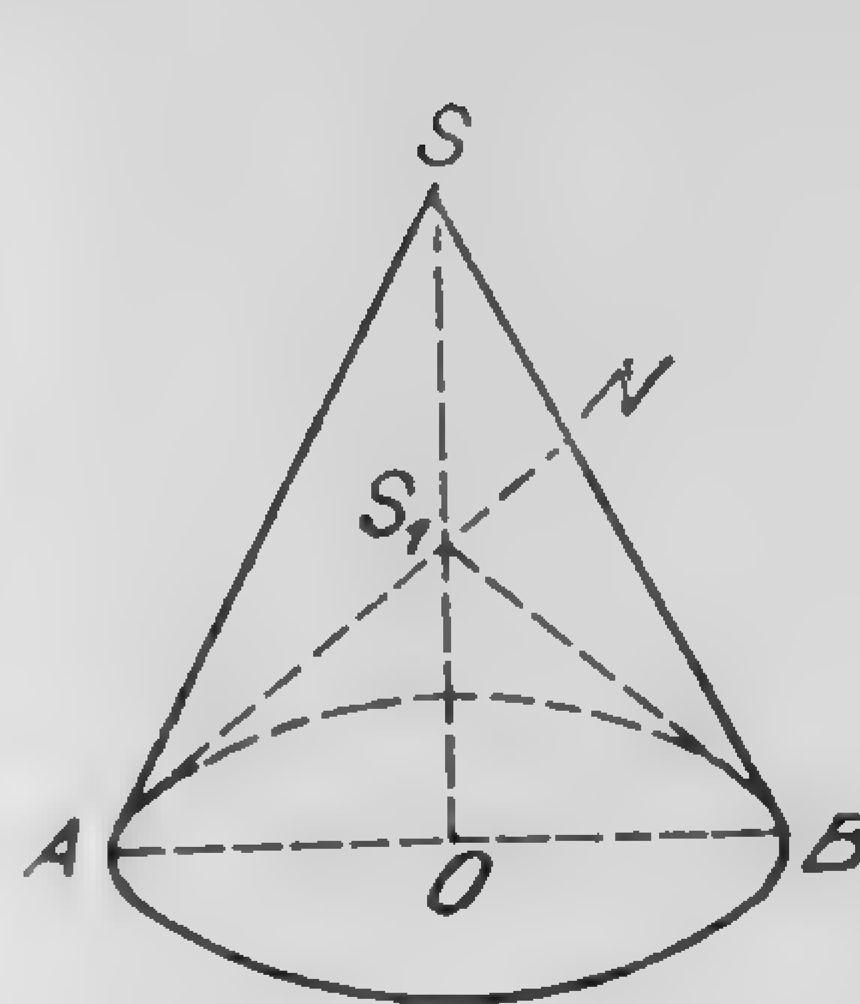
153. ASB вә AS_1B конусларын ох кәсикләридир, $AN \perp BS$, $V = 2V_1$ (шәкил 146).

Бөјүк конус доғураныңын отурачаг мүстәвиси илә әмәлә кәтирдији бучағы α илә, AO радиусуну исә r илә ишарә едәк. Она көрә дә ANB дүзбучаглы үчбучағында $\angle ABN = \alpha$ олдуғундан $\angle BAN = 90^\circ - \alpha$. ASO үчбучағында: $SO = AO \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \alpha$. AS_1O үчбучағындан: $S_1O = AO \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = r \operatorname{ctg} \alpha$.
Бөјүк конусун һәчми:

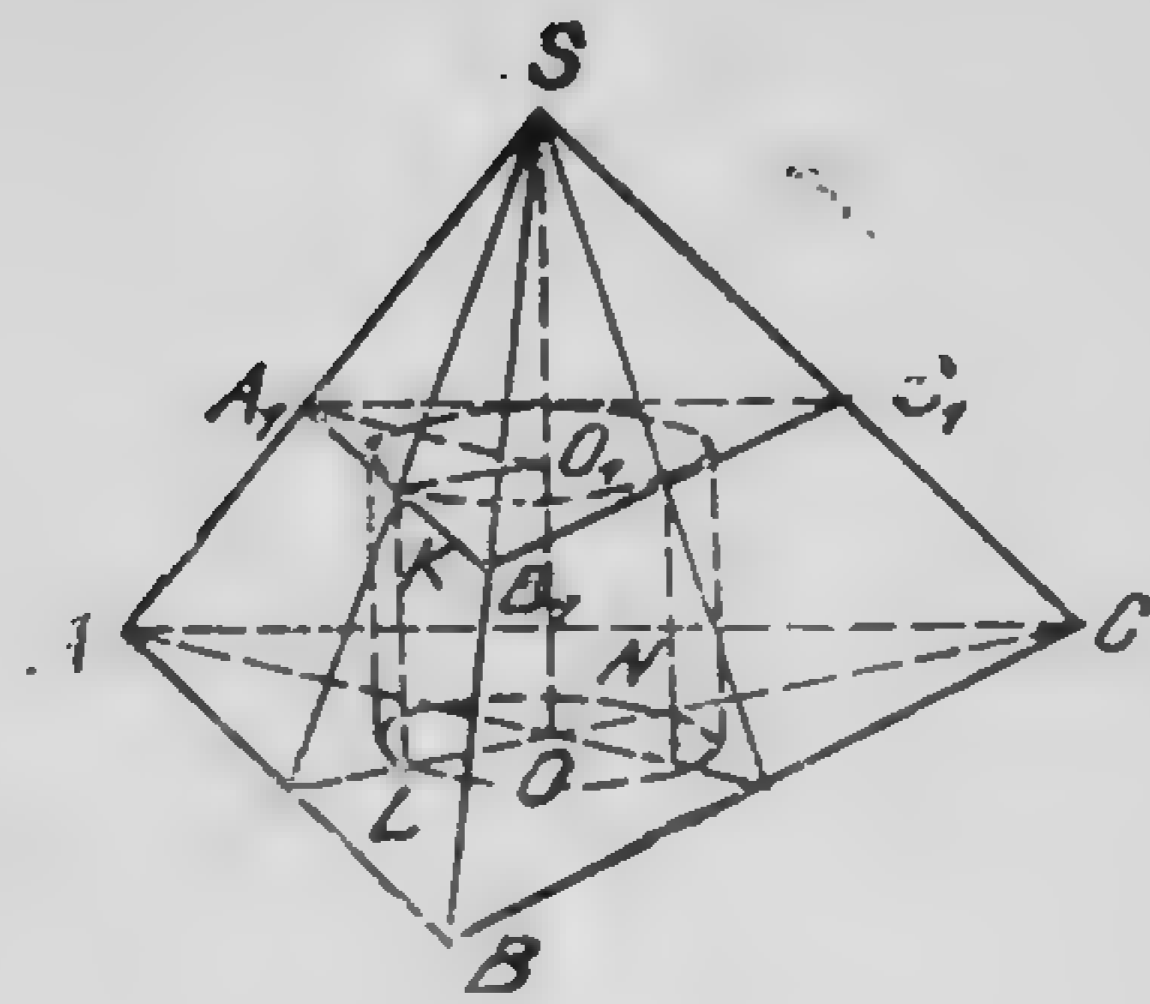
$$V = \frac{1}{3} \pi AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Кичик конусун һәчми:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi AO^2 \cdot S_1O = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg} \alpha.$$



Шәкил 146



Шәкил 147

Бөјүк конусун һәчми кичик конусун һәчминдән 2 дәфә бөјүк олдуғундан $\frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg} \alpha$ олур, бурадан $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} \alpha$ олар. Бу тәнликдән $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{2}$ вә $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\sqrt{2}$, бурадан $\alpha = 54^\circ 44'$.

154. $SABC$ дүзкүн үчбучаглы пирамида, OO_1 исә онун дахилинә чәкилмиш бәрабәртәрәфли силиндрин охудур. $SA = a$, $\angle SAO = \alpha$ (шәкил 147).

Силиндрин үст отурачаг мүстәвисинин пирамида илә кәсијиолан $A_1B_1C_1$ үчбучағы нәзәрдән кечирәк. $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ олар. Демәли, $A_1B_1C_1$ үчбучағы дүзкүн үчбучагдыр. Мәркәзи O_1 олан чеврә исә бу дүзкүн үчбучағын дахилинә чәкилмиш чеврә олачагдыр. $A_1O_1 \parallel AO$ олар. Бурадан $\angle SA_1O_1 = \angle SAO$. Тутаг ки, $KL = x$. Лакин $OO_1 = KL$. Шәртә көрә силиндр бәрабәртәрәфлидир. Она көрә $LN = x$ олар. Бурадан силиндрин радиусу $O_1K = \frac{x}{2}$, харичә чәкилмиш чеврәнин радиусу исә: $A_1O_1 = x$ олар. SAO дүзбучаглы үчбучағында: $SO = AS \sin \alpha = a \sin \alpha$. SA_1O_1 үчбучағында: $SO_1 = A_1O_1 \operatorname{tg} \alpha = x \operatorname{tg} \alpha$. $SO = OO_1 + SO_1 = x + x \operatorname{tg} \alpha$, бурада SO-нун гијмәтини јеринә јазаг:

$$x + x \operatorname{tg} \alpha = a \sin \alpha, \quad x(1 + \operatorname{tg} \alpha) = a \sin \alpha,$$
$$x(\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha) = a \sin \alpha,$$

бурадан $x = \frac{\sqrt{2}\, a \sin 2\alpha}{4 \sin(\alpha + 45^\circ)}$.

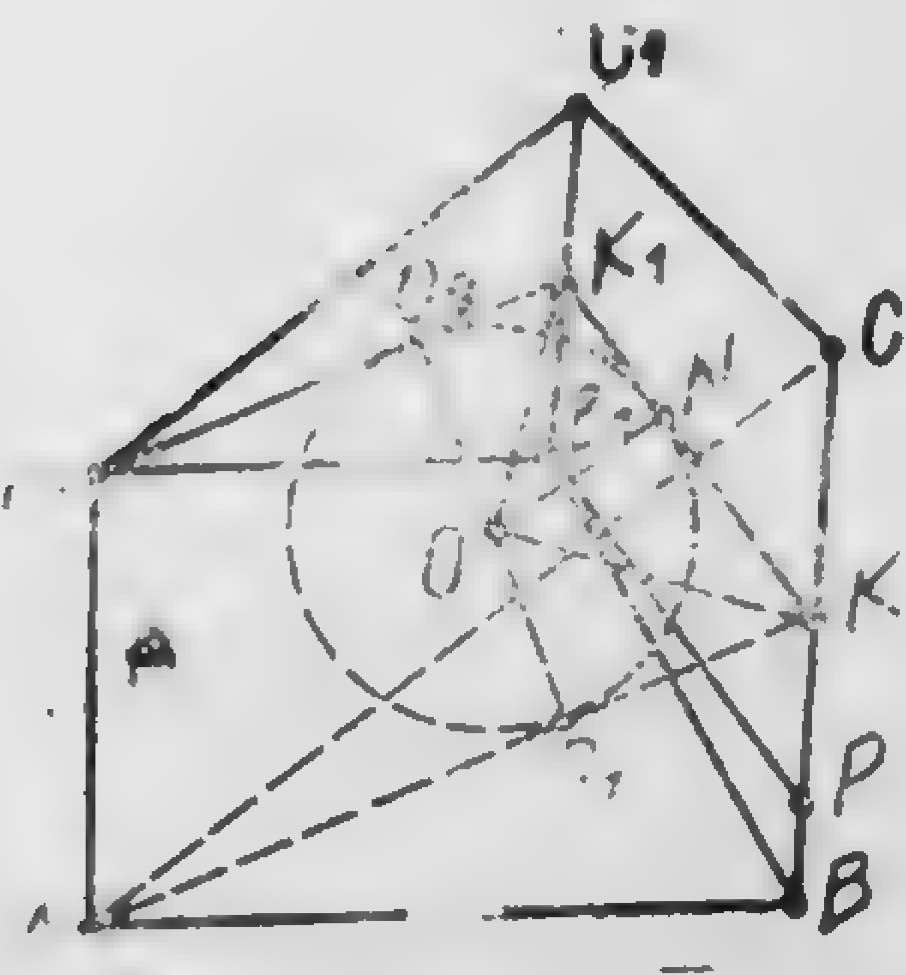
155. Пирамиданын алт вә үст отурачағынын тәрәфинин узунлуғу олараг a, b; ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбучагларынын дахилинә (шәкил 148) чәкилмиш чеврәләрин радиусуну исә узунлуғу олараг R вә r_1 илә ишарә едәк. Онда пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{2r}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\, r\,(a^2 + b^2 + ab). \qquad (1)$$

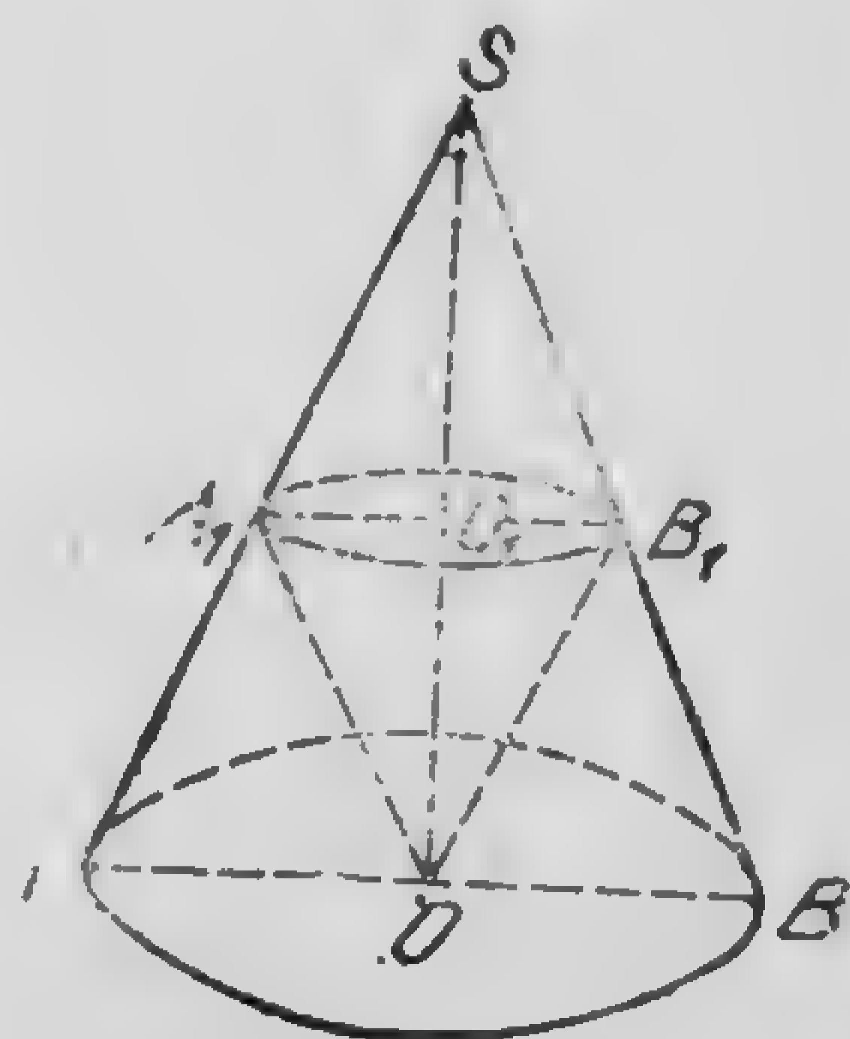
O_1, N вә O_2 тохунма нөгтәләридир. Бурадан $K_1N = K_1O_2$, $KN = KO_1$. Она көрә

$$KK_1 = KN + K_1N = R + r_1 \qquad (2)$$

$B_1P \perp BC$ чәкәк. Онда $BP = \frac{a-b}{2}$. Үчбучагларын тәрәфләринин дахилә чәкилмиш чеврәләрин радиусу илә ифадә едәк: $a = 2R\sqrt{3}$, $b = r_1\sqrt{3}$. Бурадан $R = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $r_1 = \frac{b}{2\sqrt{3}}$, R вә r_1-ин гиjмәтләрини (2)-дә нәзәрә алсаг: $B_1P = KK_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a+b)$. $\triangle BB_1P$-дән: $\left(\frac{a+b}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = b^2$, бурадан $a = 2b$. $\triangle OKK_1$-дән: $r^2 = Rr_1$ вә jа $r^2 = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{ab}{12}$; бурада $a = 2b$ бәрабәр-



Шәкил 148



Шәкил 149

лиjини нәзәрә алсаг, $b = r\sqrt{6}$, $a = 2r\sqrt{6}$. Бу гиjмәтләри (1)-дә jеринә jазсаг: $V = 7\sqrt{3}\,r^3$.

156. ASB вә A_1OB_1 конусларын ох кәсикләри, OO_1 исә онларын ортаг һүндүрлүкләри, $AA_1 \perp OB_1$, $A_1O \parallel BB_1$, $AA_1 = BB_1$, $\angle ASB = \alpha$ (шәкил 149). A_1B_1 вә AB дүз хәтләри ики паралел мүстәвинин үчүнчү мүстәви илә кәсишмә хәтләри олдуғундан бир-биринә паралелдир. $AO \parallel A_1O_1$ вә $AA_1 \parallel B_1O$ олдуғундан AA_1B_1O паралелограмдыр. Она көрә $AO = A_1B_1$, $AA_1 = OB_1$, лакин $BB_1 = AA_1$. $BB_1 = AA_1$, $OB_1 = AA_1$ олдуғу үчүн $BB_1 = OB_1$. Демәли, OB_1B үчбучағы бәрабәрjанлы үчбучагдыр. $\angle OB_1B = \angle ASB$. A_1OB_1S дөрдбучаглысында $A_1S \parallel OB_1$ вә $A_1O \parallel SB_1$ олдуғу үчүн дөрдбучаглы паралелограмдыр. Она көрә $\angle A_1OB_1 = \angle ASB$. BO-ну R, OO_1 исә H илә ишарә едәк. $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$, $A_1B_1 = 2O_1B_1$ олдуғу үчүн $O_1B_1 = \frac{A_1B_1}{2} = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$.

Кәсик конусун һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + R\cdot\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}HR^2. \qquad (1)$$

OB_1B бәрабәрjанлы үчбучағында: $\frac{OB}{\sin\alpha} = \frac{BB_1}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$

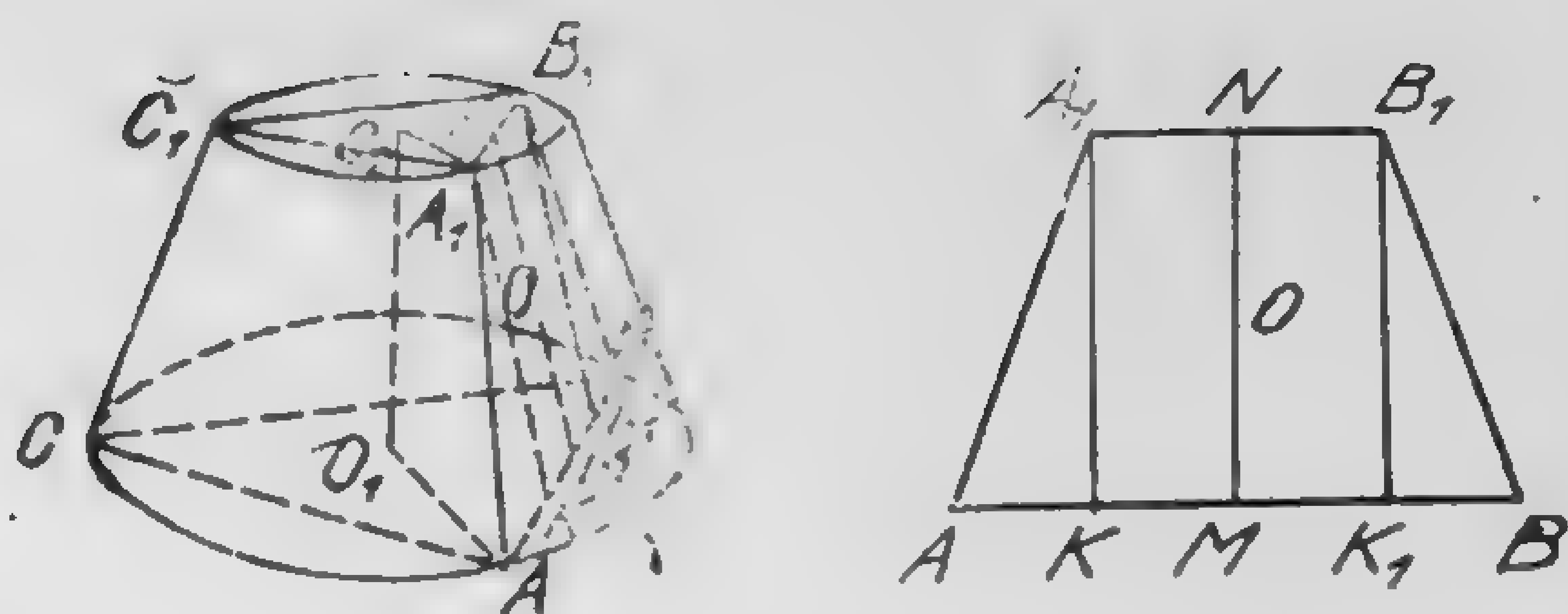
вә jа $\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Бурадан $R = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$. OO_1B_1 үчбучағында: $OO_1 = OB_1\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}$.

H вә R-ин гиjмәтләрини (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$V = \frac{7\pi}{12}\cdot a\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{7}{6}\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

157. $ABCA_1B_1C_1$—конусун дахилинә чәкилмиш дүзкүн үчбучаглы кәсик пирамидадыр, $\angle A_1AB = \alpha$, мәр-



Шәкил 150

кәзи O олан чеврә пирамиданын јан үзүнүн дахилинә чәкилмишдир, $OM = r$ (шәкил 150).

Чеврәнин O мәркәзини M вә N тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк. Онда $OM \perp AB$ вә $ON \perp A_1B_1$. Демәли, OM илә ON радиуслары ејни бир дүз хәтт үзәриндәдир, јә'ни MN диаметрдир. Харичә чәкилмиш дөрдбучаглынын хассәсинә көрә $AA_1 + BB_1 = AB + A_1B_1$ олур. Пирамида дүзкүн кәсик пирамида олдуғундан $AA_1 = BB_1$. Она көрә $AB + A_1B_1 = 2AA_1$ олачагдыр. Кәсик конусун јан сәтһи:

$$S_{јан} = \pi(AO_1 + A_1C_2)\cdot AA_1 = \pi\left(\frac{AB}{\sqrt{3}} + \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}}\right) \times$$

$$\times AA_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot AA_1(AB + A_1B_1) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot AA_1\cdot 2AA_1 = \frac{2\pi AA_1^2}{\sqrt{3}}$$

AA_1K дүзбучаглы үчбучағында:

$$\angle A_1AK = \alpha, \quad \frac{A_1K}{AA_1} = \sin\alpha, \quad AA_1 = \frac{A_1K}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

$$S_{јан} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2r}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{8\sqrt{3}\,r^2}{3\sin^2\alpha}.$$

158. A_1C—силиндр дахилинә чәкилмиш дүзбучаглы паралелепипеддир. $A_1B_1 = a$, $\angle AB_1D = \beta$, $\angle DB_1D_1 = \alpha$ (шәкил 151).

Силиндрин сәтһинин саһәси: $S_{јан} = \pi D_1B_1\cdot DD_1$.

D_1B_1D үчбучағында: $\angle DB_1D_1 = \alpha$, DB_1 парчасыны x илә ишарә едәк, $DD_1 = x\sin\alpha$, $B_1D_1 = x\cos\alpha$.

DAB_1 дүзбучаглы үчбучағында: $\angle AB_1D = \beta$, $AD = x\sin\beta$, $AB_1 = x\cos\beta$ AA_1B_1 үчбучағында: $AB_1^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2$, $(x\cos\beta)^2 = (x\sin\alpha)^2 + a^2$, бу сон бәрабәрликдән алырыг:

$$x^2 = \frac{a^2}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} = \frac{a^2}{\frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2a^2}{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}, \quad x = \frac{a}{\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}},$$

$$D_1B_1 = x\cos\alpha = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}},$$

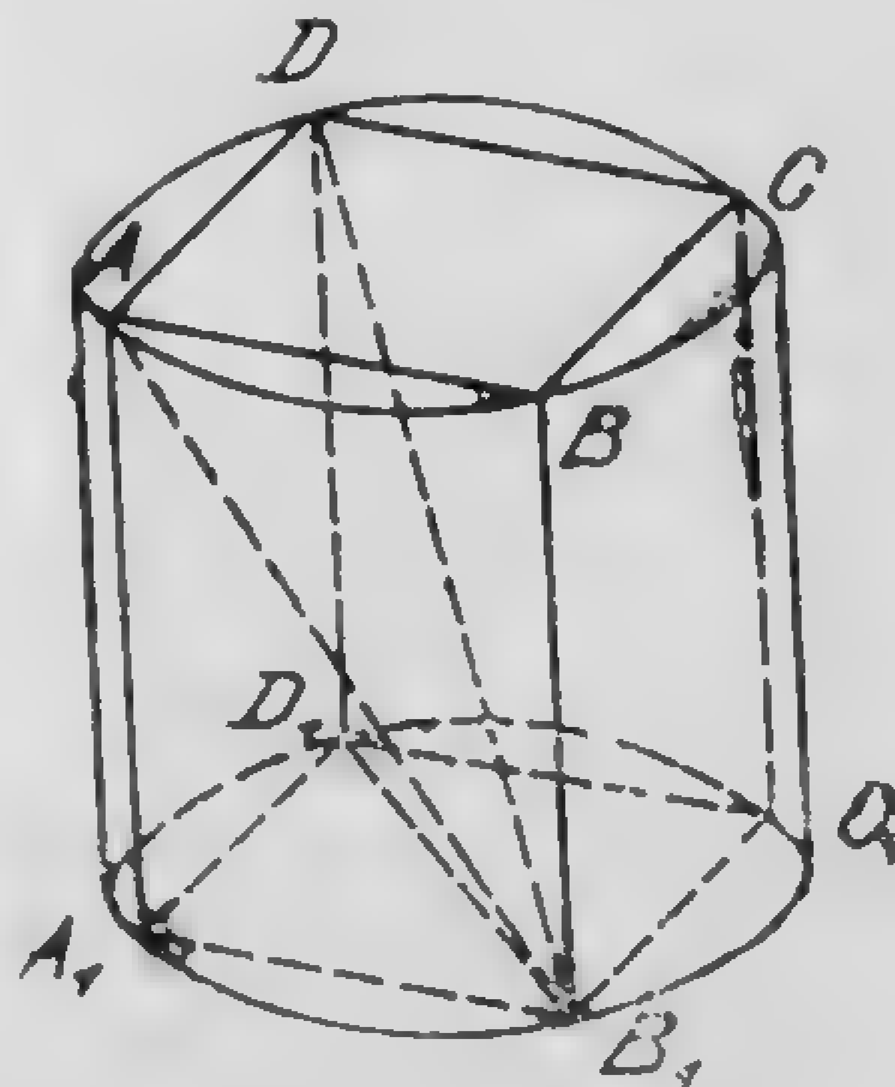
$$DD_1 = x\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}.$$

Силиндрин јан сәтһи: $S_{јан} = \pi B_1D_1\cdot DD_1 =$

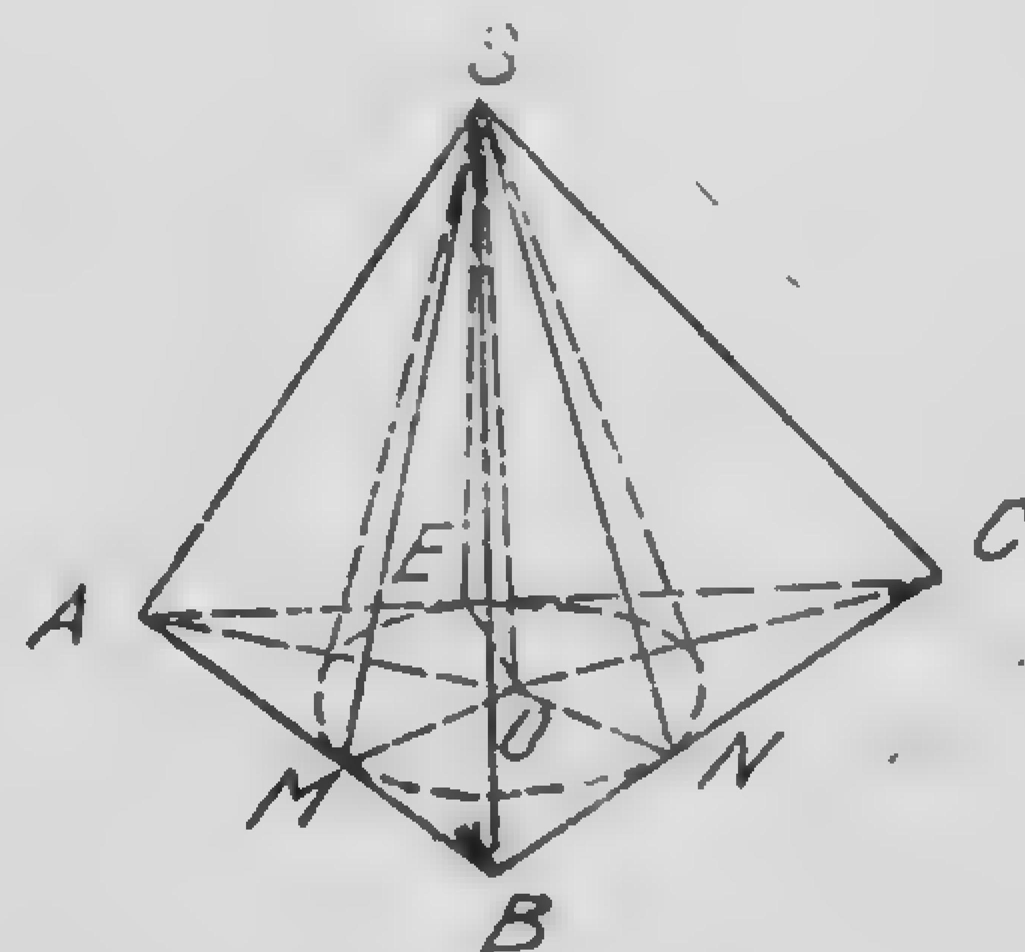
$$= \pi\cdot\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}} =$$

$$= \frac{\pi a^2\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

159. $SMNE$ конус, $OM = r$, $\angle SMO = \varphi$, $SABC$ конусун харичинә чәкилмиш пирамидадыр, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = \alpha$ (шәкил 152). Фәрз едәк ки, SO һүндүрлүк, M, E вә N тохунма нөгтәләридир. O мәркәзини һәмин тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк, онда $OM \perp AB$, $OE \perp AC$ вә $ON \perp BC \cdot M$ илә S нөгтәсини бирләшдирәк. OM парчасы SM-ин проjексиjасыдыр вә үч перпендикулјар теореминә көрә $SM \perp AB$ олачагдыр. O нөгтәси BAC бучағынын тәрәфләриндән ејни мәсафәдә олдуғу үчүн AO парчасы һәмин бучағын тәнбөләни олачагдыр.



Шәкил 151



Шәкил 152

һәмин сәбәбә көрә OC дә ABC бучағынын тәнбөләни олур. $\angle OMB = \angle MBN = \angle BNO = 90°$ олдуғундан $MBNO$ дөрдбучаглысы дүзбучаглыдыр. Бу дүзбучаглыда $ON = OM$ олдуғу үчүн дүзбучаглы квадратдыр.

Пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{от}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{2}\, AB\cdot BC\cdot SO.$$

AOM дүзбучаглы үчбучағында:

$$\angle MAO = \frac{\alpha}{2},\ OM = r,\ AM = OM \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$AB = AM + MB = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + r.$$

$$\triangle CON\text{-дән: } \angle NCO = 45° - \frac{\alpha}{2},$$

$$CN = CN \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = r\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$CB = CN + NB = r\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + r,$$

$$AC = AE + EC = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

SOM дүзбучаглы үчбучағында: $\angle SMO = \varphi$, $SO = OM\operatorname{tg}\varphi = r\operatorname{tg}\varphi$, $\frac{OM}{SM} = \cos\varphi$, $SM = \frac{OM}{\cos\varphi} = \frac{r}{\cos\varphi}$.

Нәһајәт һәчми һесаблаја биләрик:

$$V = \frac{1}{6} r^3 \left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 + \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]\operatorname{tg}\varphi.$$

Сонунчу ифадәни садәләшдирсәк аларыг:

$$V = \frac{r^3}{3}\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

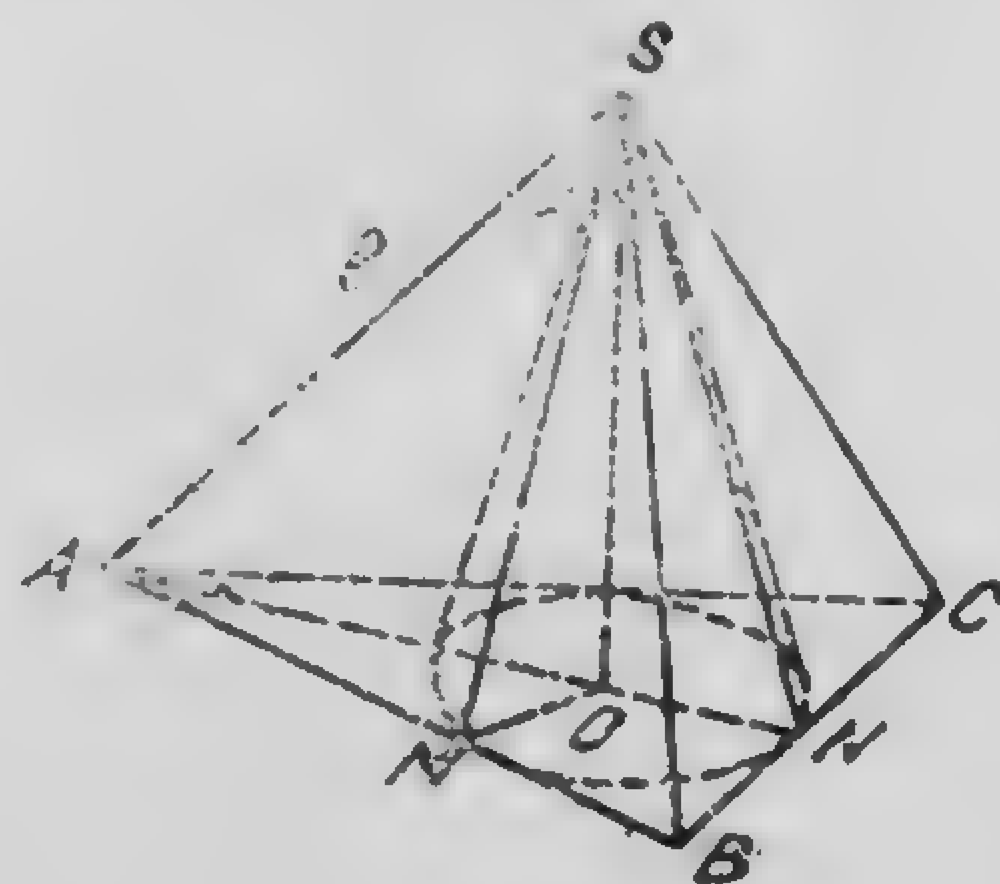
Пирамиданын јан сәтһи: $S_{јан} = \frac{1}{2} SM(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\cos\varphi}\left[r + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + r + r\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{r^2}{\cos\varphi}\left[1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$

160. $SABC$ дүзкүн үчбучаглы пирамидадыр; $\angle SKA = \alpha$; AN парчасы SBC мүстәвисинә перпенди-

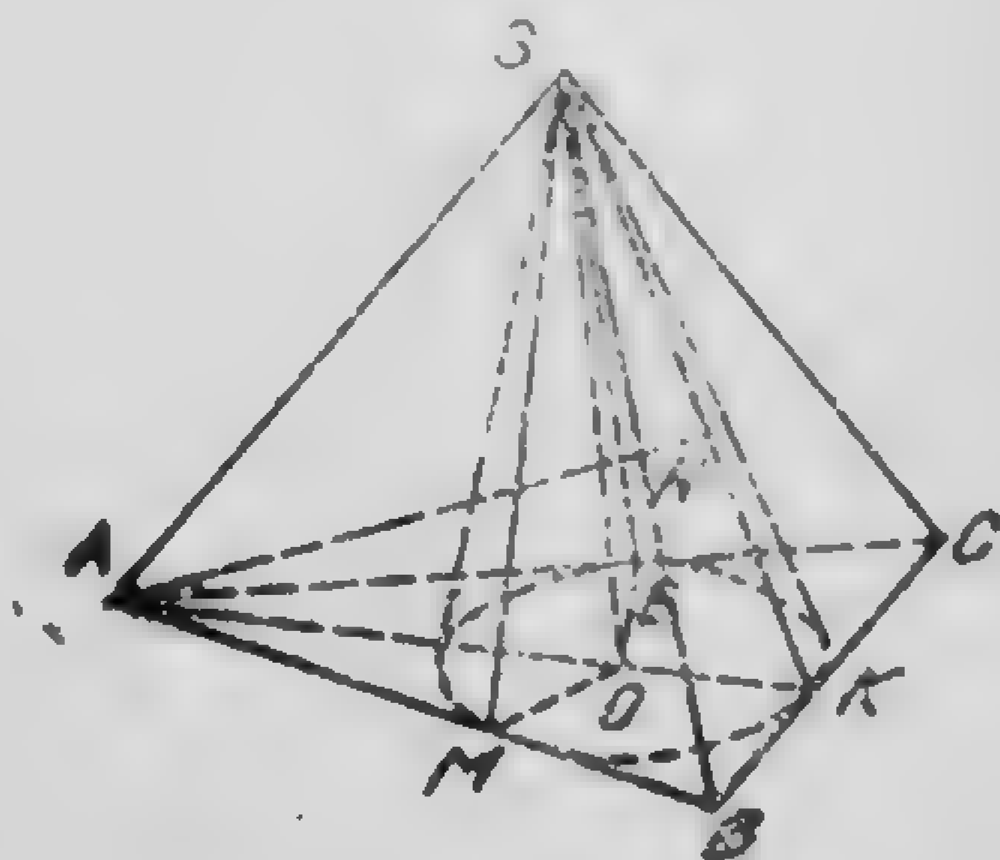
кулјардыр; бу пирамида дахилинә конус чәкилмишдир (шәкил 153). $OK \perp BC$. AK вә OK парчалары ејни O нөгтәсиндән кечиб, ејни BC дүз хәттинә перпендикулјардыр. Демәли, AK вә OK парчалары үст-үстә дүшүр. SO отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар олдуғу үчүн AK парчасына да перпендикулјардыр. S илә K нөгтәләрини бирләшдирәк. OK парчасы SK-нын проjексијасыдыр вә үч перпендикулјар теореминә көрә $SK \perp BC$ олмалыдыр. Бурадан ајдындыр ки, SKO бучағы отурачагдакы икиүзлү бучағын хәтти бучағыдыр: KS маили конусун доғураны, пирамиданын исә апофемидир.

BC дүз хәтти ASK мүстәвисинә перпендикулјар олачагдыр.

SBC мүстәвиси ASK мүстәвисинә перпендикулјар олан BC дүз хәтдән кечдијиндән бу мүстәвиләр бир-биринә перпендикулјардыр. AN парчасынын бу перпендикулјар мүстәвиләрин бири илә (ASK мүстәвиси) ортаг нөгтәси олуб, о биринә перпендикулјар (SBC мүстәвисинә) олдуғундан тамамилә AN перпендикулјары ASK-нын үзәринә дүшүр. Демәли, $AN \perp SK$ олур. ANK дүзбучаглы үчбучағындан: $ANK = 90°$, $\angle AKN = \alpha$, $AN = b$, $AK = \frac{AN}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha}$. AOM дүзбучаглы үчбучағындан: $AO = AK - OK = \frac{b}{\sin\alpha} - OK$, беләликлә $\frac{OM}{AO} = \sin\angle MAO$; $OM = AO\sin 30° = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sin\alpha} - \right.$



Шәкил 153



Шәкил 154

(ч. I.). Сон бәрабәрликдән аларыг: $OK = \frac{b}{3\sin\alpha}$. SOK дүзбуҹаглы үчбуҹағында: $\frac{OK}{SK} = \cos\alpha$, $SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{b}{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

Конусун сәтһинин саһәси: $S_т = S_{от} + S_{јан} = \pi\cdot OK^2 + \pi\cdot OK\cdot SK = \pi\cdot OK(OK + SK) = \pi\cdot\frac{b}{3\sin\alpha}\left(\frac{b}{3\sin\alpha} + \frac{b}{3\sin\alpha\cos\alpha}\right) = \frac{4\pi b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{9\sin\alpha\sin 2\alpha}$.

161. ASM үчбуҹағында: $AM = AS\sin\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2}$ (шәкил 154). AMO үчбуҹағында $r = OM = AM\cdot\mathrm{tg}30^\circ = l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}l\sin\frac{\alpha}{2}$. $R = AO = 2r = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

ASO үчбуҹағында:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \frac{l}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Радикалдакы ифадәни садәләшдирсәк аларыг:

$$SO = \frac{2l}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Конусун һәҹми:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{2l}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{9\sqrt{3}}.$$

162. SO конусун оху, $ABCD$—конусун отураҹағы дахилинә чәкилмиш квадрат, SAB квадратын тәрәфи илә конусун тәпәсиндән кечән мүстәвинин конусла кәсишмәсиндән алынан үчбуҹагдыр (шәкил 155). $AB = a$, $\angle ASB = \alpha$, SAB үчбуҹағында $SB = SA$. Демәли, SAB үчбуҹағы бәрабәрјанлыдыр. $SK \perp AB$ чәкәк. KS пархасы бәрабәрјанлы үчбуҹағын һүндүрлүјү олдуғу үчүн $AK = KB$, $\angle ASK = \angle KSB$ олаҹагдыр.

Конусун һәҹми: $V = \frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot SO$.

Конусун там сәтһи:

$$S_т = \pi\cdot AO^2 + \pi AO\cdot SA = \pi AO\cdot(AO + SA).$$

ASK үчбуҹағында:

$$AS = \frac{AK}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\quad AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

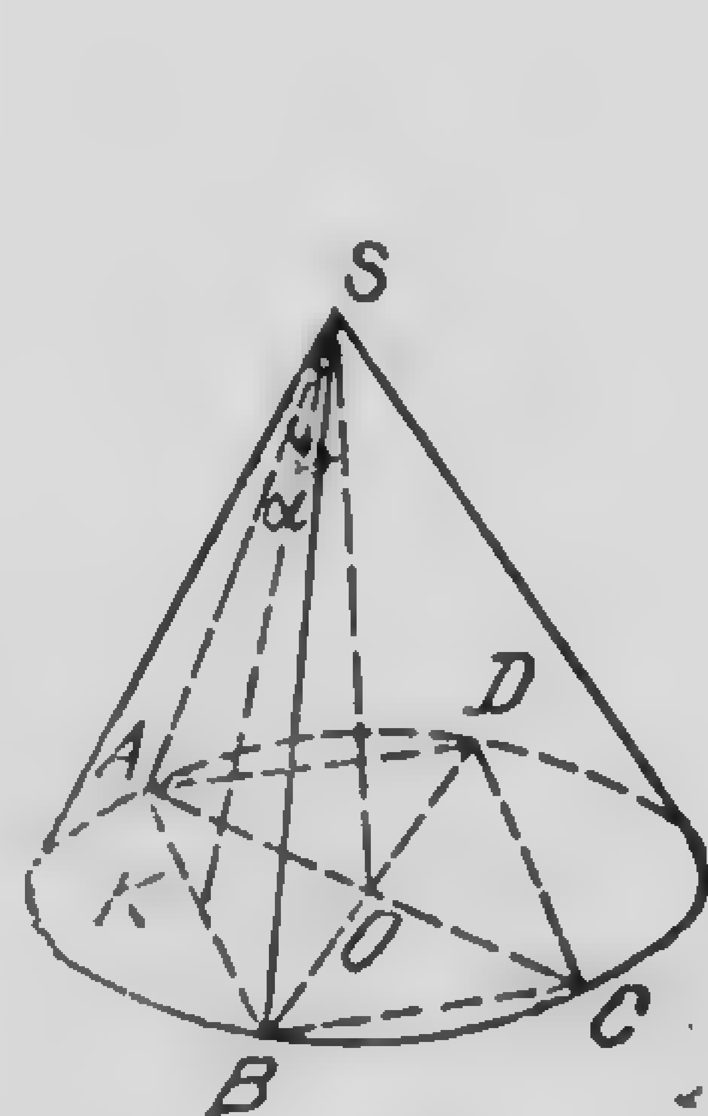
олур (AO квадратын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусудур).

ASO үчбуҹағында:

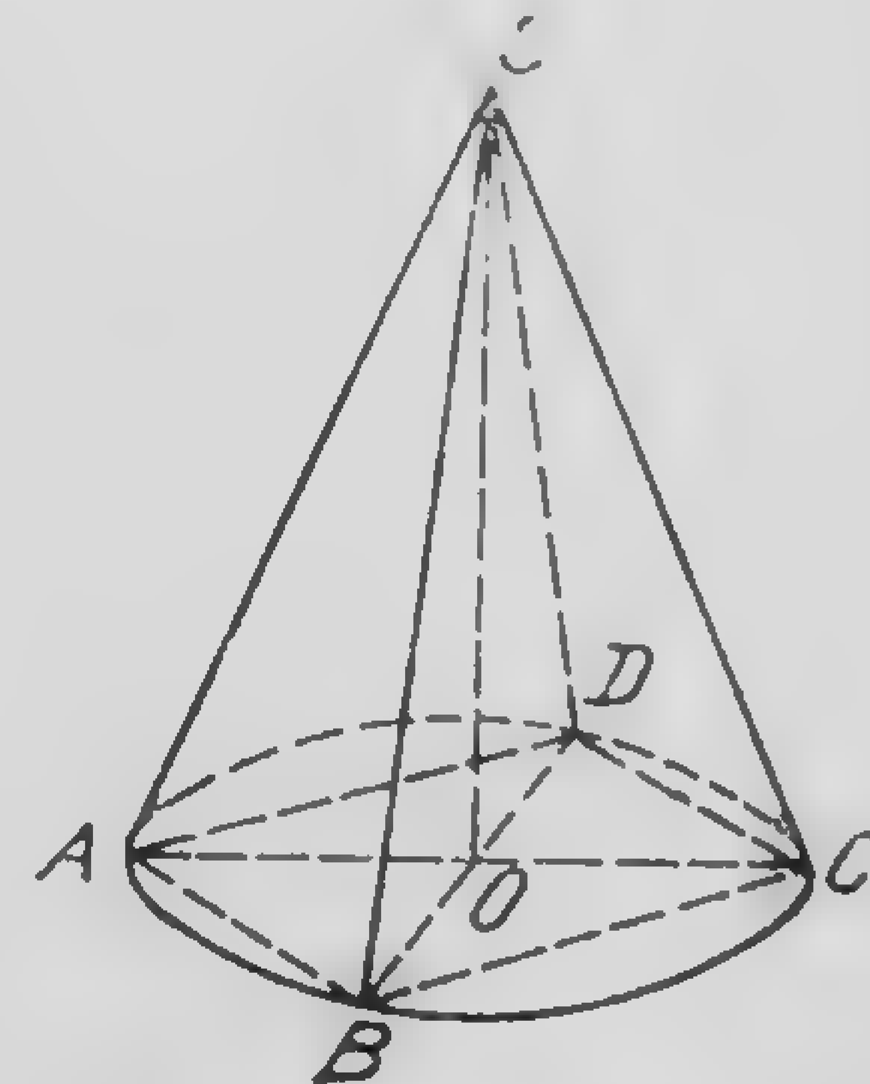
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{1-(1-\cos\alpha)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$



Шәкил 155



Шәкил 156

Конусун һәчми:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Конусун там сәтһи:

$$S_т=\pi\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\pi a^2\sin\frac{90°+\alpha}{4}\cos\frac{90°-\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

163. $AB=x$ гәбул едәк (шәкил 156), онда $AO=\frac{x}{\sqrt{2}}$ (квадратын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусу олдуғуна көрә). $S_{ABCD}=x^2$. ASO үчбучағында $SO=AO\operatorname{tg}\alpha=\frac{x\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$.

Пирамиданын һәчми: $\frac{1}{3}\cdot\frac{x\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\cdot x^2=V$, бурадан: $x=\sqrt[3]{3\sqrt{2}V\operatorname{ctg}\alpha}$. Конусун отурачағынын саһәси: $S=\pi AO^2=\pi\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{\pi x^2}{2}$. ASO үчбучағында $AS=\frac{AO}{\cos\alpha}=\frac{x}{\sqrt{2}\cos\alpha}$. Конусун там сәтһи: $S_т=\frac{\pi x^2}{2}+\pi\times$

$$\times\frac{x}{\sqrt{2}\cos\alpha}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^2}{2\cos\alpha}=\frac{\pi x^2}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\pi x^2}{2}\cdot\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{\pi\sqrt[3]{(3\sqrt{2}V\operatorname{ctg}\alpha)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=$$

$$=\pi\sqrt[3]{\frac{18V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^3\alpha}}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=\pi\sqrt[3]{\frac{18V^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

164. ASB вә AS_1B бири о биринин ичәрисиндә олан ики конусун ох кәсијидир. $SS_1=a$, $\angle ASB=\alpha$, $\angle AS_1B=\beta$ (шәкил 157).

Конусларын отурачаглары ортаг олдуғундан онларын һүндүрлүјү үст-үстә дүшәчәкдир. Һәр ики конусун коник сәтһләри илә һүдудланан бошлуғун һәчми, бөјүк конус илә кичик конусун һәчмләри фәргинә бәрабәрдир. Она көрә ахтарылан һәчм:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot SO-\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot S_1O=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot(SO-S_1O)=\frac{1}{3}\pi AO^2\cdot SS_1.$$

SO парчасы ASB бәрабәрјанлы үчбучағын тәпәсиндән чәкилмиш һүндүрлүјү олдуғу үчүн

$$\angle ASO=\frac{1}{2}\angle ASB=\frac{\alpha}{2}.$$

Һәмин гајда үзрә

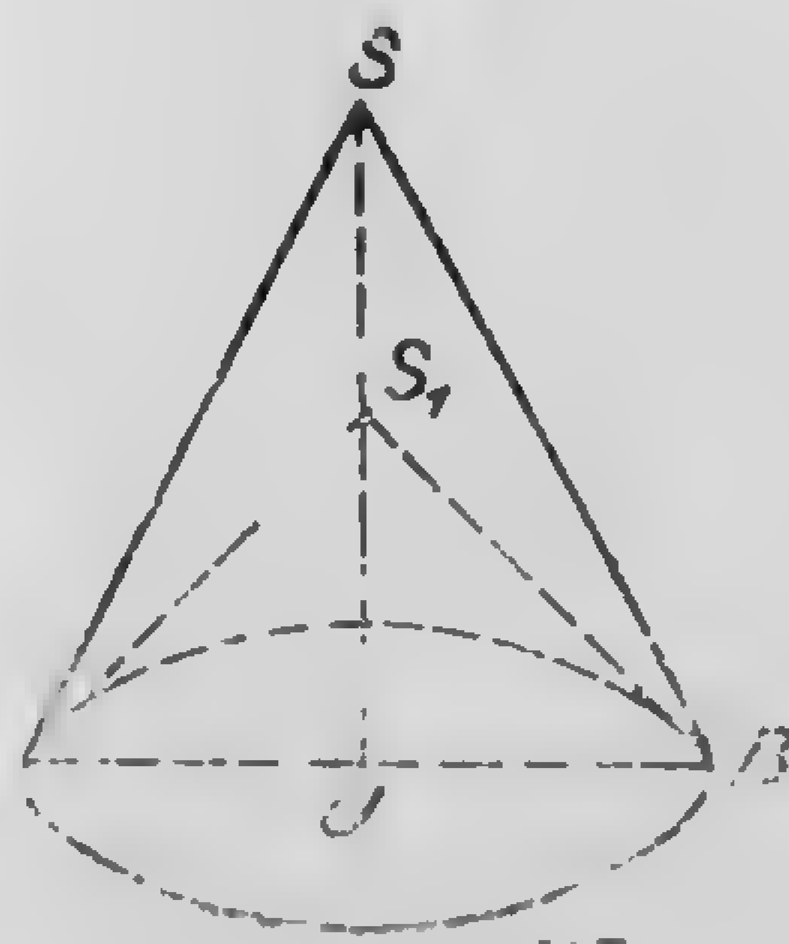
$$\angle AS_1O=\frac{1}{2}\angle AS_1B=\frac{\beta}{2}.$$

AS_1O бучағы ASS_1 үчбучағынын харичи бучағыдыр, она көрә $\angle AS_1O=\angle ASO+\angle SAS_1$, бурадан $\angle SAS_1=\angle AS_1O-\angle ASO=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha$. ASS_1 үчбучағында: $\frac{AS_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{SS_1}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$,

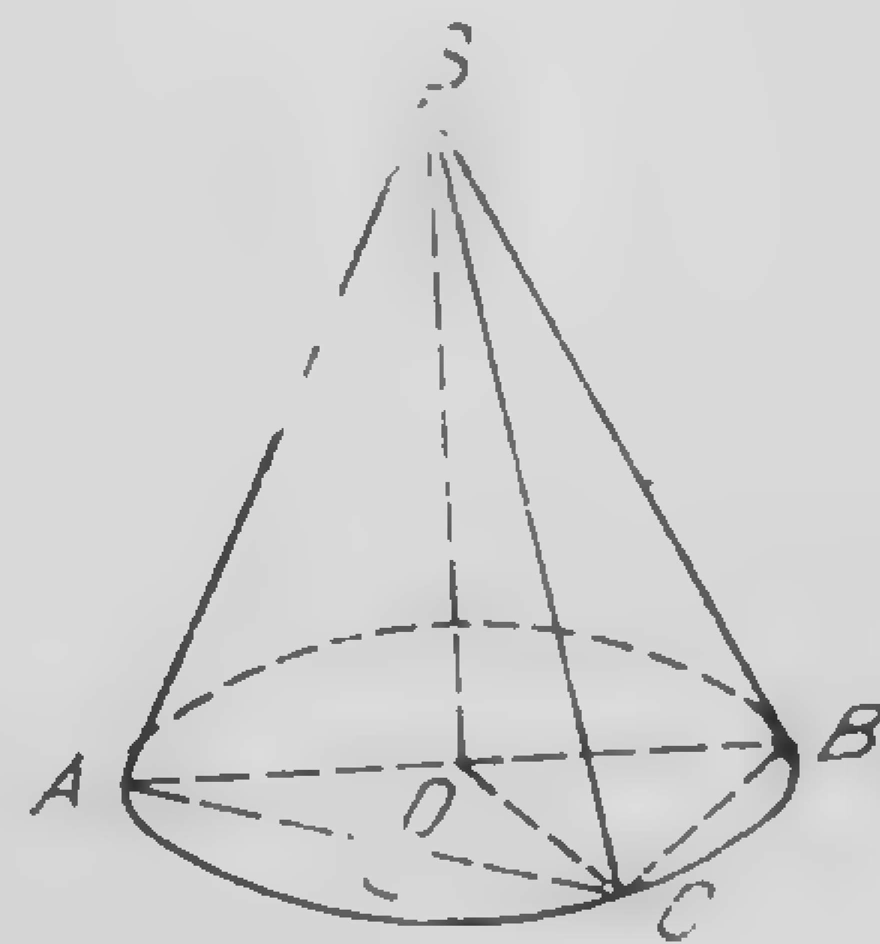
$$AS_1=\frac{SS_1\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

AS_1O үчбучағында:

$$AO=S_1A\sin\frac{\beta}{2}=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$



Шәкил 157



Шәкил 158

Ахтарылан һәчм:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot SS_1=\frac{a}{3}\pi\left[\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\right]^2=$$

$$=\frac{\pi a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{3\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

165. $SABC$ конус дахилинә чәкилмиш пирамидадыр, ABC дүзбучаглы үчбучагдыр, $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle SCO=\varphi$, $S_{jan}=m$ (шәкил 158).

Пирамида илә конусун тәпәләри ортагдыр вә пирамиданын отурачағынын тәпәләри конусун отурачағын чеврәси үзәриндәдир.

Фәрз едәк ки, O нөгтәси чеврәнин мәркәзидир. Онда SO парчасы конусун һүндүрлүјү олачагдыр. Конус илә пирамиданын һүндүрлүкләри ејнидир. Фәрз едәк ки, $AO=R$. Онда $AB=2R$.

SOC үчбучағында:

$$SC=\frac{CO}{\cos\varphi}=\frac{R}{\cos\varphi},\quad SO=CO\operatorname{tg}\varphi=R\operatorname{tg}\varphi.$$

$S_{jan}=\pi\cdot CO\cdot SC=\frac{\pi R^2}{\cos\varphi}$. Шәртә көрә $\frac{\pi R^2}{\cos\varphi}=m$, бурадан $R=\sqrt{\frac{m\cos\varphi}{\pi}}$.

ABC үчбучағында:

$$BC=AB\sin\alpha=2R\sin\alpha,\quad AC=AB\cos\alpha=2R\cos\alpha,$$

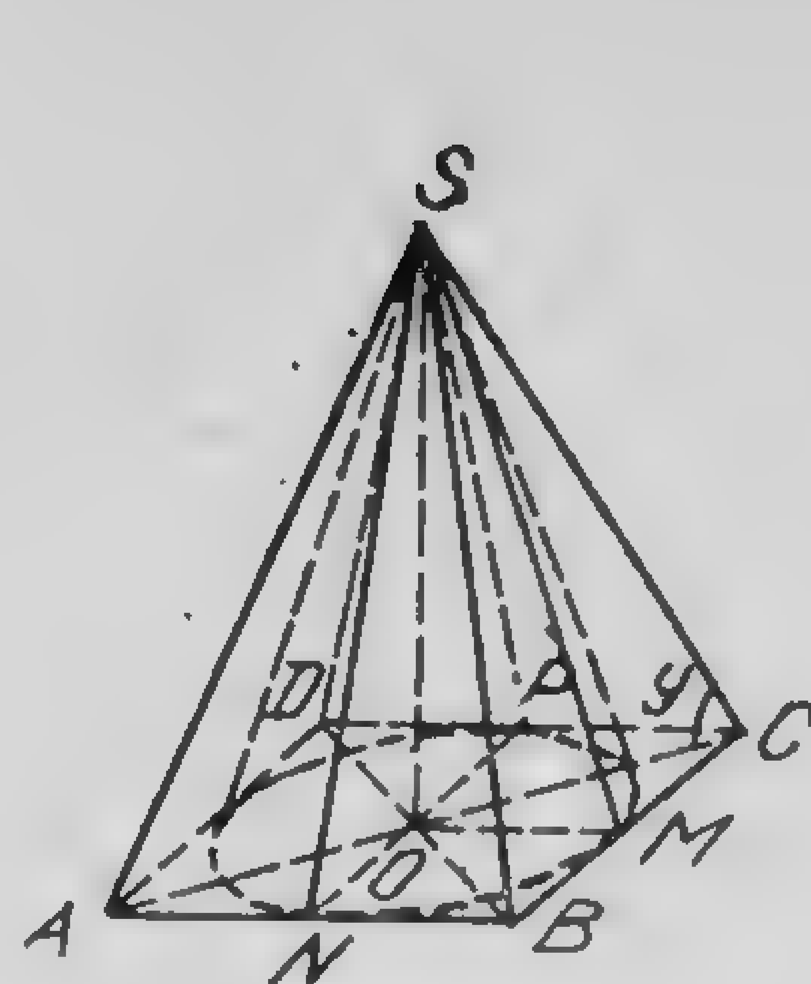
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\alpha=R^2\sin 2\alpha.$$

Пирамиданын һәчми:

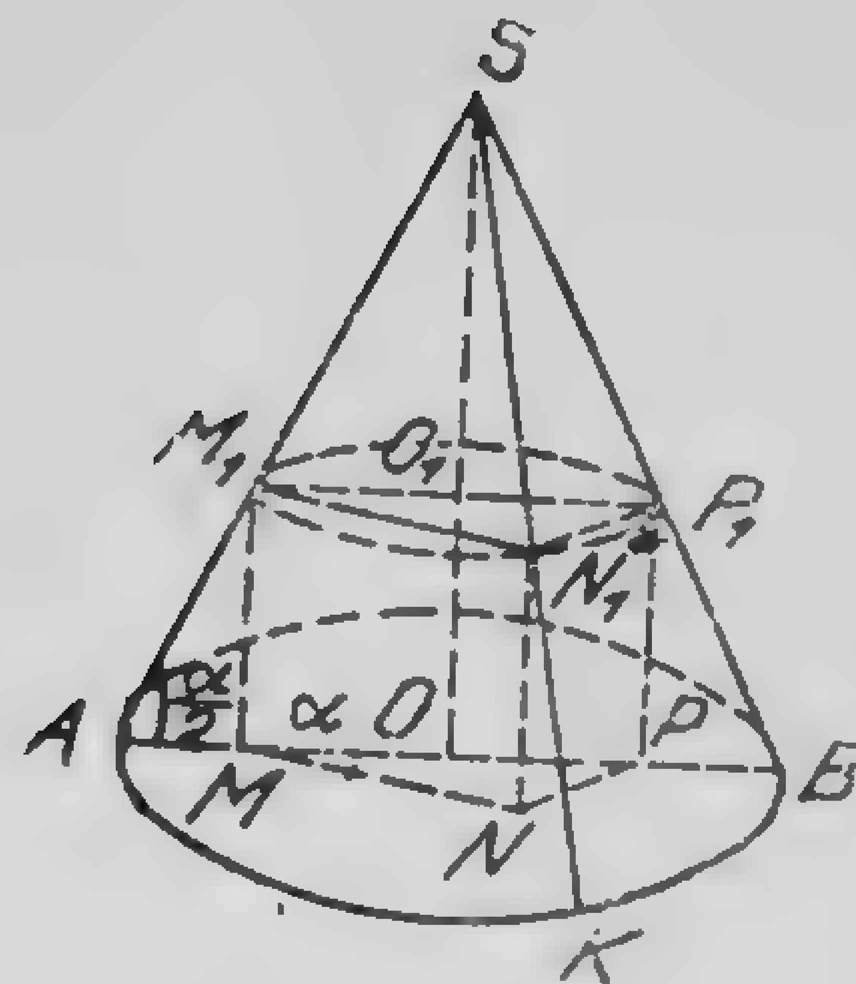
$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot SO=\frac{1}{3}R^2\sin 2\alpha\, R\operatorname{tg}\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}R^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{m^3\cos^3\varphi}{\pi^3}}\cdot\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

166. SMO үчбучағында (шәкил 159) $OM=SM\cos\alpha=m\cos\alpha$, $SO=SM\sin\alpha=m\sin\alpha$.



Шәкил 159



Шәкил 160

Конусун там сәтһи:

$$S_т=\pi OM^2+\pi OM\cdot SM=\pi\cdot OM(OM+SM)=$$

$$=\pi m\cos\alpha(m\cos\alpha+m)=2\pi m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$\angle SCO=\varphi$ ҝәбул едәк. $ABCD$ квадратын тәрәфи $AB=2MO=2m\cos\alpha$. Квадратын тәрәфини харичә чәкилмиш чеврәнин радиусу илә ифадә едәк: $AB=OC\sqrt{2}$, бурадан $OC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{2m\cos\alpha}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,m\cos\alpha$.

SOC үчбучағында:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{SO}{OC}=\frac{m\sin\alpha}{m\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha,$$

бурадан $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\right)$.

167. Призманын үст отурачаг мүстәвисинин конусла кәсији даирә олачагдыр. Конус сәтһинин M_1, N_1 вә P_1 нөгтәләри (шәкил 160) $M_1N_1P_1$ үчбучағын тәпә нөгтәләри, ејни заманда чеврәнин нөгтәләри олдуғу үчүн чеврә $M_1N_1P_1$ үчбучағын харичинә чәкилмиш чеврә олачагдыр. $M_1N_1P_1$ дахилә чәкилмиш дүзбучаг олдуғу үчүн M_1P_1 диаметр олачагдыр. Демәли, призманын бир үзү диаметрдән кечир. Фәрз едәк ки, O_1 чеврәнин мәркәзи, $O_1M_1=r$. Она көрә $M_1P_1=2r$, шәртә көрә $AM_1=r$ олур. $M_1N_1P_1$ үчбучағында: $\angle N_1M_1P_1=\alpha$, $N_1P_1=M_1P_1\sin\alpha=2r\sin\alpha$, $M_1N_1=M_1P_1\cos\alpha=2r\cos\alpha$.

AM_1M үчбучағында:

$$AM = AO - OM = AO - M_1O_1 = R - r,$$

$$AM = MM_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

бурадан $R - r = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $r = \frac{R}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$.

Призманын јан сәтһи:

$$S_{јан} = (2r + 2r \sin \alpha + 2R \cos \alpha) r =$$

$$= 2r^2 (1 + \sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2} R^2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

168. *Чаваб:* $\frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{2}}$.

169. Фәрз едәк ки, O_1 силиндрин отурачағынын мәркәзидир (шәкил 161). O_1 илә M нөгтәсини бирләшдирәк. Онда MO_1 парчасы NMP бучағынын тәнбөләни олачагдыр.

Чеврәнин ахтарылан радиусуну x илә ишарә едиб, $EO = x$. O_1EM үчбучағындан

$$O_1E = EM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \; x = EM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

$\triangle ASO$-дан: $AO = SA \cos \alpha = b \cos \alpha$.

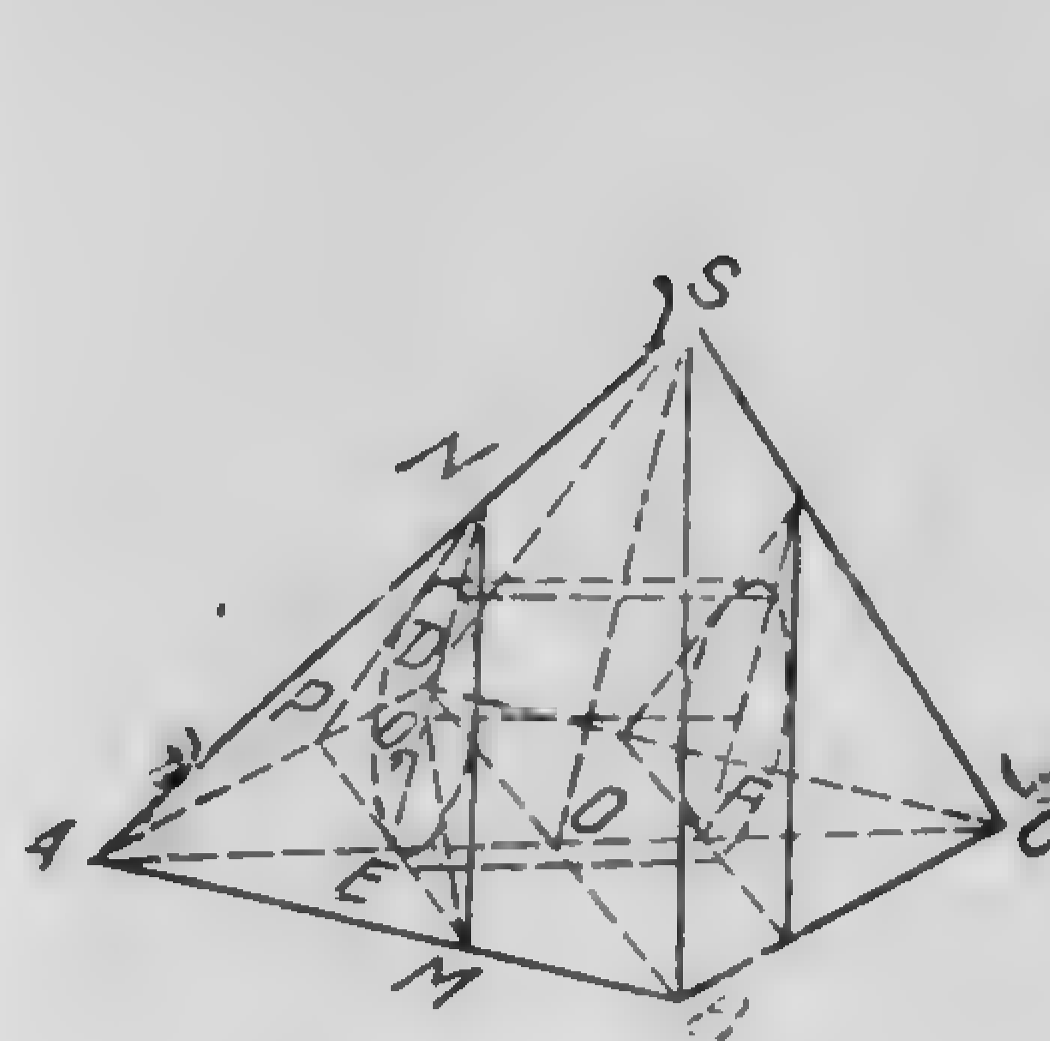
$$AE = AO - EO = b \cos \alpha - x \qquad (2)$$

(квадратын диагоналларынын хассәсинә көрә), $MP \parallel BD$ олдуғундан $AC \perp MP$ олар. AEM дүзбучаглы үчбучағында $\angle EAM = 45^\circ$. Демәли, $AE = EM$. (1) бәрабәрлијиндә сон бәрабәрлији нәзәрә алсаг: $x = AE \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} =$

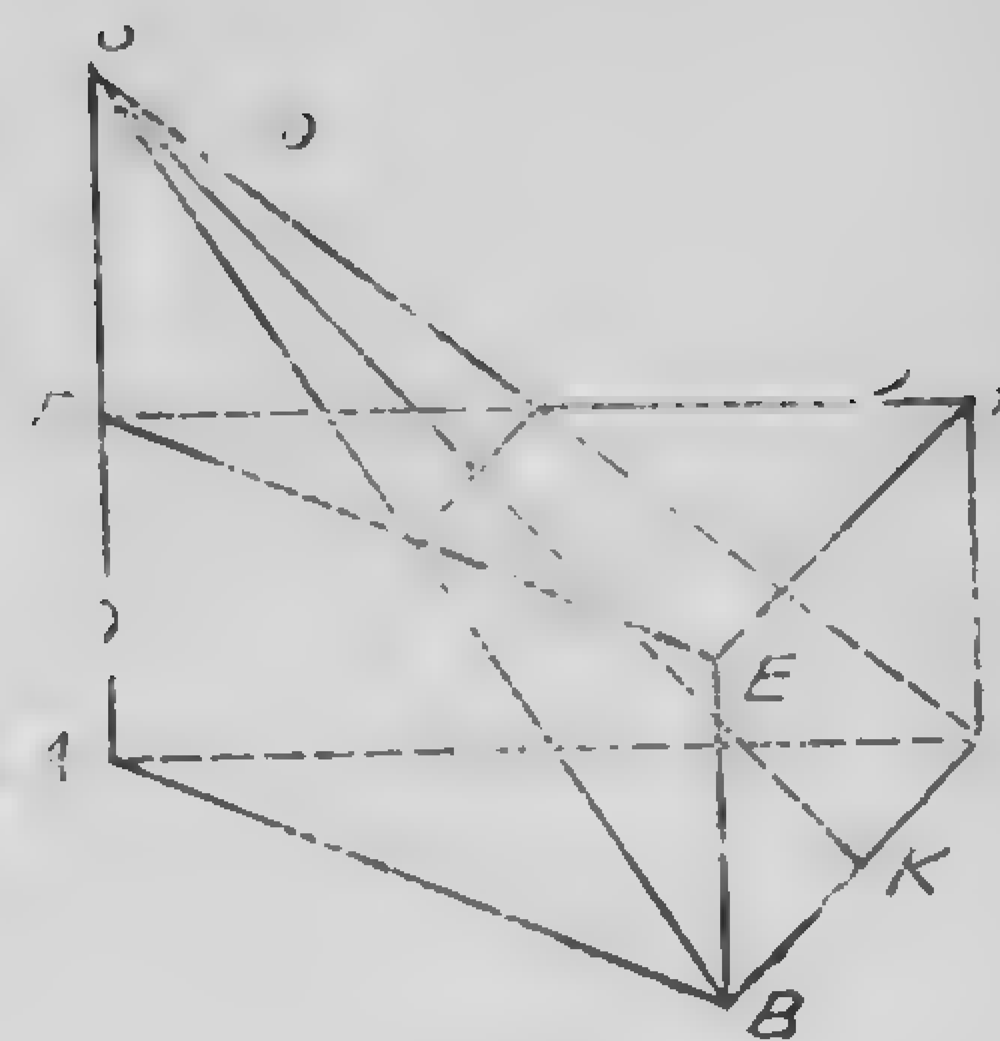
$$= (b \cos \alpha - x) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \; x = b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$x = \frac{b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos 45^\circ \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, b \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$



Шәкил 161



Шәкил 162

170. $SABC$ үчбучаглы пирамида, $ABCEFP$ исә дүз призмадыр. SAB вә SAC мүстәвиләри ABC мүстәвисинә перпендикулјардыр. $AB = a$, $\angle BSC = \alpha$, $AP = \frac{1}{2} \cdot AS$ (шәкил 162). SA дүз хәтт парчасы бир мүстәвијә перпендикулјар олан ики мүстәвинин кәсишмә хәтти олдуғундан бу дүз хәтт парчасы ABC-јә перпендикулјар олачагдыр. Демәли, SA пирамиданын һүндүрлүјүдүр. $SK \perp BC$ чәкәк, онда BCS үчбучағы бәрабәрјанлы олдуғундан $BK = KC$, $\angle BSK = \angle KSC = \frac{1}{2} \angle BSC = \frac{1}{2} \alpha$.

Призманын һәчми $V = S_{ABC} \cdot AP$ дүстуру илә һесабланыр.

BSK үчбучағында: $SB = \frac{BK}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

ASB үчбучағында:

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - a^2} =$$

$= \frac{a \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$; $1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ифадәсини һасилә че-

вир к: $1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2(1-\cos\alpha)=2\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)=$

$$=4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$SA=\frac{a\sqrt{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Призманын һ чми:

$$AP=\frac{1}{2}AS=\frac{a\sqrt{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

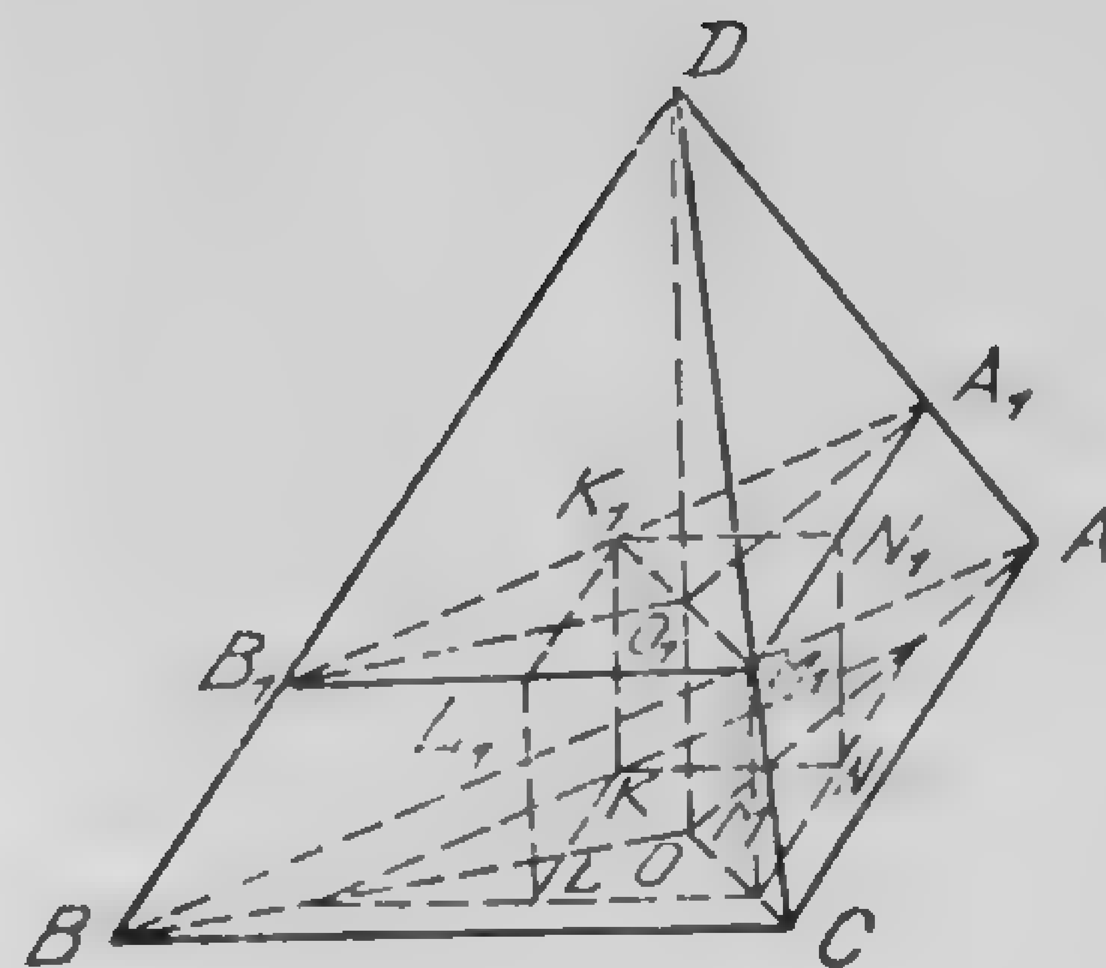
$$V=\frac{a^3\sqrt{3\sin\sqrt{30^\circ+\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{8\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

171. Фәрз ед к ки, кубун үст үзүнүн мүстәвисинин пирамида илә кәсиіи $A_1M_1B_1$ олсун (шәкил 163). Бу үчбучаг ABC үчбучағына охшар олур. Демәли, $A_1M_1B_1$ үчбучағы дүзбучаглы үчбучагдыр. Кубун үст үзүндә олан бүтүн т пәләри $A_1B_1M_1$ үчбучағынын тәрәфләри үзәриндәдир. Кубун үст үзүнү гураг. $A_1M_1B_1$ дүзбучағын M_1K_1 тәнбөл ни ин. $K_1N_1\perp A_1M_1$, $K_1L_1\perp B_1M_1$ чәкәк. Алынан дөрдбучаглы квадрат олачагдыр. $K_1L_1\parallel A_1M_1$, $K_1N_1\parallel B_1M_1$ олсун. Демәли, $M_1N_1K_1L_1$ квадраты шәртдә верил н кубун үст үзүдүр. Кубун тилини x илә ишарә едәк. Тутаг ки, DO парчасы пирамиданын һүндүрлүјүдүр. O_1 нөгтәси DO һүндүрлүјү илә $M_1N_1K_1L_1$ үзүнүн кәсишмә нөгтәсидир. Пирамиданын паралел кәсијинин хассәләринә көрә $\triangle B_1M_1O_1\backsim\triangle BOC$. $B_1O_1\parallel BO$ олдугу үчүн $\triangle DB_1O_1\backsim\triangle DBO$ олур. Она көрә

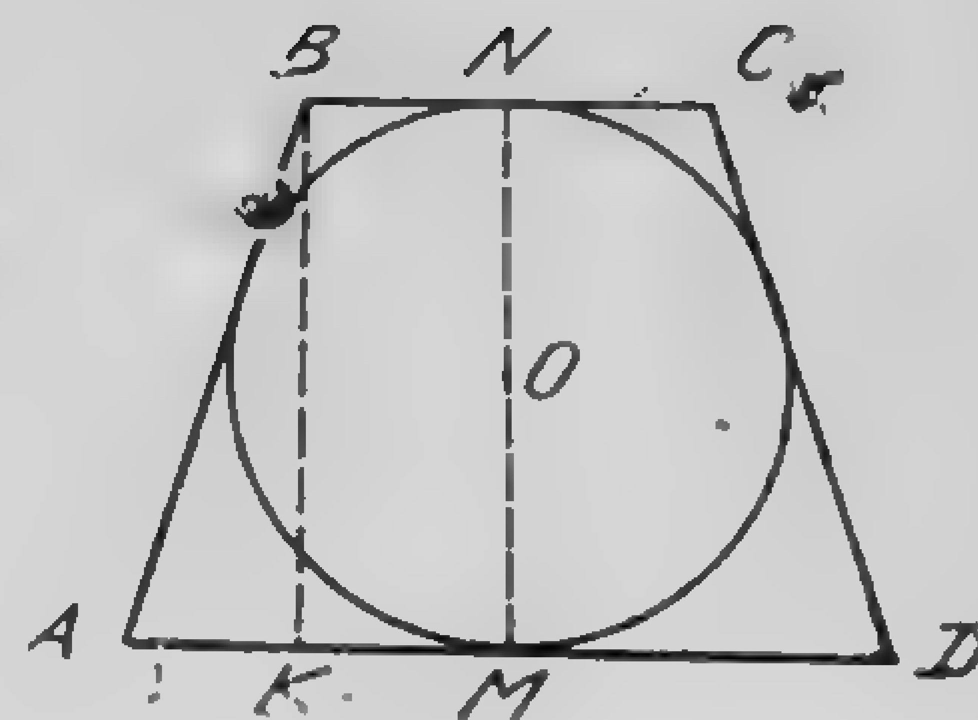
$$B_1O_1:BO=DO_1:DO. \qquad (1)$$

Лакин $\triangle B_1O_1M_1\backsim\triangle BOC$ олдуғундан $B_1M_1:BC=B_1O_1:BO$. (1) вә сон тәнасүбл рдән $B_1M_1:BC=DO_1:DO$ вә ја $B_1M:B=(24-x):24$,

$$B_1M_1=\frac{8(24-x)}{24}=\frac{24-x}{3}.$$



Шәкил 163



Шәкил 164

$\triangle B_1K_1L_1\backsim\triangle ABC$ олдуғундан $K_1L:B_1L_1=AC:BC$, бурадан:

$$K_1L_1=x,\ B_1L_1=B_1M_1-M_1L_1=\frac{24-x}{3}-x=\frac{24-4x}{3}.$$

Онда сон т нәсүбдә гијмәтләрини јеринә јазсаг:

$$x:\frac{24-4x}{3}=6:8,\ \text{бурадан}\ x=3.$$

173. $ABCD$ к сик конусун ох кәсији, O исә кәсик конусун дахилинә чәкилмиш күрәнин ох кәсијинин мәркәзидир (ш кил 164).

Фәрз едәк ки, конусун отурачагларынын радиуслары $AM=R_1$, $BN=r$, күрәнин радиусу исә $OM=R$, $\angle BAM=x$. $BC+AD=AB+CD$ вә ја

$$2R_1+2r=2AB,\quad AB=r+R_1. \qquad (1)$$

Күрәнин сәтһи: $S_1=4\pi R^2$. К сик конусун јан сәтһи: $S_2=\pi(r+R_1)\cdot AB$ олур. Бурада (1) бәрабәрлијини нәзәрә алсаг,

$$S_2=\pi AB^2. \qquad (2)$$

ABK үчбучағында: $AB=\frac{BK}{\sin x}=\frac{2R}{\sin x}$, бу бәрабәрлији (2)-дә нәзәрә алсаг:

$$S_2=\pi AB^2=\pi\left(\frac{2R}{\sin x}\right)^2=\frac{4\pi R^2}{\sin x}.$$

М сәләнин шәртинә көрә:

$$\frac{4\pi R^2}{\sin^2 x}:4\pi R^2=m:n,\quad \frac{1}{\sin^2 x}=\frac{m}{n},\quad x=\arcsin\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

174. Тутаг ки, SAB дүз даирәви конусун ох кәсији, O онун дахилинә чәкилмиш күрәнин ох кәсијинин мәркәзи, SO_1 һүндүрлүјү, SAO_1 бучагы конусун доғураны илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучагдыр (шәкил 165).

O мәркәзи илә N тохунма нөгтәсини бирләшдирәк, онда $ON \perp AS$ олачагдыр. A нөгтәси илә O мәркәзини бирләшдирәк, онда AO парчасы SAO_1 бучағынын тәнбөләни олачагдыр. Конусун отурачагынын радиусуну r илә, онун отурачагы илә доғураны арасындакы бучагы исә x илә ишарә едәк. Конусун отурачағынын саһәси: $S_{от} = \pi r^2$.

AOO_1 дүзбучаглы үчбучагда:

$$\angle OAO_1 = \frac{x}{2},\ AO_1 = r,\ OO_1 = AO_1 \operatorname{tg}\frac{x}{2} = r \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Күрәнин сәтһи: $S = 4\pi\cdot OO_1^2 = 4\pi r^2 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

Конусун јан сәтһи: $S_{јан} = \pi\cdot AO_1\cdot AS$.

ASO_1 дүзбучаглы үчбучагда: $AS = \frac{AO_1}{\cos x} = \frac{r}{\cos x}$

онда конусун јан сәтһи:

$$S_{јан} = \pi\cdot r\cdot\frac{r}{\cos x} = \frac{\pi r^2}{\cos x}.$$

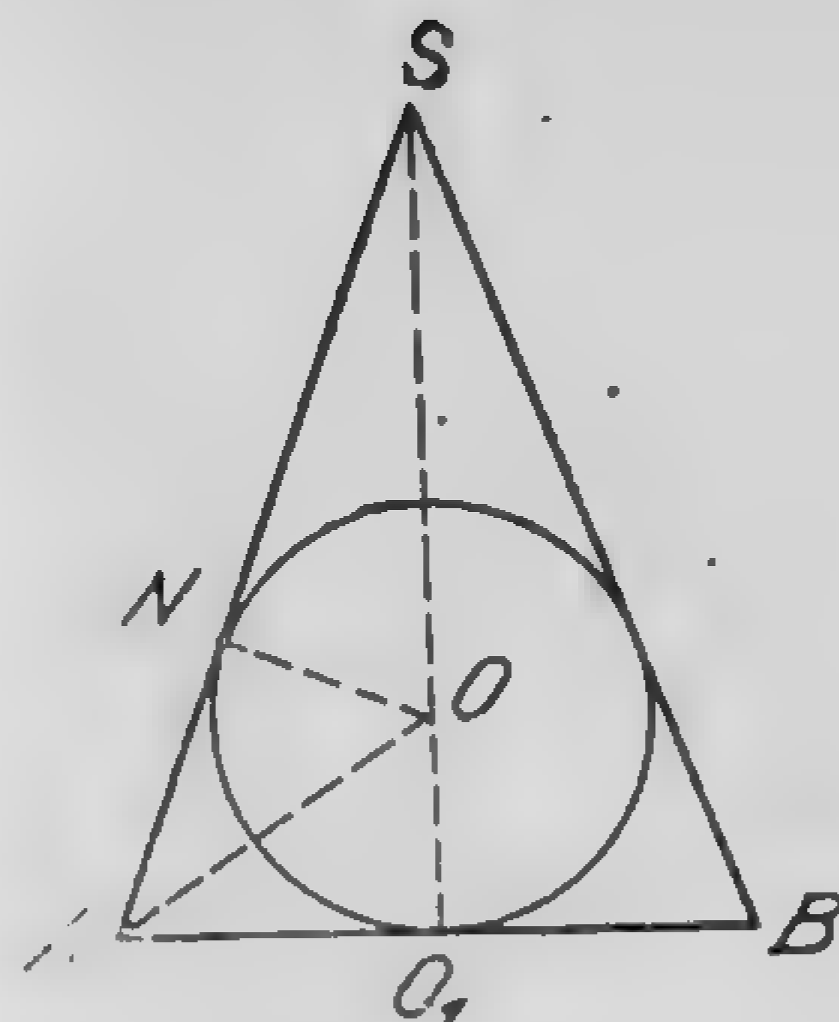
Әдәди силсиләнин һәр үч ардычыл һәддинин икинчиси биринчи илә үчүнчү һәдд арасында әдәди ортадыр, јә'ни $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$. Бу дүстурда јухарыда тапдығымыз гијмәтләри јеринә јазаг: $4\pi r^2 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\pi r^2 + \frac{\pi r^2}{\cos x}}{2}$, бу тәнлији садәләшдикдән сонра алырыг:

$$8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{\cos x}.$$

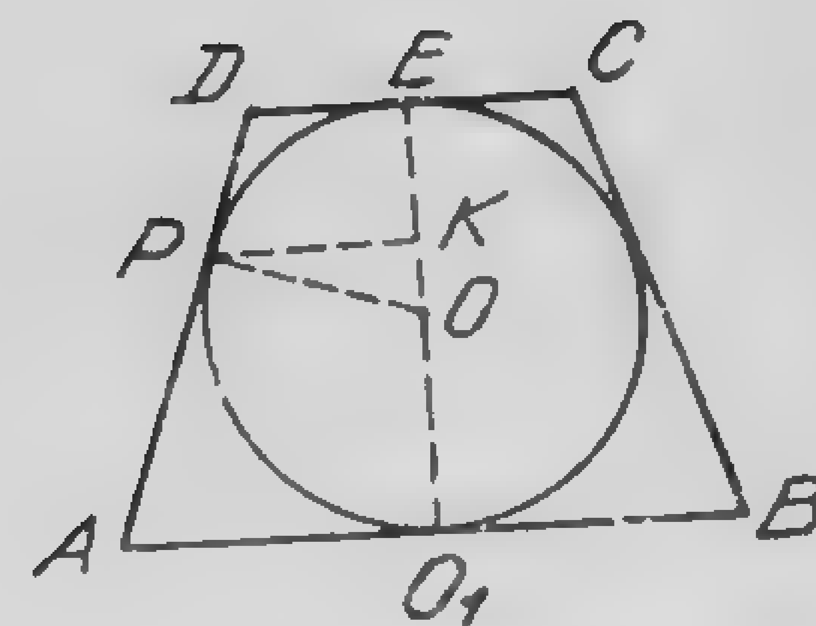
Тәнлији ашағыдакы кими һәлл едирик:

$$8\cdot\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{\cos x + 1}{\cos x},$$

сон тәнликдән $9\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$. Бу тәнлијин һәлли $\cos x = \frac{1}{3}$, $x = 70°32'$.



Шәкил 165



Шәкил 166

175. *Чаваб*: $C = 2\pi\sin\alpha$.

Көстәриш. 166-чы шәкилдән истифадә един.

176. Конус күрә дахилинә чәкилмиш олдуғундан онун отурачағынын чеврәсинин бүтүн нөгтәләри күрә сәтһи үзәриндә олачагдыр. Ајдындыр ки, конусун һүндүрлүјү күрә диаметри үзәринә дүшүр. Демәли, конусун ох кәсијинин (167-чи шәкил) харичинә чәкилмиш чеврә бөјүк даирә чеврәси олачагдыр.

ASB үчбучағында: $\angle ASB = 2\alpha$, $AB = 2R\sin 2\alpha$.

SAO_1 үчбучағында:

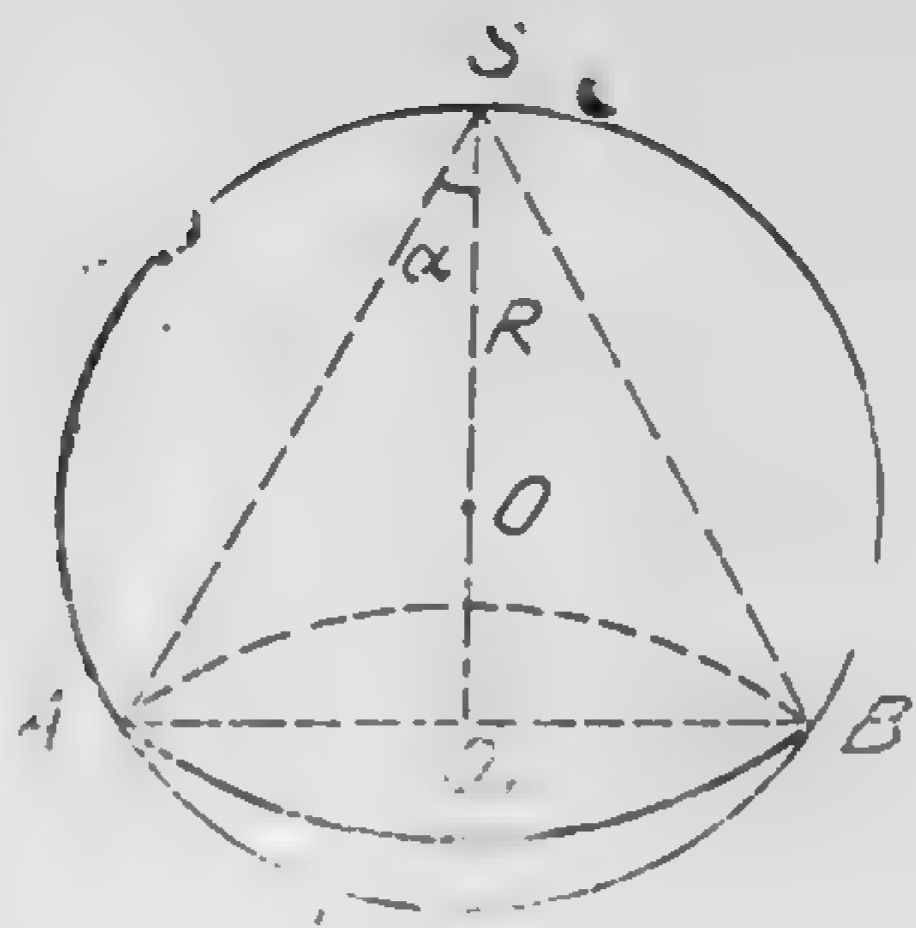
$$\angle ASO_1 = \alpha,\ AO_1 = \frac{1}{2}AB = R\sin 2\alpha.$$

$$SO_1 = AO_1 \operatorname{ctg}\alpha = R\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha.$$

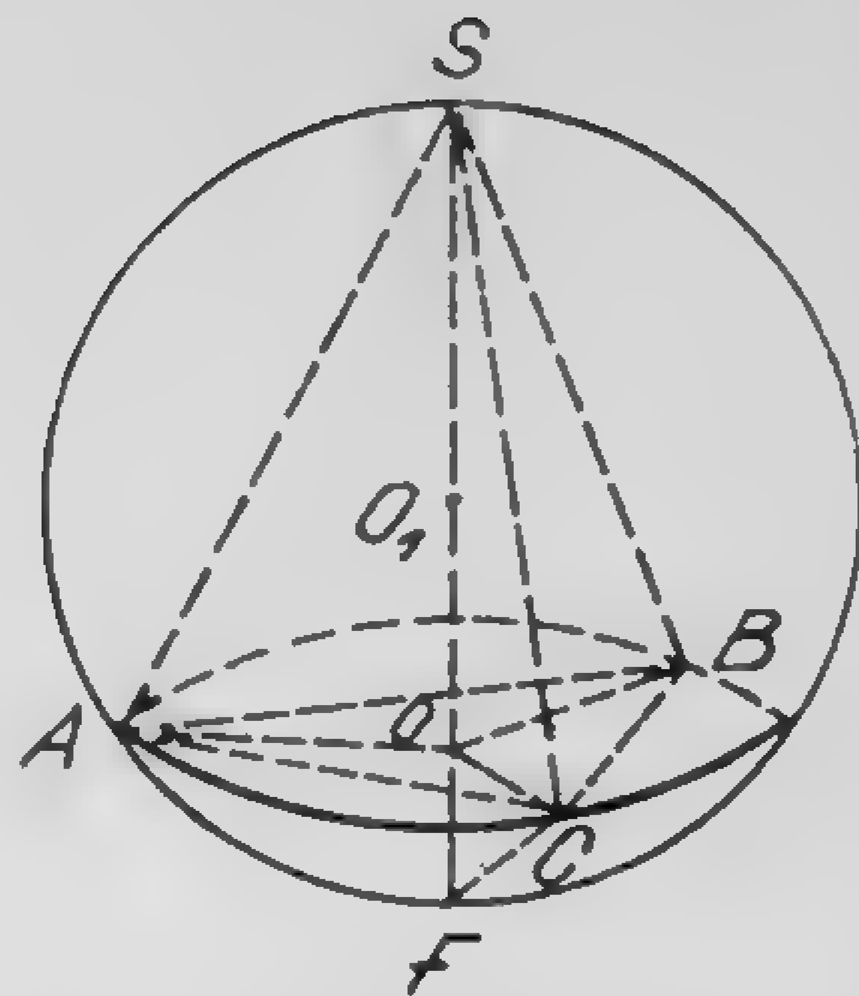
Конусун һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot AO_1^2\cdot SO_1 = \frac{1}{3}\pi(R\sin 2\alpha)^2\cdot R\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2\alpha.$$

177. Тутаг ки, SA, SC вә SB күрәнин вәтәрләридир (шәкил 168), шәртә көрә $\angle ASC = \angle CSB = \alpha$. Ајдындыр ки, $SABC$ фигуру дүзкүн пирамидадыр, ASC, ASB вә BSC үчбучаглары бир-биринә бәрабәрдир. Демәли, $AC = BC = AB$. Јә'ни ABC үчбучагы дүзкүн үчбучагдыр. SF диаметри илә SO һүндүрлүјү үст-үстә дүшүр. Чүнки ејни ABC мүстәвисинә, ејни O



Шәкил 167



Шәкил 168

нөгтә синдән чәкилән перпендикулјар парчалардыр. O_1, S вә C нөгтәләриндән кечән мүстәви күрә мәркәзиндән кечдијиндән бу мүстәви илә күрә сәтһинин кәсишмәсиндә бөјүк даирә чеврәси алыначагдыр. Дахилә чәкилмиш SCF бучағы диаметрә сөјкәндијиндән дүз бучагдыр.

SBC үчбучағында:

$$\angle BSC = \alpha,\ SB = SC = x,\ \angle SBC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{BC}{\sin\angle BSC} = \frac{SC}{\sin\angle SBC},\ \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{x}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ BC = 2x\sin\frac{\alpha}{2}.$$

BOC үчбучағындан:

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ,\ \angle OBC = 30^\circ,\ \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{OC}{\sin 30^\circ},$$

$$OC = \frac{BC\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = BC\operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2x\sin\frac{\alpha}{2}.$$

SOC дүзбучаглы үчбучағындан:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

SCF дүзбучаглы үчбучагда: $SC^2 = SO\cdot SF$,

$$x = \sqrt{x^2 - \left(\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot 2R,$$

$$x = \sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}\cdot 2R = \frac{\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot 2R}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{4R\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{3}}.$$

178. *Чаваб:* $V = \frac{2}{3}R^3\sin^3 2\varphi\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi.$

179. Фәрз едәк ки, $KS = x$, $SO = H$ конусларын һүндүрлүкләри, $EK = r$, $AO = R$ отурачагларынын радиуслары. EF вә AB дүз хәтләри ики паралел мүстәвиләрин үчүнчү мүстәви илә кәсишмә хәтти кими көтүрмәк олар, она көрә $EF \parallel AB$ олур. Бурадан $\triangle ESK \backsim \triangle ASO$. Конусун отурачағына паралел кәсик күрәјә тохунан олдуғу үчүн EF парчасы күрәнин ох кәсији чеврәсинә тохунан олачагдыр (шәкил 169). Харичә чәкилмиш дөрдбучаглынын гаршы тәрәфләринин хассәсинә көрә $EF + AB = AE + BF$ вә ја $2r + 2R = 2AE$, $AE = r + R$.

Конусларын һәчми:

$$V_{SEF} = \frac{1}{3}\pi r^2 x,\quad V_{ASB} = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \qquad (1)$$

Шәртә көрә $\frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)$

$$2r^2 x = R^2 H. \qquad (2)$$

$\triangle ESK \backsim \triangle ASO$ олдуғу үчүн $\frac{x}{r} = \frac{H}{R}$,

бурадан $x = \frac{rH}{R}$, бу бәрабәрлији (2)-дә нәзәрә алсаг,

$$2r^2\cdot\left(\frac{rH}{R}\right) = R^2 H,\ \text{бурадан}\ R = r\sqrt[3]{2}. \qquad (3)$$

AM парчасыны тә'јин едәк:

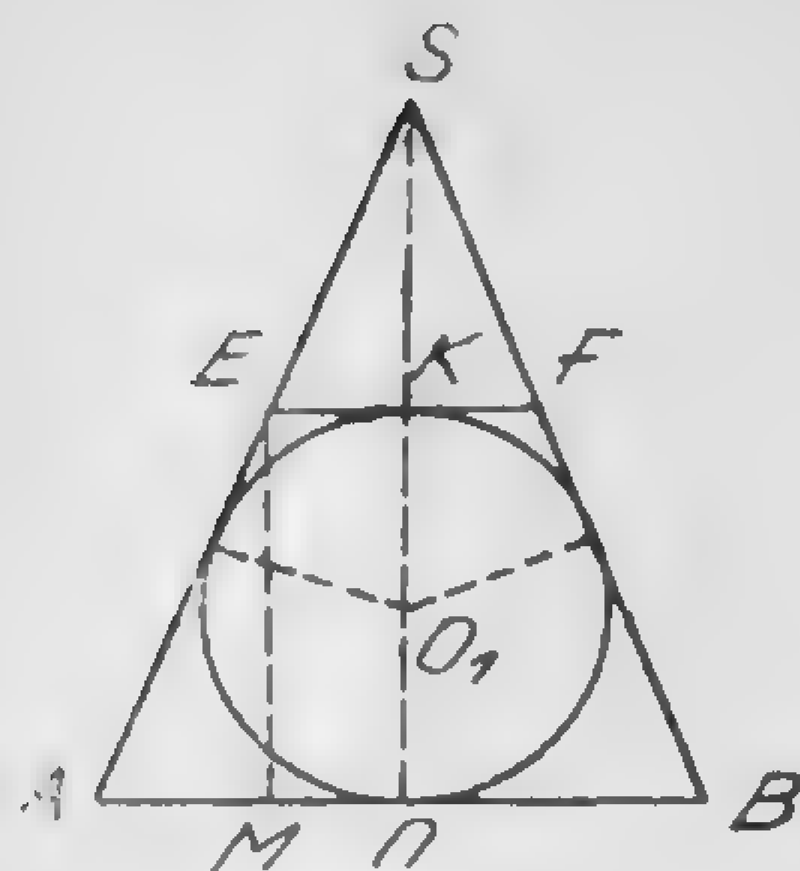
$$AM = AO - MO = AO - EK = R - r. \qquad (4)$$

(1) вә (4)-дә (3) бәрабәрлији нәзәрә алсаг,

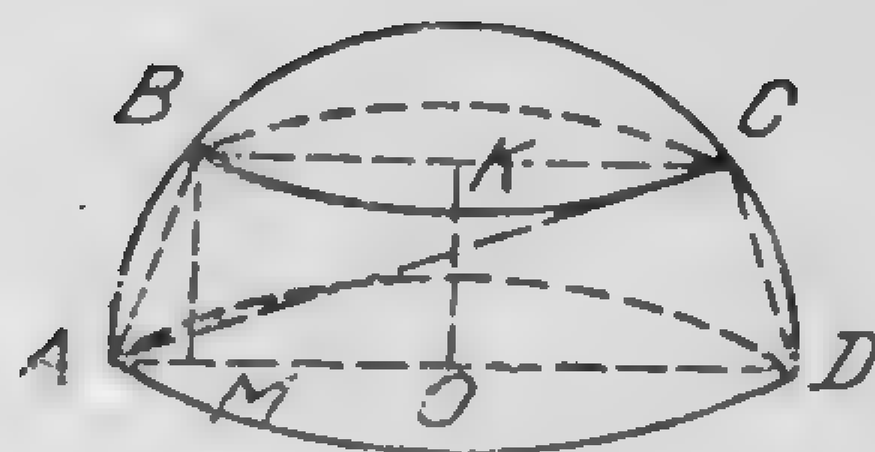
$$AE = r + r\sqrt[3]{2},\ AM = r\sqrt[3]{2} - r$$

AEM үчбучағында

$$\cos\angle EAM = \frac{AM}{AE} = \frac{r\sqrt[3]{2} - r}{r\sqrt[3]{2} + r} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1},$$



Шәкил 169



Шәкил 170

бурадан $\angle EAM = 83°24'$ олур. AO_1O үчбучағында:

$$\angle OAO_1 = 90° - (180° - \alpha) = -90° + \alpha,$$

$$AO = OO_1 \operatorname{tg}(180° - \alpha) = R \operatorname{tg} \alpha.$$

ASO үчбучағында:

$$\angle SAO = 2\angle OAO_1 = 2(-90° + \alpha) = -(180° - 2\alpha),$$

$$SO = AO \operatorname{tg}[-(180° - 2\alpha)] = -R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Конусун һәчми:

$$V = \frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi(R \operatorname{tg} \alpha)^2(-R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

180. *Чаваб.* $\varphi = \arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

181. *Чаваб.* $V = \ = -\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$.

182. O нөгтәси јарым күрәнин мәркәзи, K—кәсик конусун үст отурачағынын мәркәзи, $ABCD$ јарым күрә дахилинә чәкилмиш кәсик конусун ох кәсијидир. $AO = R$, $\angle BAD = \alpha$ (шәкил 170).

Фәрз едәк ки, конусун үст отурачағынын радиусу $BK = r$-дир. A нөгтәси илә C нөгтәсини бирләшдирәк. ACD бучағы күрә диаметринә сөјкәнән дахилә чәкилмиш бучаг олдуғундан дүз бучаг олачагдыр. $BM \perp AD$ чәкәк. $AB = CD$ олар. ACD үчбучағында

$$CD = AD \cos\alpha = 2R\cos\alpha,$$

$$AM = AO - MO = AO - BK = R - r. \qquad (1)$$

ABM үчбучағында

$$AM = AB\cos\alpha = CD\cos\alpha = 2R\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha.$$

Сон бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг, $2R\cos^2\alpha = R - r$, $r = R - 2R\cos^2\alpha$.

Кәсик конусун там сәтһи:

$$S_т = \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(r + R)L = \pi R^2 + \pi(R - 2R\cos^2\alpha)^2 +$$

$$+ \pi(R - 2R\cos^2\alpha + R)\cdot 2R\cos\alpha = \pi R^2 +$$

$$+ \pi R^2(1 - 2\cos^2\alpha)^2 + 4\pi R^2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) =$$

$$= \pi R^2(1 + \cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \sin\alpha).$$

183. $ABCD$ дүз даирәви кәсик конусун ох кәсији, O онун харичинә чәкилмиш күрәнин ох кәсијинин мәркәзидир, O_1 вә O_2 кәсик конусун отурачагларынын мәркәзләридир. $O_1A = R$, $BO_2 = r$, $\angle BAO_1 = \alpha$ (шәкил 171). $BN \perp AD$ чәкәк, онда $AN = AD - ND = 2R - (r + R) = R - r$. ANB дүзбучагдан:

$$\angle BAN = \alpha, \ AN = R - r, \ AB = \frac{R - r}{\cos\alpha}.$$

ABD үчбучагдан:

$$\angle BAD = \alpha, \ AD = 2R, \ AB = \frac{R - r}{\cos\alpha},$$

косинуслар теоремина көрә јаза биләрик.

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD, \ AB\cos\angle BAD,$$

$$BD^2 = (2R)^2 + \left(\frac{R - r}{\cos\alpha}\right)^2 - 2\cdot 2R\cdot\frac{R - r}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha =$$

$$= 4R^2 + \frac{(R - r)^2}{\cos^2\alpha} - 4R^2 + 4Rr = \frac{(R - r)^2 + 4Rr\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{R^2 - 2Rr + r^2 + 4Rr\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{R^2 + r^2 + 2Rr(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

$$BD = \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Дикәр тәрәфдән $BD = 2AO\sin\alpha$. BD-јә бәрабәр олан ифадәни (1)-дә јеринә јазсаг:

$$2AO\sin\alpha = \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\alpha}}{\cos\alpha} \text{ вә ја}$$

$$AO = \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}.$$

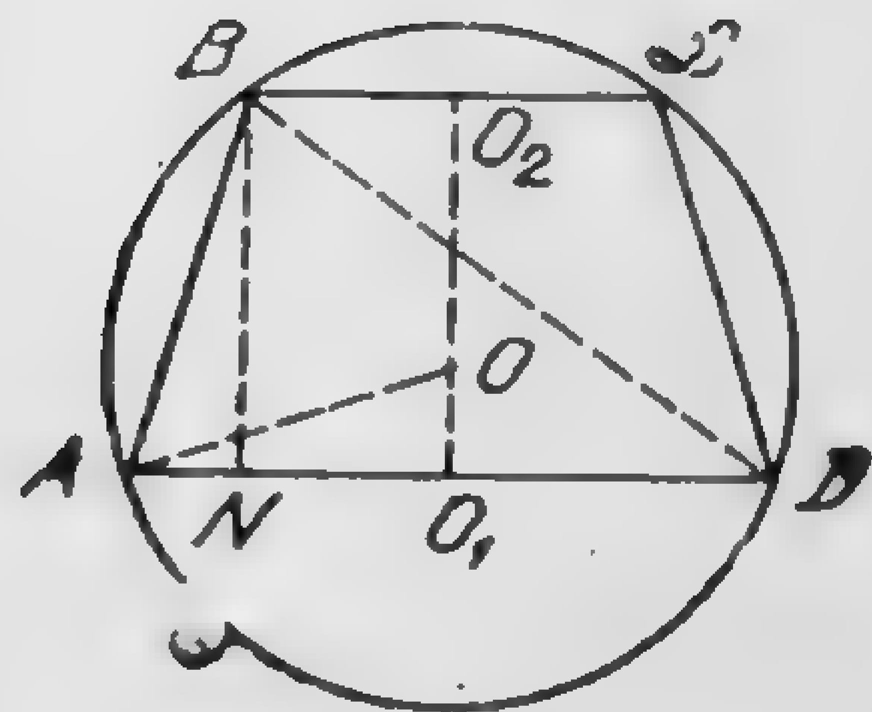
184. $SABC$ дүзкүн үчбучаглы пирамидасы мәркәзи O олан күрә дахилинә чәкилмишдир, $SO = R$, $\angle SEO_1 = \alpha$ (шәкил 172). Күрә дахилинә чәкилмиш пирамиданын тә'рифинә көрә пирамиданын тәпәси вә отурачағынын тәпәләри күрә сәтһи үзәриндә олачагдыр. Демәли, пирамиданын отурачағынын тәпәләри мәркәзи O_1 олан чеврә үзәриндәдир. Фәрз едәк ки, E нөгтәси BC-нин орта нөгтәсидир, AE бәрабәрјанлы үчбучағын медианы олдуғу үчүн $AE \perp BC$ олар. AE парчасы үчбучағын тәрәфинин ортасындан чәкилән перпендикулјар олдуғундан харичә чәкилмиш чеврәнин O_1 мәркәзиндән кечәчәкдир. Үч перпендикулјар теореминә көрә $ES \perp BC$.

$AB = x$ гәбул едәк. Харичә чәкилмиш чеврәнин радиусу $AO_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$, дахилә чәкилмиш чеврәнин радиусу исә $O_1E = \frac{x}{2\sqrt{3}}$.

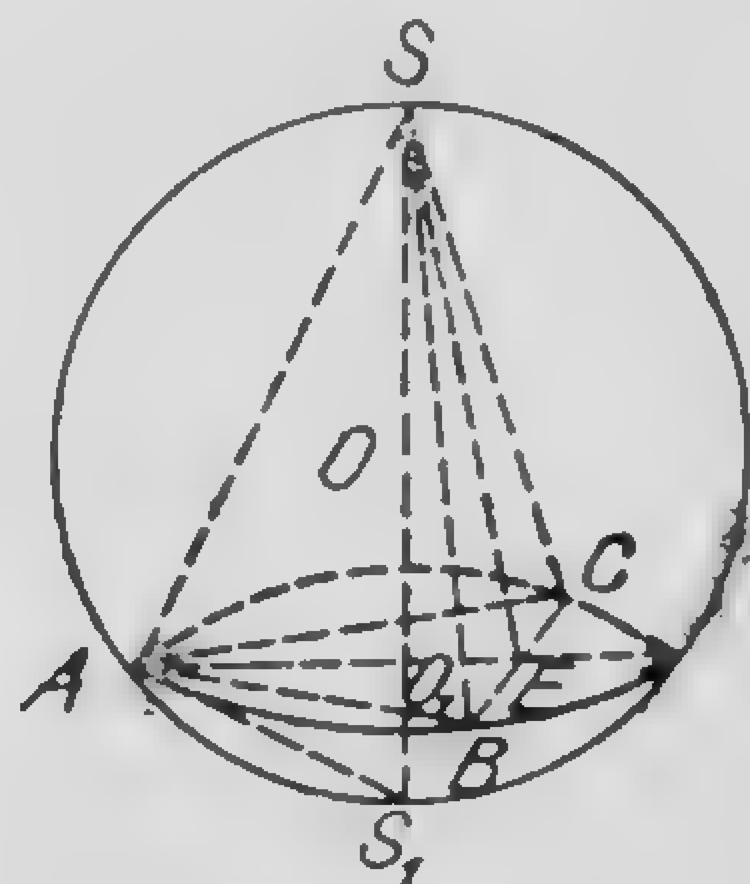
SEO_1 үчбучағында: $SO_1 = S_1E\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}$. SAO_1 үчбучағында $SA^2 = AO_1^2 + SO_1^2$ вә ја

$$SA^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{4}\right)\cdot x =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4 + \mathrm{tg}^2\alpha}{4}\cdot x^2. \qquad (1)$$



Шәкил 171



Шәкил 172

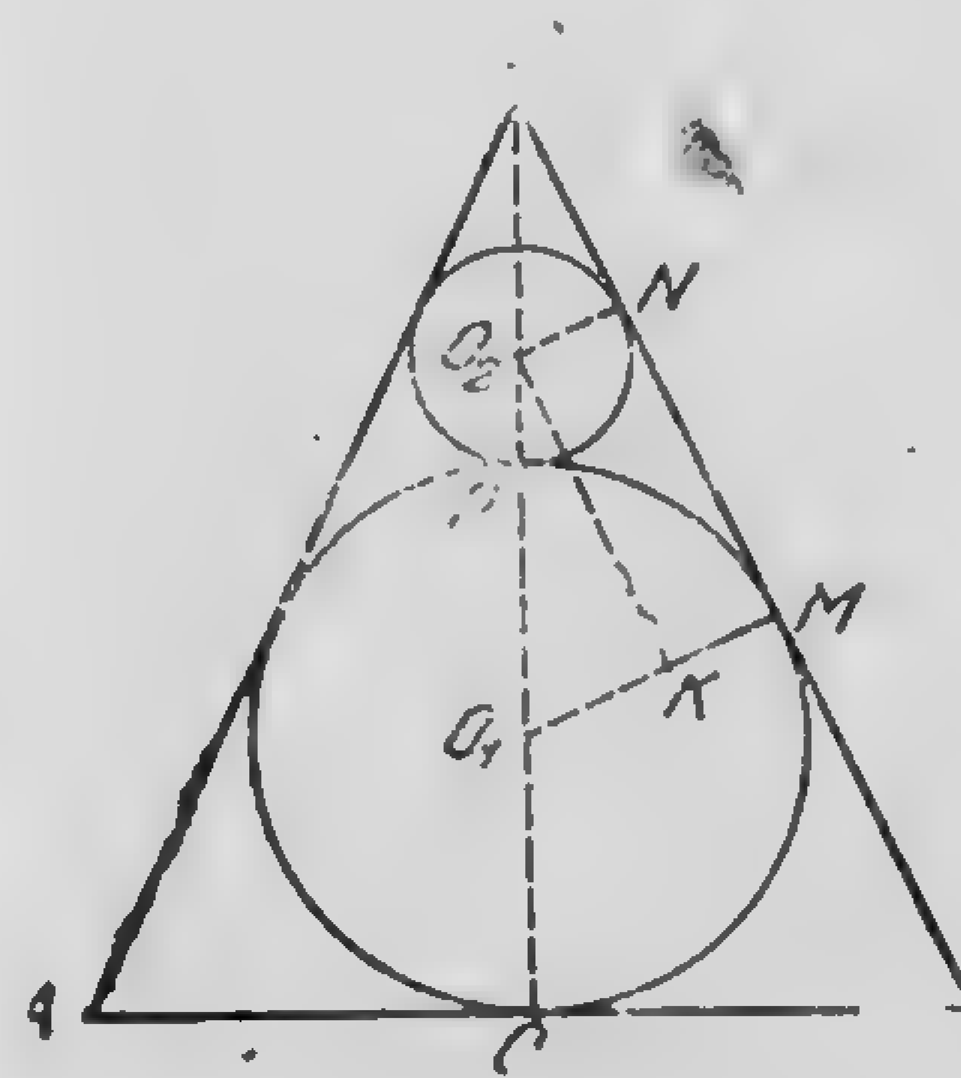
SAS_1 үчбучағында: $SA^2 = SS_1 \cdot SO_1$ вә ја

$$SA^2 = 2R\cdot\frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

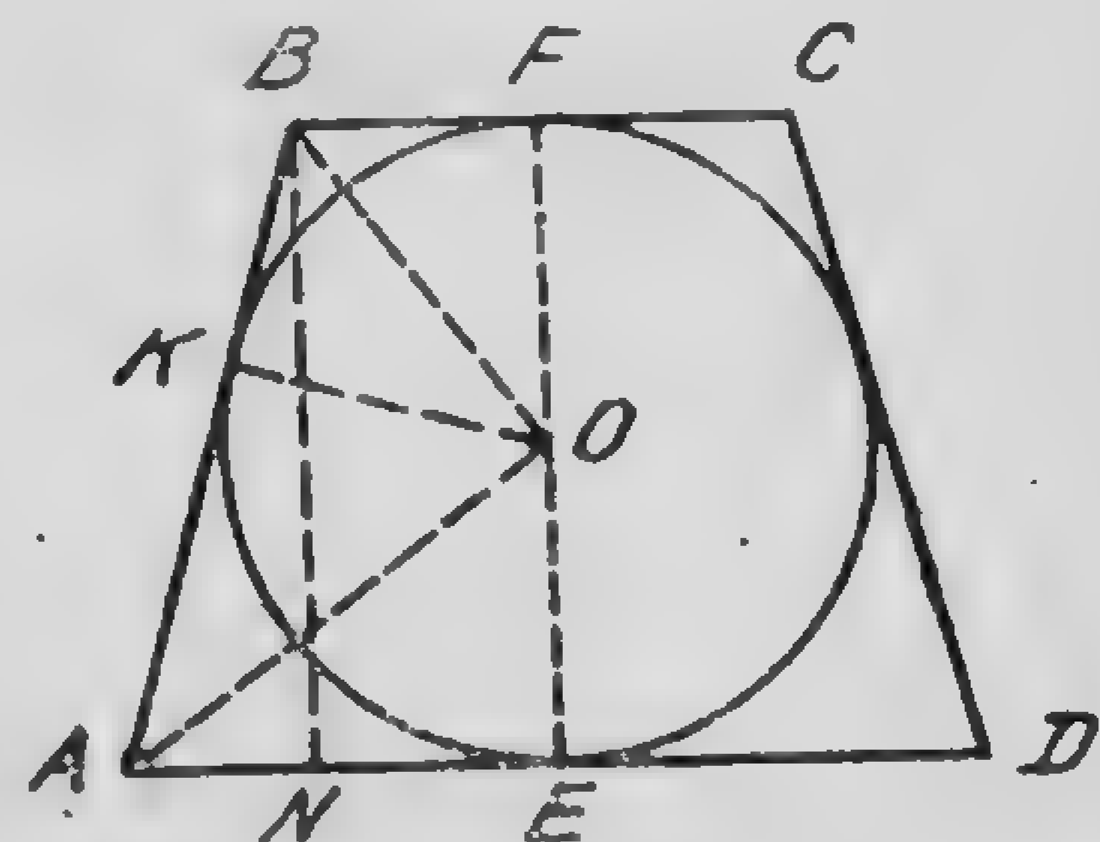
(1) вә (2) бәрабәрликләриндән $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 2R \times \frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{3}}$, бурадан $x = \frac{4R\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4 + \mathrm{tg}^2\alpha}$, x-ин гијмәтини (2)-дә нәзәрә алсаг: $SA^2 = \frac{4R^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{4 + \mathrm{tg}^2\alpha}$, бурадан $SA = \frac{2R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{4 + \mathrm{tg}^2\alpha}}$.

185. ABC конусун ох кәсији, O_1 вә O_2 исә онун дахилинә чәкилмиш күрәләрин ох кәсикләринин мәркәзидир (шәкил 173).

Тутаг ки, $O_1P = mx$, $PO_2 = nx$, $\angle ABC = y$, O_1 вә O_2 мәркәзләри ABC үчбучағын BO тәнбөләни үзәриндә олачагдыр. P тохунма нөгтәси BO тәнбөләни үзәриндә олар. Ики тохунан чеврәнин мәркәзләри арасындакы мәсафә $O_1P + PO_2 = mx + nx$ олачагдыр. BO парчасы ABC бәрабәрјанлы үчбучағын тәнбөләни олдуғундан $BO \perp AC$, $AO = OC$ олмалыдыр. O_1 вә O_2 мәркәзләри ујғун олараг M вә N тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк, онда $O_1M \perp BC$, $O_2N \perp BC$. Демәли, $O_1M \parallel O_2N$. $O_2K \parallel BC$ чәкәк, онда $\angle O_1O_2K = \angle OBC$ олур. Дикәр тәрәфдән $KMNO_2$ дөрдбучаглысы дүзбучаглыдыр. Она көрә дә $O_1K = O_1M - KM = O_1M - O_2N = mx - nx$.



Шәкил 173



Шәкил 174

O_1O_2K дүзбучаглы үчбучағында:

$$\sin\frac{y}{2}=\frac{O_1K}{O_1O_2}=\frac{mx-nx}{mx+nx}=\frac{m-n}{m+n},$$

бурадан $y=2\arcsin\frac{m-n}{m+n}$.

186. $BN\perp AD$ чәкәк, AO вә BO парчалары тәнбөләндир (шәкил 174). $\angle BAE=x$, $AE=R_1$, $BF=r$, $OE=R$ гәбул едәк, нәтиҹәдә $BN=2R$, $AB=AK+BK=AE+BF=R_1+r$; $AB^2=(R_1+r)^2$, бурадан $R_1^2+R_1r+r^2=AB^2-R_1r$.

Кәсик конусун һәҹми:

$$V_{конус}=\frac{1}{3}\pi\cdot 2R\left(R_1^2+R_1r+r^2\right)=\frac{2}{3}\pi R\left(AB^2-R_1r\right).$$

Күрәнин һәҹми: $V_к=\frac{4}{3}\pi R^3$. Шәртә көрә

$$\frac{2}{3}\pi R\left(AB^2-R_1r\right)=3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ вә ја}$$

$$\frac{1}{3}\left(AB^2-R_1r\right)=2R^2. \qquad (1)$$

ABN вә AOE үчбучагларындан $AB=\frac{BN}{\sin x}=\frac{2R}{\sin x}$,

$AE=OE\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=R\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$.

OBF үчбучағында:

$$BF=OF\,\mathrm{ctg}\angle FBO=R\,\mathrm{ctg}\left(90°-\frac{x}{2}\right)=R\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$$

AB, AK вә BF-нин гиҗмәтләрини (1)-дә јеринә јазаг:

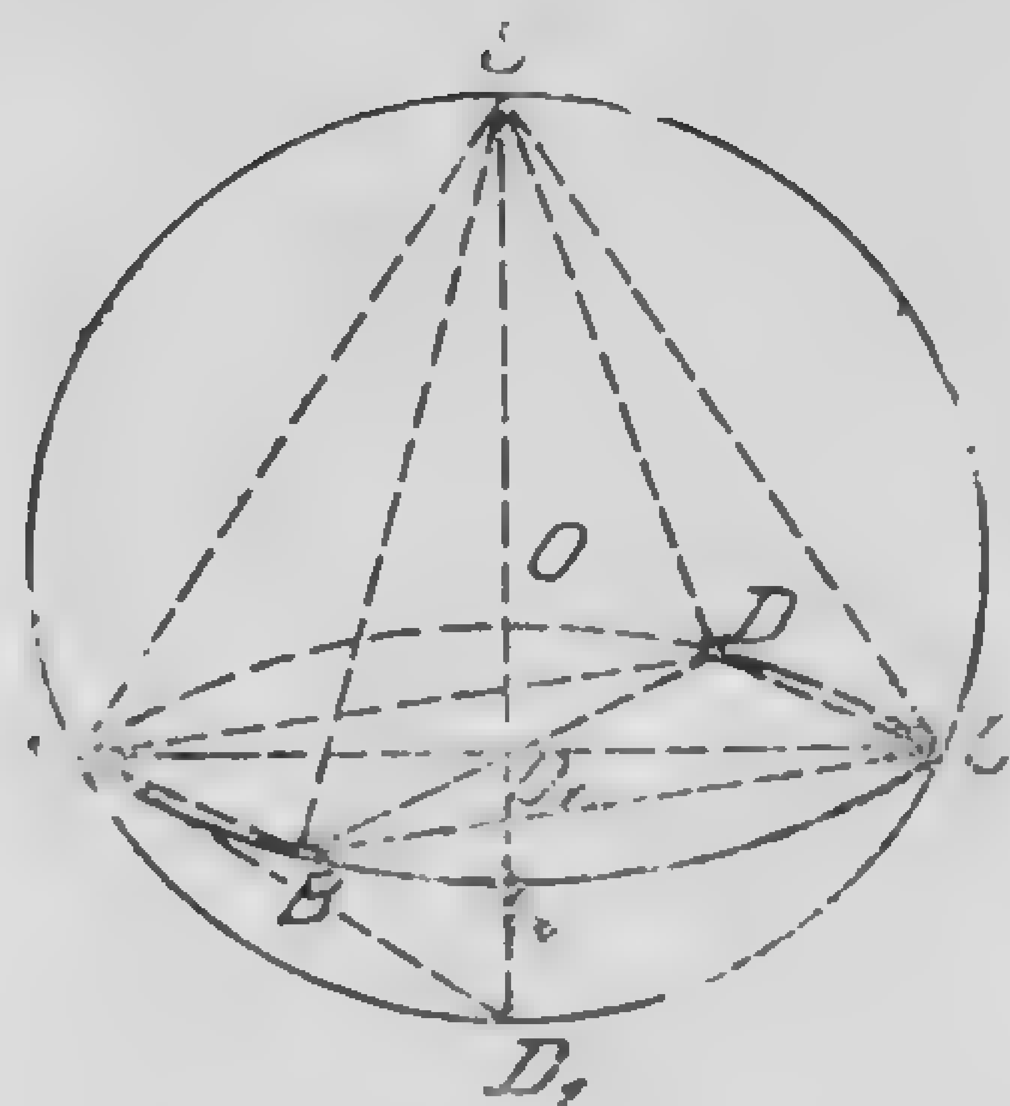
$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4R^2}{\sin^2 x}-R\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\cdot R\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)=2R^2,$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4R^2}{\sin^2 x}-R^2\right)=2R^2, \text{ бурадан } \frac{4}{\sin^2 x}-1=6,$$

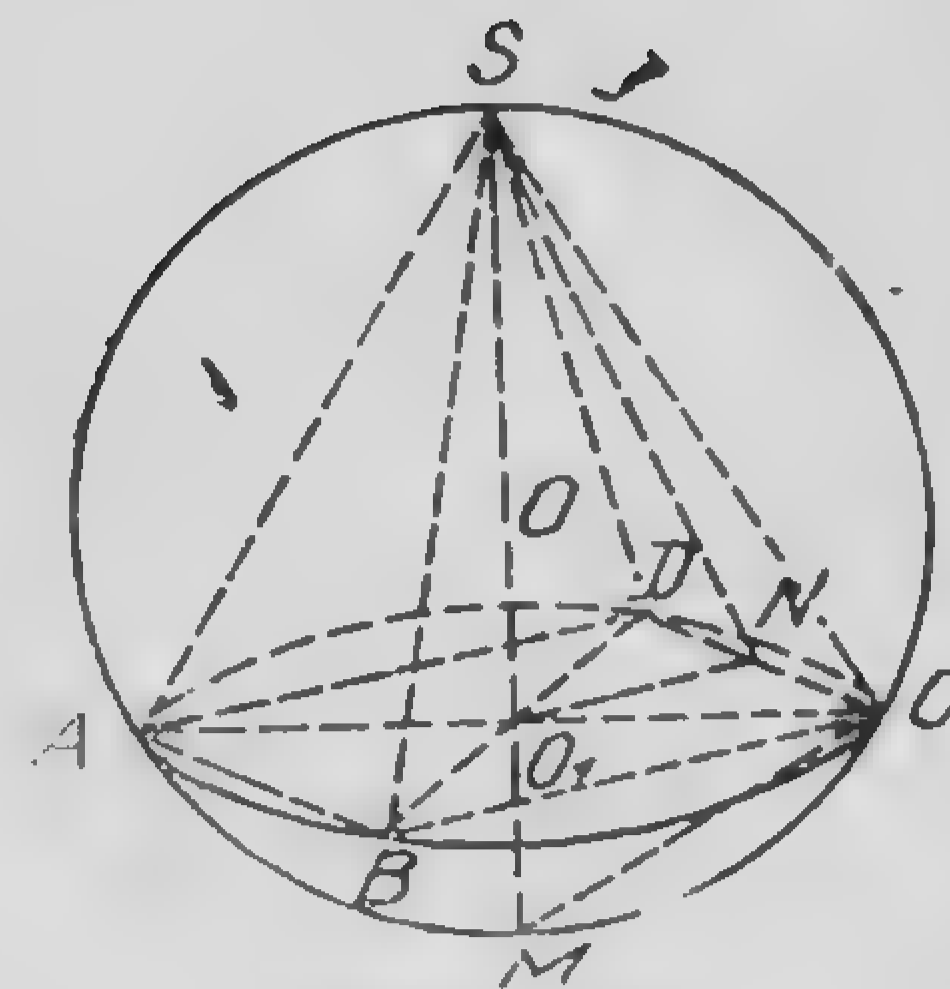
$$x=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

187. ASC үчбучағында: $\angle ASC=180°-2\alpha$, күрәнин радиусуну R гәбул едәк, онда $AC=2R\sin(180°-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$ (шәкил 175).

Бурадан $ABCD$ квадратын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусу $AO_1=R\sin 2\alpha$; квадратын тәрәфи исә $BC=AO_1\sqrt{2}=\sqrt{2}R\sin 2\alpha$ олур. ASO_1 үчбучағында: $SO_1=AO_1\,\mathrm{tg}\,\alpha=R\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



Шәкил 175



Шәкил 176

Пирамиданын отурачағынын саһәси:

$$S_{от}=BC^2=(\sqrt{2}R\sin 2\alpha)^2=2R^2\sin^2 2\alpha.$$

Пирамиданын һәҹми:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2R^2\sin^2 2\alpha\cdot R\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (1)$$

Шәртә көрә күрәнин сәтһи: $4\pi R^2=Q$, бурадан $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. Сон бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$V=\frac{Q}{12\pi}\cdot\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\sin^3 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

188. $O_1N\perp CD$. Үч перпендикулјар теореминә көрә $SN\perp CD$ олачагдыр (шәкил 176). SN парчасы SCD бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдугундан $CN=ND$, $\angle CSN=\angle NSD$.

SNC үчбучағында: $SN=CN\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

SO_1N үчбучағында:

$$SO_1=\sqrt{SN^2-O_1N^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

SNC үчбучағында:

$$SC^2 = SN^2 + CN^2 = \left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

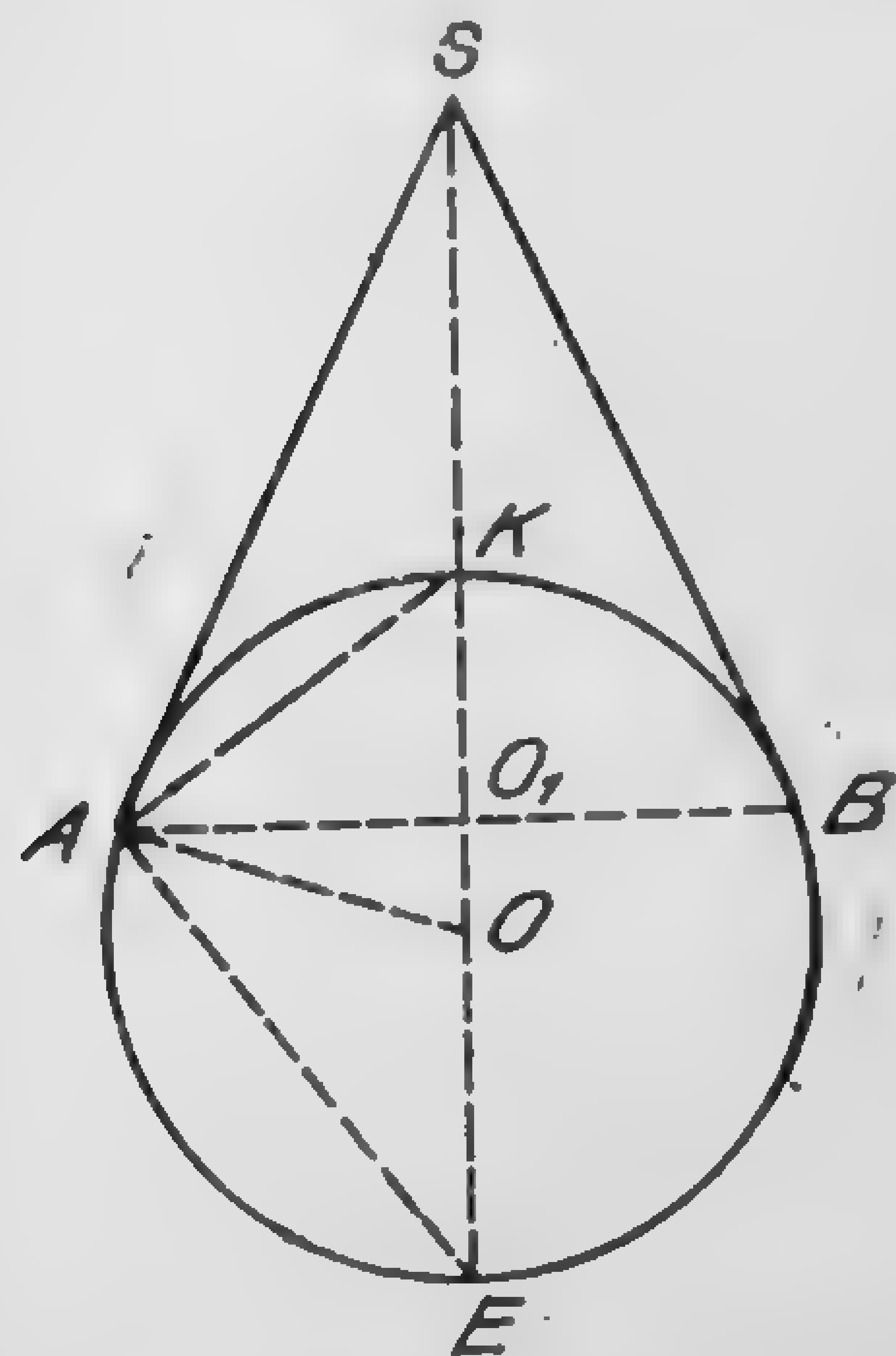
$$= \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

SCM-дән: $SC^2 = SM \cdot SC_1$ вә ја $SC^2 = 2R \cdot SO_1$.

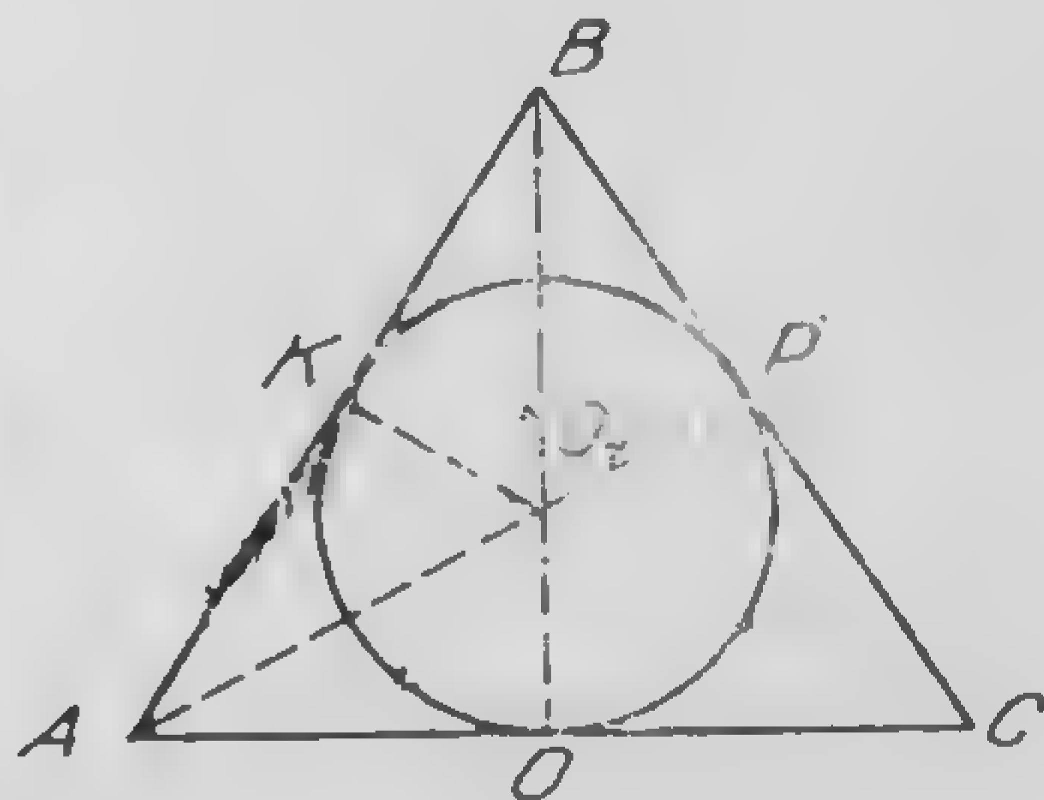
Бурадан $R = \frac{SC^2}{2SO_1}$. Сон бәрабәрликдә SC вә SO_1 парчаларын гијмәтләрини нәзәрә алсаг,

$$R = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

189. Фәрз едәк ки, ASB конусун ох кәсији, мәркәзи O олан чеврә исә күрәнин ох кәсијидир, бөјүк даирә радиусу $AO = R$ олсун. O_1 нөгтәси конусун отурачағынын мәркәзидир, ејни заманда AB вәтәринин орта нөгтәсидир (шәкил 177). SAO_1 конусун доғураны илә отурачаг мүстәвиси арасындакы бучагдыр, $\angle SAO_1 = x$, $EK \perp AB$, $\smile AK = \smile BK$. Күрә сәтһинин кичик һиссәсинин сәтһи: $2\pi R \cdot O_1K$, бөјүк һиссәсинин сәтһи исә



Шәкил 177



Шәкил 178

$2\pi R \cdot O_1E$ олар. Лакин шәртә көрә $\frac{2\pi R \cdot O_1E}{2\pi RO_1K} = n$, бурадан $O_1E = O_1K \cdot n$. Дахилә чәкилмиш EAK бучағы диаметрә сөјкәндијиндән дүз бучагдыр. Дүз бучаг тәпәсиндән һипотенуза чәкилән перпендикулјарын хассәсинә көрә

$$AO_1 = \sqrt{EO_1 \cdot O_1K} = \sqrt{O_1K \cdot n \cdot O_1K} = O_1K\sqrt{n} \qquad (1)$$

$$\angle SAK = \frac{1}{2} \smile AK, \quad \angle KAB = \frac{1}{2} \smile BK.$$

Лакин $\smile AK = \smile BK$ олдуғу үчүн $\angle SAK = \angle KAB$ олур. Демәли, $\angle KAB = \frac{1}{2}\angle SAB = \frac{1}{2}x$. AKO_1 дүзбучаглы үчбучағында: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{O_1K}{AO_1}$. Бу бәрабәрликдә (1) бәрабәрлији нәзәрә алсаг:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{O_1K}{AO_1} = \frac{O_1K}{O_1K\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

бурадан $x = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

190. ABC конусун ох кәсији, O_1 исә онун дахилинә чәкилмиш күрәнин ох кәсијинин мәркәзидир (шәкил 178). $OO_1 = R$, $AB = L$, $AO = R_1$ гәбул едәк. O_1 мәркәзини K тохунма нөгтәси илә бирләшдирәк, онда $O_1K \perp AB$ олар. (Тохунма нөгтәсинә чәкилән радиусун хассәсинә көрә.) $AK = AO$. AO_1 парчасы BAO бучағын тәнбөләни олачагдыр. Конусун там сәтһи: $S_т = \pi R_1 L + \pi R_1^2$, күрәнин сәтһи: $S = 4\pi R^2$. Шәртә көрә

$$\pi R_1 L + \pi R_1^2 = 2(4\pi R^2), \quad R_1L + R_1^2 = 8R^2.$$

Бурадан

$$\frac{R_1L}{R^2} + \frac{R_1^2}{R^2} = 8 \text{ вә ја } \frac{R_1}{R}\cdot\frac{L}{R} + \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = 8.$$

Сон бәрабәрлији ашағыдакы кими јаза биләрик:

$$\frac{R_1}{R}\cdot\left(\frac{BK}{R} + \frac{R_1}{R}\right) + \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = 8 \text{ вә ја}$$

$$\frac{R_1}{R}\cdot\frac{BK}{R} + \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = 8 \qquad (1)$$

AOO_1 үчбучағында:

$$\frac{AO}{OO_1} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \text{ вә ја } \frac{R_1}{R} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \qquad (2)$$

Шәкил 179

O_1BK үчбучағында:

$$\frac{BK}{KO_1}=\operatorname{ctg}\angle KBO_1=\operatorname{ctg}(90^\circ-x)=\operatorname{tg}x,\quad \frac{BK}{R}=\operatorname{tg}x \quad (3)$$

(2) вә (3) бәрабәрликләри (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=8,\quad \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=8,$$

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=8,$$

сон тәнликдән алырыг:

$$4\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1=0,$$

бурадан

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

191. Күрәнин O мәркәзини (шәкил 179) P, L вә O_1 тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк, онда OO_1, OL вә OP радиуслары уйғун олараг ABC, ASC вә ASB мүстәвиләринә перпендикулјар олачагдыр. Демәли, OL, OO_1 дүз хәтләриндән кечән $OLNO_1$ мүстәвиси AC тилинә перпендикулјар олачагдыр, лакин LNO_1 хәтти бучағы дүз икиүзлү бучағын хәтти бучағы олдуғу үчүн дүз бучагдыр

$OLNO_1$ дөрдбучаглысында $\angle OLN=\angle LNO_1=\angle OO_1N=90^\circ$ олдуғундан дүзбучаглыдыр, бурада $OL=OO_1$ олдуғундан дүзбучаглы квадратдыр. Күрәнин O мәркәзи SDA бучағынын тәнбөләни үзәриндәдир. Фәрз едәк ки, $OO_1=r$. $OO_1=D$ вә DO_1K дүзбучаглы үчбучагларында:

Шәкил 180

$$O_1D=OO_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

$\triangle AO_1N$-дән: $AO_1=\dfrac{O_1N}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$

Лакин $AD=AO_1+O_1D=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}+r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

ACD үчбучағында: $AD=AC\cos\dfrac{\alpha}{2}=a\cos\dfrac{\alpha}{2},$

бурадан $\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}+r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=a\cos\dfrac{\alpha}{2}$ вә ја

$$r\cdot\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=a\cos\frac{\alpha}{2},\quad r=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=a\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

192. *Чаваб.* $x=\arcsin\dfrac{6}{\pi m}.$

Көстәриш. 180-чы шәкилдән истифадә един.

193. Бу мәсәләни 180-чы шәкилдән истифадә едәрәк, ашағыдакы кими һәлл едирик. Күрәнин радиусуну R илә ишарә едәк. ABP үчбучағында:

$\angle BAP=\alpha,\quad BP=2R,\quad AB=\frac{BP}{\sin\alpha}=\frac{2R}{\sin\alpha}.$

Призманын отурачағынын саһәси:

$$S=AB\cdot DP_1=\frac{2R}{\sin\alpha}\cdot 2R=\frac{4R^2}{\sin\alpha}.$$

Призманын һәчми:

$$V_1=AB\cdot DP_1\cdot EF=\frac{4R^2}{\sin\alpha}\cdot 2R=\frac{8R^3}{\sin\alpha}.$$

Шәртә көрә күрәнин һәчми: $\frac{4}{3}\pi R^3=V,\ R^3=\frac{3V}{4\pi}.$

Призманын һәчми: $V_1=\frac{8}{\sin\alpha},\ \frac{3V}{4\pi}=\frac{6V}{\pi\sin\alpha}.$

194. Күрәнин радиусуну R, конусун отурачағынын радиусуну исә r илә ишарә едәк (шәкил 181). Онда күрәнин һәчми $\frac{4}{3}\pi R^3$, конусун һәчми исә $\frac{1}{3}\pi r^2H$. Лакин шәртә көрә

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}\pi r^2H,\quad R^3=r^2H. \qquad (1)$$

Дахилә чәкилмиш SAK бучағы диаметрә сөјкәндијиндән дүзбучагдыр. Дүзбучаг тәпәсиндән һипотенуза чәкилән перпендикулјарын хассәсинә көрә $AO^2=SO\cdot OK$ вә ја

$$r^2=H(2R-H). \qquad (2)$$

(1) вә (2) бәрабәрликләрдән

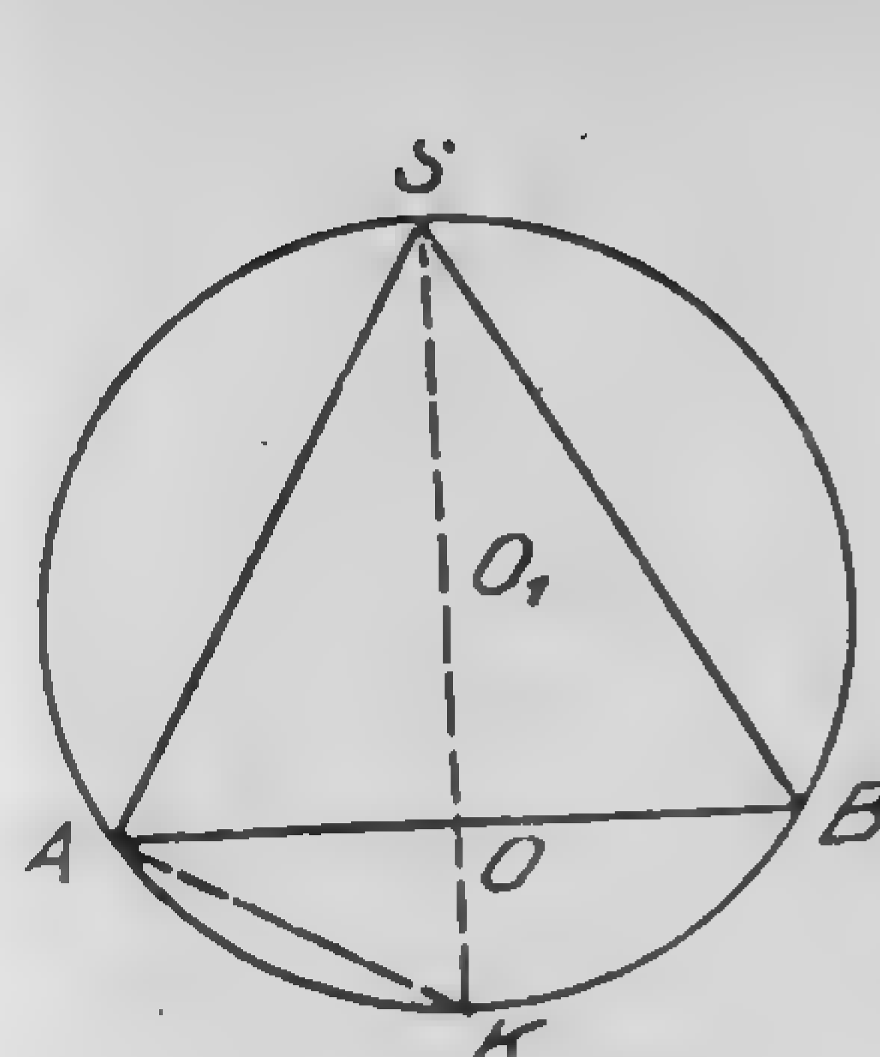
$$\frac{R^3}{H}=(2R-H)\cdot H,\quad R^3=H^2(2R-H),$$

$$R^3-2RH^2+H^3=0,\ (R^3-RH^2)-(RH^2-H^3)=0,$$

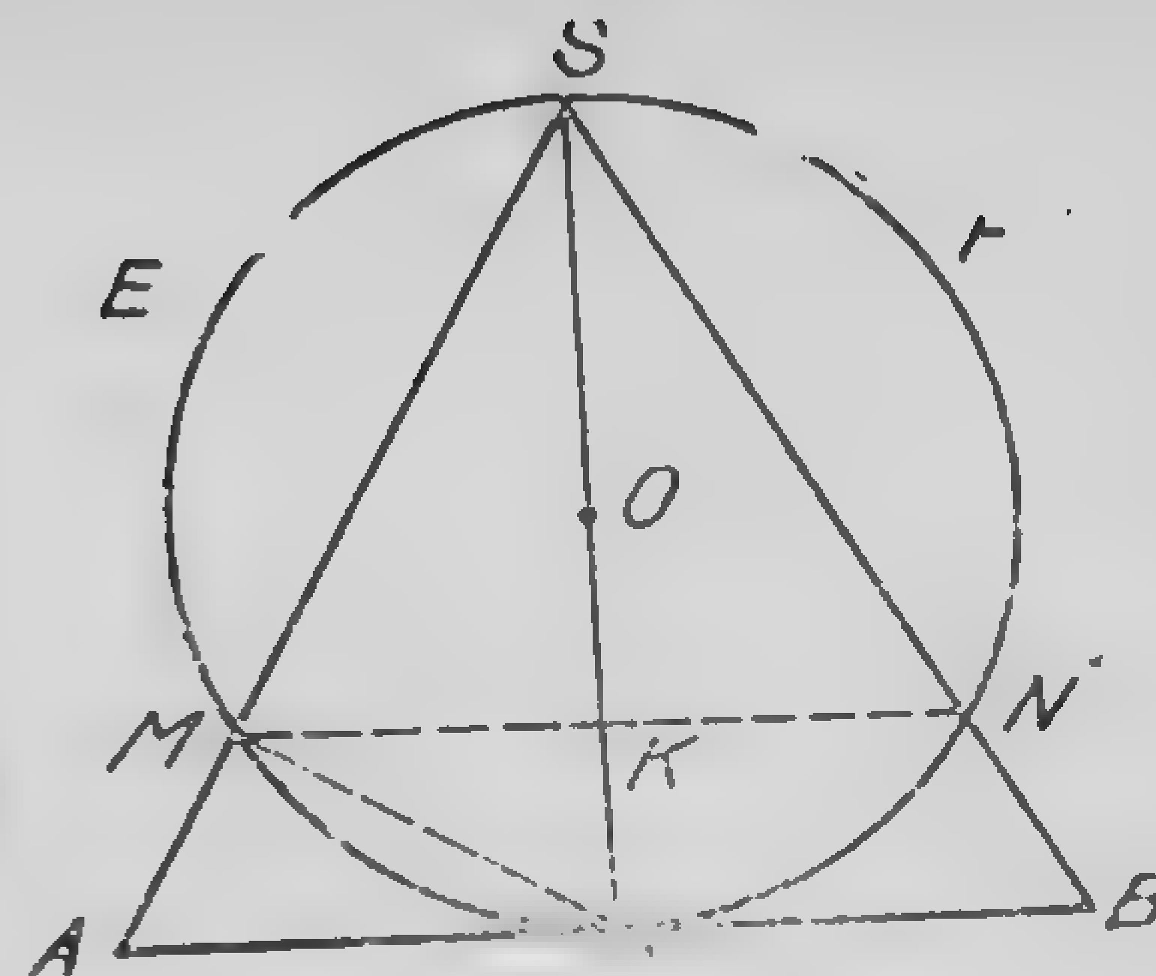
$$R(R^2-H^2)-H^2(R-H)=0,\ (R-H)(R^2+RH-H^2)=0,$$

бурадан $R-H,\ R^2+RH-H^2=0$. Бу тәнликләрдән $R=H,\ R=\frac{H(\sqrt{5}-1)}{2}$ $\left(R=-\frac{H(\sqrt{5}+1)}{2}\right.$ — мәнфи һәлли мүмкүн дејилдир). Беләликлә, мәсәләнин ики һәлли вардыр: $V=\frac{4}{3}\pi H^3$;

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi H^3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi H^3(\sqrt{5}-2).$$



Шәкил 181



Шәкил 182

195. Тутаг ки, $SD=H$ конусун һүндүрлүјү, $\angle ASD=\alpha$ һүндүрлүк илә доғуран арасындакы бучагдыр (шәкил 182). Дүз бучаг тәпәсиндән һипотенуза чәкилән перпендикулјарын хассәсинә, көрә

$$MK^2=SK\cdot KD=KS(H-SK).$$

Ахтарылан V һәчми $SEMNF$ күрә сегментин һәчми илә SMN конусун һәчми фәргинә бәрабәрдир. Күрәнин радиусу: $SO=\frac{1}{2}SD=\frac{H}{2}$.

Ахтарылан һәчм:

$$V=\pi\cdot SK^2\left(\frac{H}{2}-\frac{1}{3}SK\right)-\frac{1}{3}\pi MK^2\cdot SK,$$

бурадан $V=\frac{\pi H\cdot SK^2}{6}$.

$\triangle SMD$-дән: $SM=SD\cos\alpha=H\cos\alpha.$

$\triangle SMK$-дан: $SK=SM\cos\alpha=H\cos\alpha\cdot\cos\alpha=H\cos^2\alpha.$

$$V=\frac{\pi H\cdot SK^2}{6}=\frac{\pi H(H\cos^2\alpha)^2}{6}=\frac{\pi H^3\cos^4\alpha}{6}.$$

196. *Чаваб*: $\varphi=\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{n},\quad \varphi=62°22'$.

197. *Чаваб*: $65°13'$.

198. $SABCD$ пирамида, $ABCD$ ромбдур, $\angle ABF=\alpha$, $\angle LME=\varphi$. O, дахилә чәкилмиш күрәнин мәркәзидир (шәкил 183).

Беләликлә $LM \perp AD, EM \perp AD$, $KN \perp BC$, $EN \perp BC$ олур. Демәли, LME вә KNE бучаглары отурачаг тилләриндән икиүзлү бучағын хәтти бучагларыдыр, MN парчасы ромбун һүндүрлүјүдүр. Инди дә $EM = EN$ олдуғуну исбат едәк. Пирамиданын отурачаг тилиндәки бүтүн икиүзлү бучаглар бәрабәр олдуғундан $\angle KNE = \angle LME$ олар. O нөгтәсини M вә N нөгтәләри илә бирләшдирәк. ONE вә OME дүзбучаглы үчбучагларында OE катети ортаг, $\angle ONE = \angle OME$ олдуғундан бу үчбучаглар бәрабәрдир. Демәли, $EN = EM$. $AF \perp BC$ чәкәк, онда $AF = MN = 2EM$.

ABF дүзбучаглы үчбучағында:

$$\angle ABF = \alpha, \quad AB = a, \quad AF = a\sin\alpha.$$

MOE дүзбучаглы үчбучағында:

$$\angle OME = \frac{\varphi}{2}, \; EM = \frac{1}{2}\, MN = \frac{a\sin\alpha}{2},$$

$$OE = EM \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sin\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

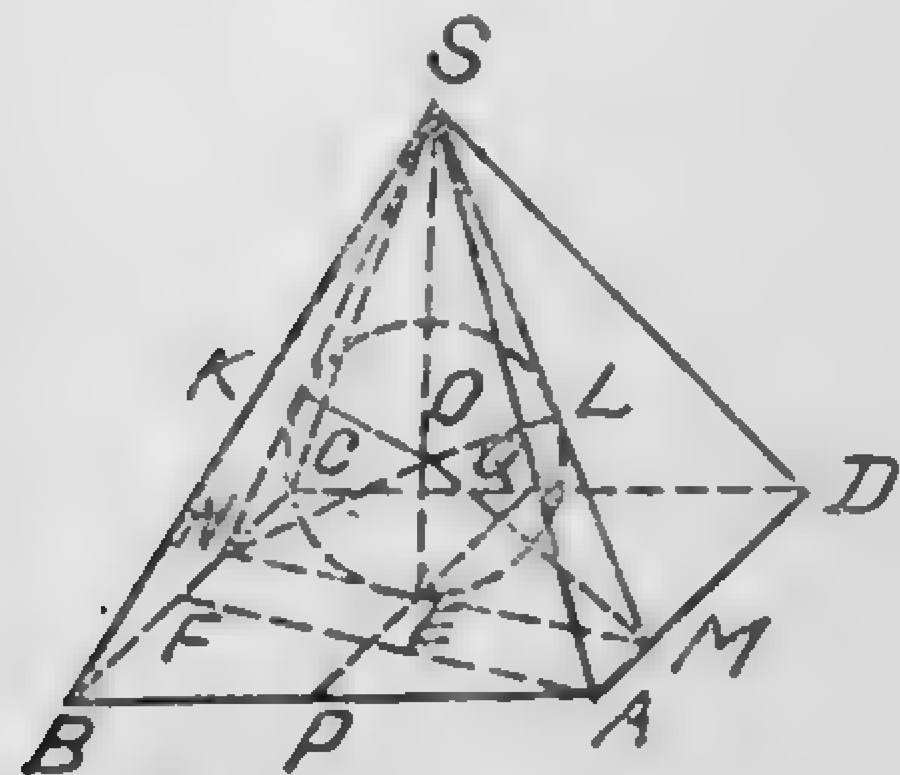
Күрәнин һәчми:

$$V = \frac{4}{3}\pi OE^2 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}{L}.$$

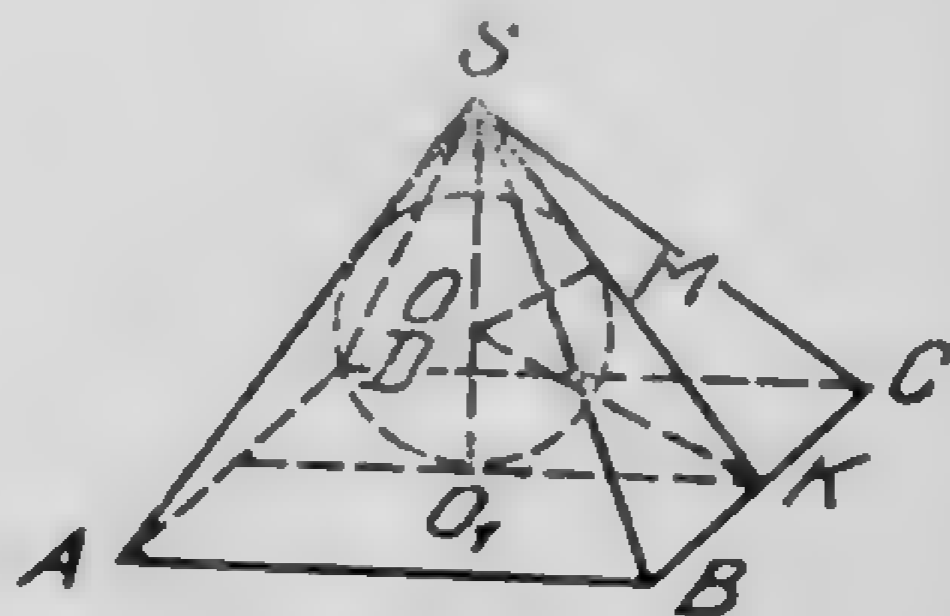
199. *Чаваб*: $V = \dfrac{4R^3}{3\sin\alpha}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi.$

Көстәриш. Мәсәләни 183-чү шәкилдән истифадә едәрәк һәлл един.

200. 192, 201 №-ли мәсәләләрә әсасән чеврәнин мәркәзи $ABCD$ квадратынын мәркәзи олачагдыр (шәкил 184).



Шәкил 183



Шәкил 184

Демәли, OO_1M мүстәвиси BC-јә перпендикулјардыр. Она көрә дә $\angle O_1K \perp BC$, $MK \perp BC$ олур. O_1K парчасы SK-нын пројексијасыдыр вә үч перпендикулјар теореминә көрә $SK \perp BC$ олур. SK вә MK ејни K нөгтәсиндән ејни BC хәттинә чәкилән перпендикулјар хәтләр олдуғундан үст-үстә дүшәчәкдир. SK парчасы SBC бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдуғундан $BK = KC$, $\angle BSK = \angle KSC$ олур. Бир нөгтәдән чеврәјә чәкилән тохунанларын хассәсинә көрә $MK = O_1K$.

$\triangle SOM \backsim \triangle SO_1K$ олдуғу үчүн

$$OM = SO\cdot\frac{O_1K}{SK}. \qquad (1$$

SBK үчбучағында: $SK = BK\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

SO_1K үчбучағында:

$$SO_1 = \sqrt{SK^2 - O_1K^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Бурадан $SO = SO_1 - OO_1 = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - R =$

$$= \frac{a\sqrt{\cos\alpha} - 2R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

(бурада R күрәнин радиусудур). Алдығымыз гијмәтләри (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$R = \frac{a\sqrt{\cos\alpha} - 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}, \quad R = \frac{a\sqrt{\cos\alpha} - 2R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Бурадан $R = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

Күрәнин сәтһи:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left[\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]^2 =$$

$$= 4\pi\cdot\frac{a^2\cos\alpha}{8\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} = \pi a^2 \operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

201. Фәрз едәк ки, O дүзкүн n-бучаглы пирамиданын дахилинә чәкилмиш күрәнин мәркәзи, $AB=a$, $\angle ASB=\alpha$ (шәкил 185). Шәклә аид изаһат бундан әввәлки мәсәләдә олдуғу кимидир.

BO_1P үчбучағында:

$$\angle BO_1P=\frac{1}{2}\angle AO_1B=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n},$$

$$BP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a,\ O_1P=BP\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

$\triangle SBP$-дән: $SP=BP\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

$\triangle SO_1P$-дән:

$$SO_1=\sqrt{SP^2-RO_1^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)^2}.$$

$$SO=SO_1-OO_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)^2}-OO_1,$$

үчбучағын дахили бучағы тәнбөләнин хассәсинә көрә

$$OO_1:SO=PO_1:SP \text{ вә ја}$$

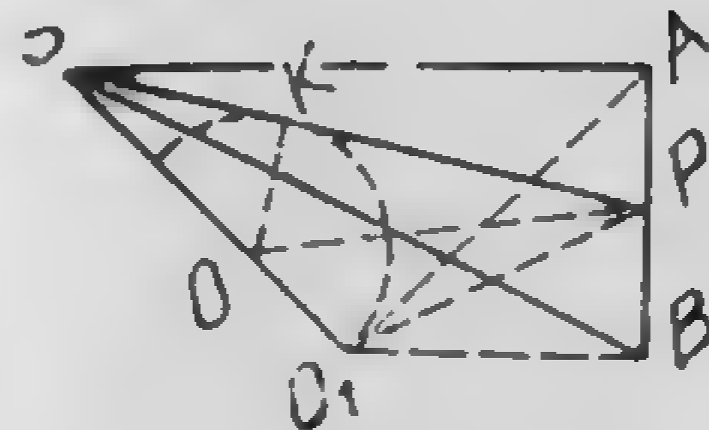
$$OO_1:\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)^2}-OO_1\right)=$$

$$=\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right):\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right),\ OO_1\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)=$$

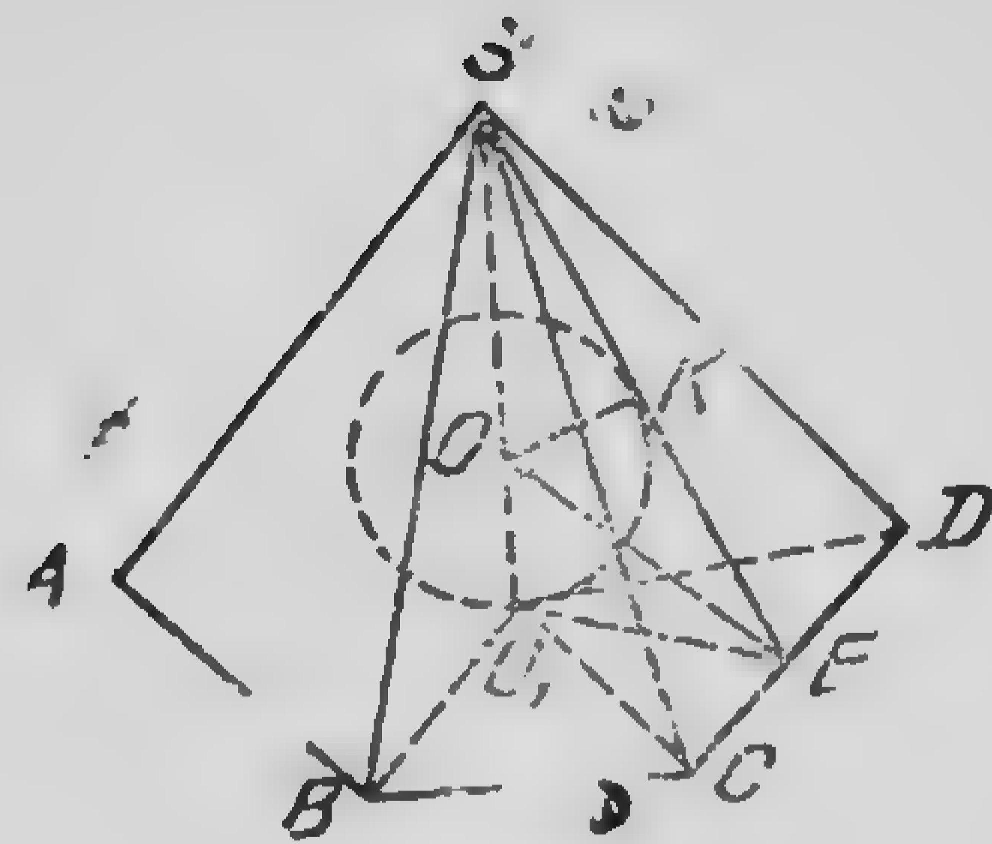
$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)^2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Бурадан

$$OO_1=\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)^2}}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}=$$



Шәкил 185



Шәкил 186

$$=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

202. Шәклә аид изаһат 199 №-ли мәсәләдә олдуғу кимидир. Күрәнин радиусуну R илә ишарә едәк.

$\triangle SOK\sim\triangle SO_1E$ олдугу үчүн (шәкил 186),

$$\frac{OK}{SO}=\frac{O_1E}{SE} \text{ вә ја } \frac{OK}{SO_1-OO_1}=\frac{O_1E}{SE},\ \frac{R}{SO_1-R}=\frac{O_1E}{SE},$$

бурадан

$$R=\frac{SO_1\cdot O_1E}{SE+O_1E} \qquad (1)$$

$\triangle O_1EC$-дән: $O_1E=CE\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}=\frac{q}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n},$

$\triangle SCE$-дән: $SE=\sqrt{SC^2-CE^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2}.$

$\triangle SO_1E$-дән:

$$SO_1=\sqrt{SE^2-O_1E^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}q^2\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$

SO_1, O_1E, SE-нин гијмәтләрини (1)-дә јеринә јазсаг:

$$R=\frac{\frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{180^\circ}{n}-q^2}\cdot\frac{q}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{a^2-\frac{q^2}{4}+\frac{q}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}},$$

бурадан

$$R=\frac{\sqrt{4a^2\sin^2\frac{180^\circ}{n}-q^2}\cdot q\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{2\left(\sqrt{4a^2-q^2}\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}+q\cos\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$

203. $SABCD$ дүзкүн дөрдбучаглы пирамида, $SO=H$, O_1K парчасы SBC мүстәвисинә перпендикулјардыр, O_1 харичинә чәкилмиш күрәнин мәркәзидир, $\angle SO_1K=\alpha$ (шәкил 187).

Пирамиданын отурачаг мүстәвисинин күрә илә кәсиjи даирә олачагдыр. Бу кәсик даирәнин мәркәзи еjни заманда $ABCD$ квадратын мәркәзидир. O_1K вә SO дүз хәтт парчаларындан кечән мүстәви $ABCD$ вә SBC мүстәвиләрин һәр биринә перпендикулјар олачагдыр. Демәли, SON мүстәвиси BC-јә перпендикулјардыр. Она көрә SNO бучағы хәтти бучагдыр. SO_1K вә SON дүзбучаглы үчбучагларында OSN бучағы ортаг олдуғу үчүн $\angle SNO=\angle SO_1K$. Күрәнин радиусуну x илә ишарә едәк.

SON үчбучағында:

$$\angle SNO=\alpha,\ ON=OS\operatorname{ctg}\alpha=H\operatorname{ctg}\alpha.$$

ON парчасы квадратын апофемидир. Она көрә $BN=ON$. $OO_1=H-SO_1=H-x$, ONB дүзбучаглы үчбучағында: $BN=ON=H\operatorname{ctg}\alpha$, $BO=\sqrt{2}H\operatorname{ctg}\alpha$.

O_1OB үчбучағында: $O_1B^2=OO_1^2+BO^2$

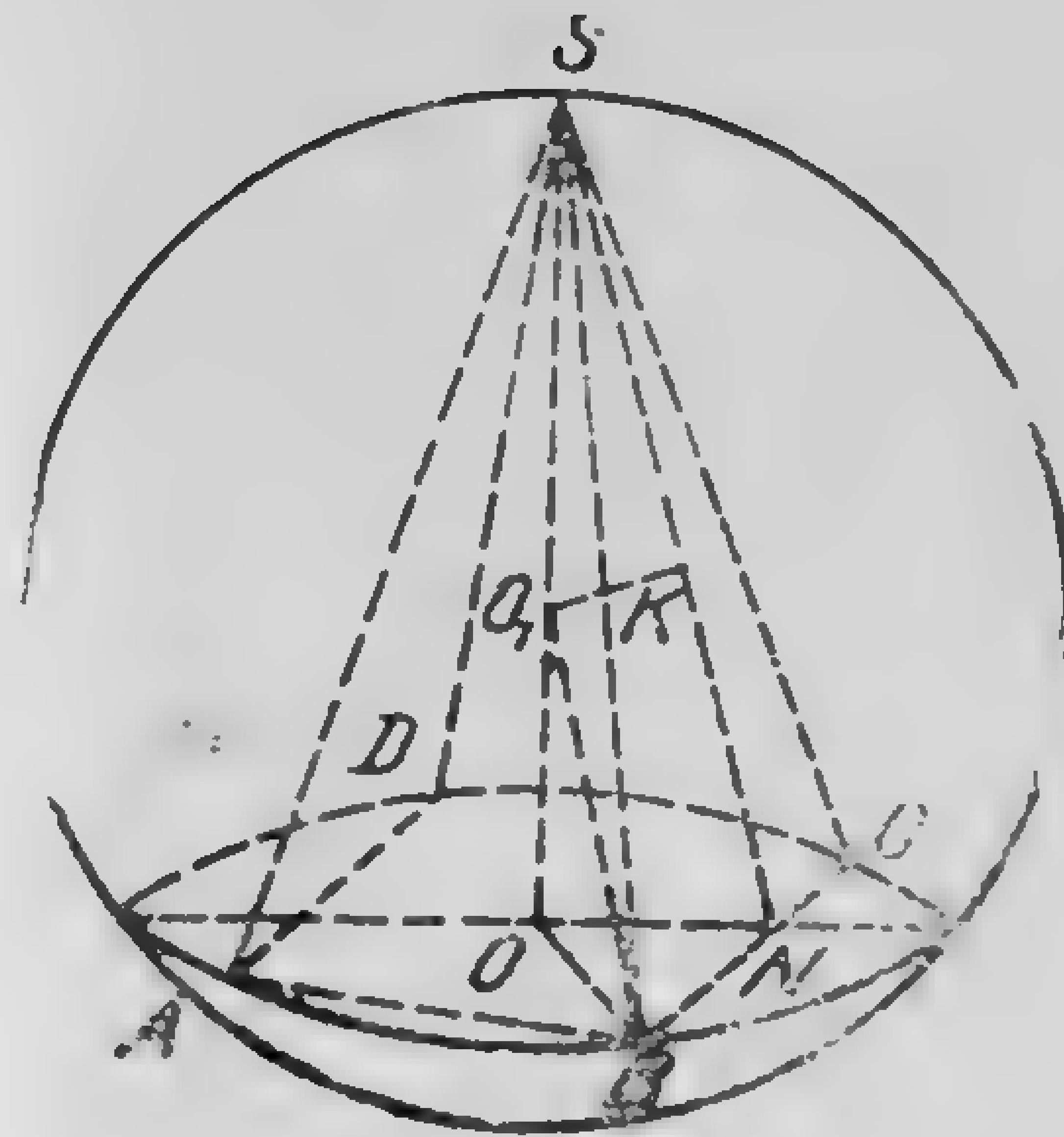
$$x^2=(H-x)^2+(\sqrt{2}H\operatorname{ctg}\alpha)^2,$$

бурадан $x=\frac{H(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)}{2}$.

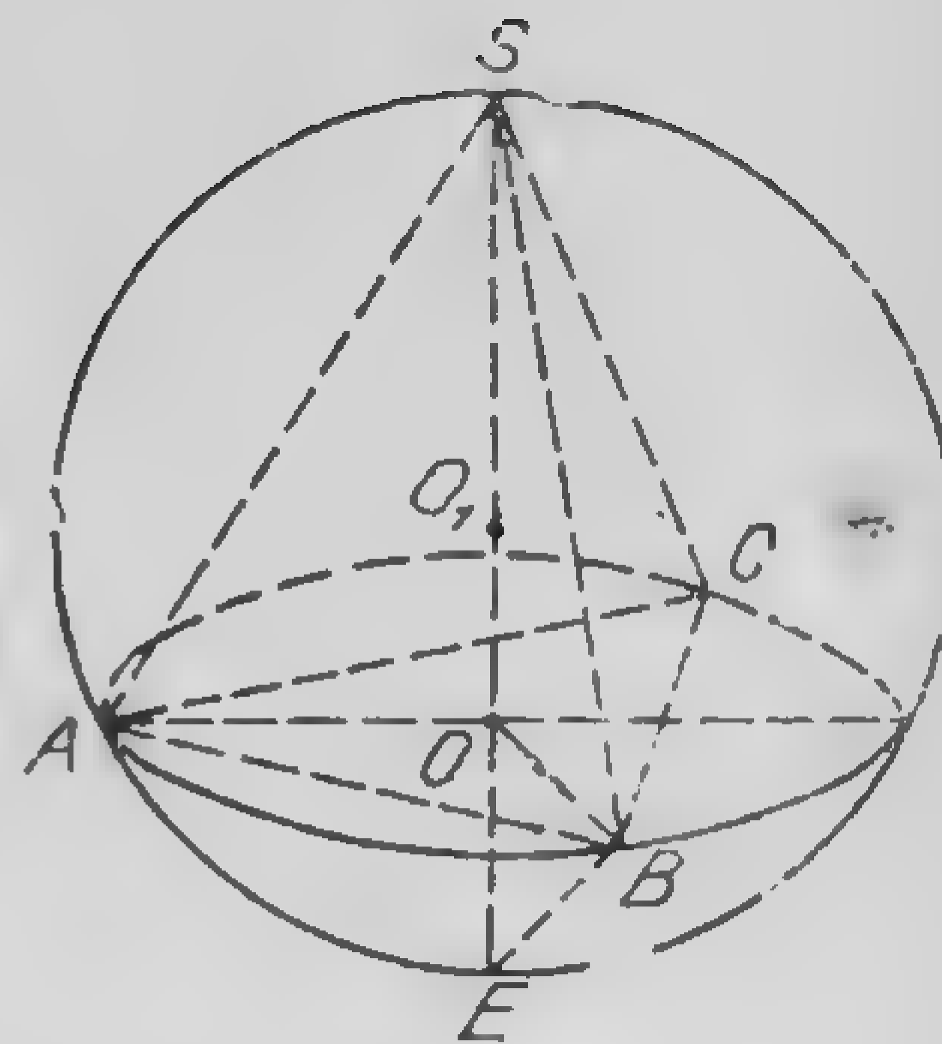
Күрәнин һәчми:

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot SO_1^2=\frac{4\pi}{3}\left[\frac{H(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)}{2}\right]^2=\frac{\pi H^3(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^3}{6}.$$

204. $SABC$ дүзкүн үчбучаглы пирамида, $\angle BSC=\alpha$, харичә чәкилмиш күрәнин мәркәзи O_1 вә $O_1S=R$ (шә-



Шәкил 187



Шәкил 188

кил 188). Пирамида дүзкүн пирамида олдуғундан онун SO һүндүрлүјү ABC үчбучағынын мәркәзиндән кечәчәкдир, јә'ни бу һүндүрлүк һәмин үчбучағын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзиндән кечир. SBE бучағы диаметрә сөјкәнән дахилә чәкилмиш бучаг олдуғу үчүн дүзбучагдыр. Дүзбучаг тәпәсиндән һипотенуза чәкилән перпендикулјарын хассәсинә көрә SBE дүзбучаглы үчбучағында

$$SB^2=SE\cdot SO,\ SB^2=2R\cdot SO. \qquad (1)$$

SBC үчбучағында:

$$\angle BSC=\alpha,\ \angle SBC+\angle SCB+\alpha=180^\circ,$$

$$2\angle SBC=180^\circ-\alpha,\ \angle SBC=90^\circ-\frac{\alpha}{2},\quad BC=x$$

гәбул едәк.

$$\frac{SC}{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{x}{\sin\alpha},\ SC=\frac{x\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$SB=SC=\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

ABC-дән: $x=OB\sqrt{3}$, $OB=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

SOB-дән:

$$\sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= x\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

SO вә SB-нин гијмәтләрини (1)-дә јеринә јазсаг:

$$\left(\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 2Rx\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}},$$

$$x = 8R\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

x-ин гијмәтини SO-ја бәрабәр олан ифадәдә јеринә јазаг:

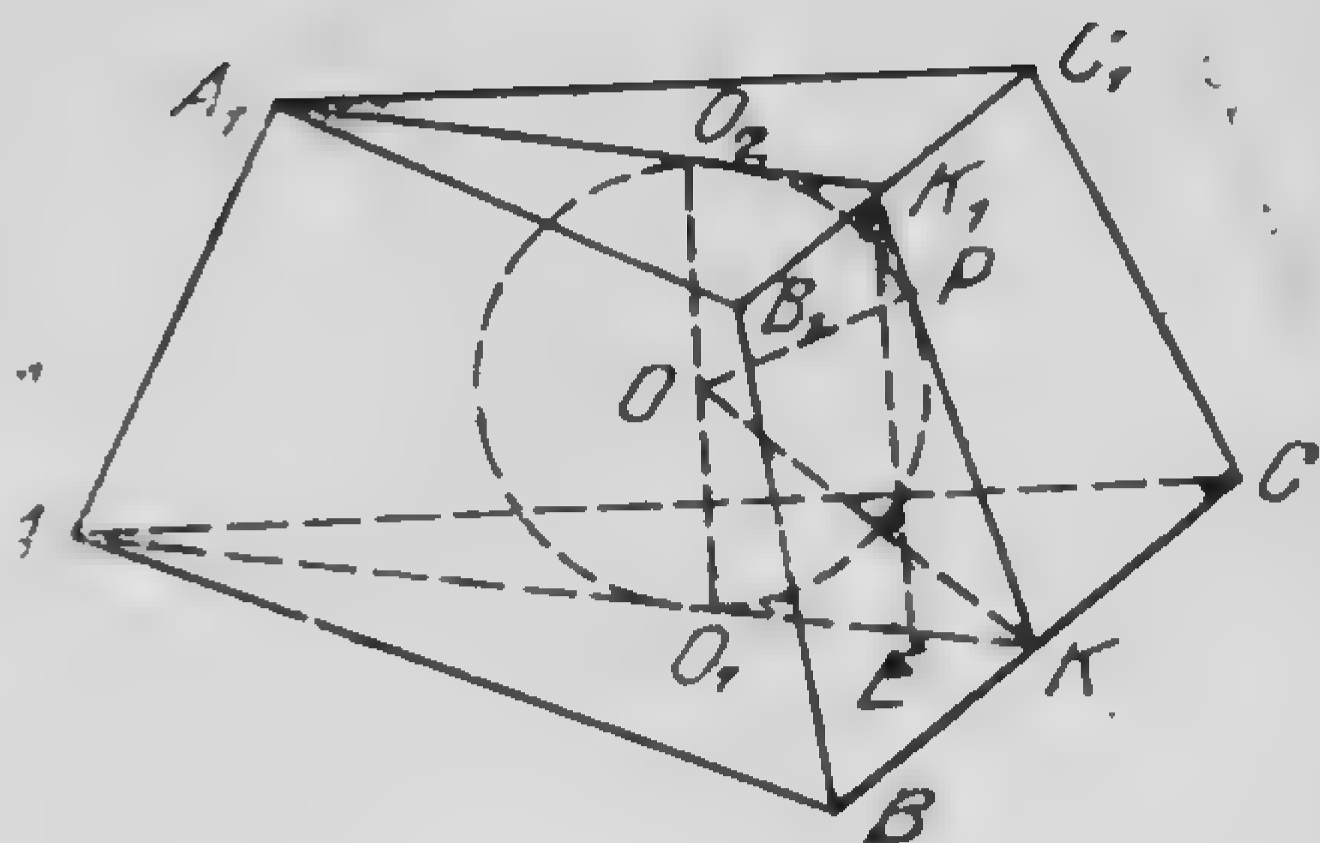
$$SO = x\cdot\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12}} = 8R\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}R\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{3}R[3 - 2(1 - \cos\alpha)] =$$

$$= \frac{2}{3}R(1 + 2\cos\alpha) = \frac{2}{3}R\cdot 2\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) =$$

$$= \frac{4}{3}R(\cos 60^\circ + \cos\alpha) =$$

$$= \frac{8}{3}R\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$



Шәкил 189

205. Күрәнин O мәркәзини (шәкил 189) O_1, O_2 вә P тохунма нөгтәси илә бирләшдирәк, онда OO_1 радиусу ABC, OO_2 радиусу $A_1B_1C_1$, OP радиусу исә BB_1C_1C мүстәвисинә перпендикулјар олар, лакин ABC вә $A_1B_1C_1$ мүстәвиләри паралел олдуғундан OO_1 вә OO_2 радиуслары бир дүз хәтт үзәриндә олачагдыр, јә'ни O_1O_2 парчасы күрәнин диаметридир. OO_1 вә OP парчаларындан кечән мүстәви ABC, $A_1B_1C_1$ вә BCC_1B_1 мүстәвиләринә перпендикулјар олачагдыр. Демәли, O_1 нөгтәси ABC үчбучағынын мәркәзидир. Тутаг ки, пирамиданын отурачағынын тәрәфләри $AB = a_1$, $A_1B_1 = a_2$, пирамиданын апофеми $KK_1 = l$. Пирамиданын там сәтһи:

$$S_т = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3(a_1 + a_2)l}{2};$$

$$O_1K = r_1, \quad O_2K_1 = r_2$$

оларса, онда $a_1 = 2r_1\sqrt{3}$, $a_2 = 2r_2\sqrt{3}$ олар. Бунлары пирамиданын там сәтһи дүстурунда нәзәрә алсаг:

$$S_т = 3\sqrt{3}(r_1^2 + r_2^2) + 3\sqrt{3}(r_1 + r_2)l;$$

$$KP = O_1K, \quad PK_1 = K_1O_2.$$

Демәли, $PK + K_1P = O_1K + O_2K_1$ вә ја $r_1 + r_2 = l$.

EKK_1 үчбучағында:

$$r_1 + r_2 = l \text{ вә ја } r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = l^2 \qquad (1)$$

$EK^2 + EK_1^2 = KK_1^2$, бурадан

$$(r_1 - r_2)^2 + (2r)^2 = l^2. \qquad (2)$$

(2) бәрабәрлијиндән (1) бәрабәрлијини чыхсаг: $r_1r_2 = r^2$ олар (бурада r күрәнин радиусудур). Сон бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг, $r_1^2 + r_2^2 = l^2 - 2r$. $r_1^2 + r_2^2 = l^2 - 2r^2$, $r_1 + r_2$ l бәрабәрликләри пирамиданын там сәтһи дүстурунда нәзәрә алсаг:

$$S_т = 3\sqrt{3}\,(l^2 - 2r^2) + 3\sqrt{3}\,l^2 = 6\sqrt{3}\,(l^2 - r^2).$$

EKK_1 үчбучағында

$$\angle K_1KE = \alpha,\ KK_1 = \frac{EK_1}{\sin\alpha},\quad l = \frac{2r}{\sin\alpha}$$

олур, она көрә пирамиданын там сәтһи олар.

$$S_т = 6\sqrt{3}\left(\frac{4r^2}{\sin^2\alpha} - r^2\right) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{r^2(4-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

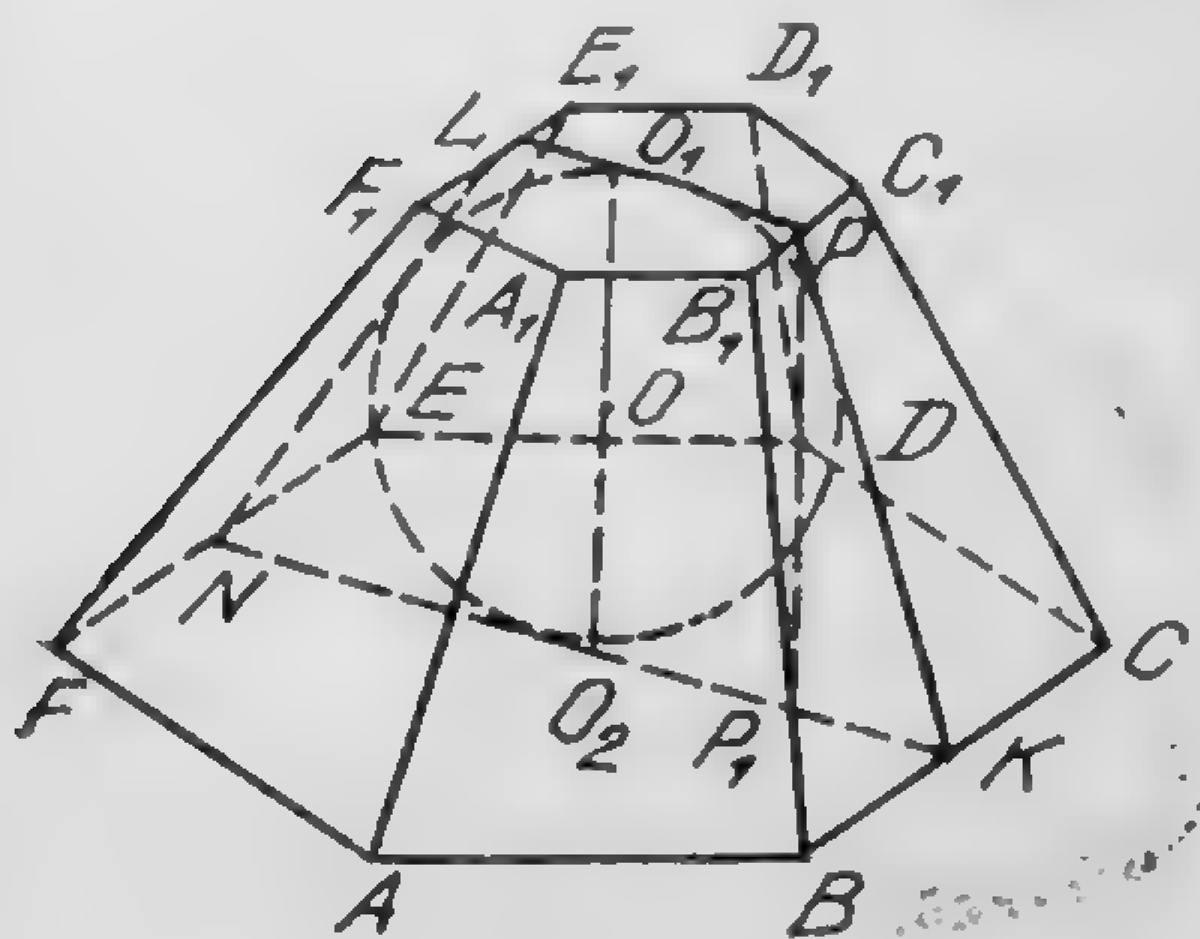
Күрәнин сәтһи:

$$S_к = 4\pi r^2;\ S_к : S_т = (4\pi r^2) : \frac{6\sqrt{3}\,r^2(4-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha},$$

бурадан $S_к : S_т = \dfrac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}(4-\sin^2\alpha)}$.

206. $PKNL$ дөрдбучаглысында $PK = LN$, $PL \parallel KN$ олдугундан дөрдбучаглы бәрабәрјанлы трапесијадыр (шәкил 190). Чеврәнин O мәркәзини O_1 вә O_2 тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк, онда $OO_1 \perp PL$ вә $OO_2 \perp KN$ олур. Лакин $KN \parallel PL$, демәли, OO_1 вә OO_2 радиуслары ејни дүз хәтт үзәриндәдир, она көрә O_1O_2 парчасы диаметрдир, $PP_1 \perp KN$ чәкәк. Онда $PP_1O_2O_1$ дүзбучаглысында $PP_1 = O_1O_2 = 2R$. Ајдындыр ки, $KN = 2r$, $PL = 2r_1$ (r алт, r_1 исә үст отурачағынын апофемидир). Кәсик пирамиданын јан сәтһи:

$$S_{јан} = \frac{6AB + 6A_1B_1}{2}\cdot KP = 3(AB + A_1B_1)\cdot KP,$$



Шәкил 190

$AB + A_1B_1$ чәмини PK илә ифадә едәк:

$$AB = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{KN}{\sqrt{3}},$$

$$A_1B_1 = \frac{2r_1}{\sqrt{3}} = \frac{PL}{\sqrt{3}}.$$

Онда

$$AB + A_1B_1 = \frac{KN}{\sqrt{3}} + \frac{PL}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(KN + PL) \qquad (1)$$

Харичә чәкилмиш дөрдбучаглынын хассәсинә көрә $KP + LN = KN + PL$ олур. Демәли, $KN + PL = 2KP$.

Сон бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг,

$$AB + A_1B_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2KP \quad \text{олур.}$$

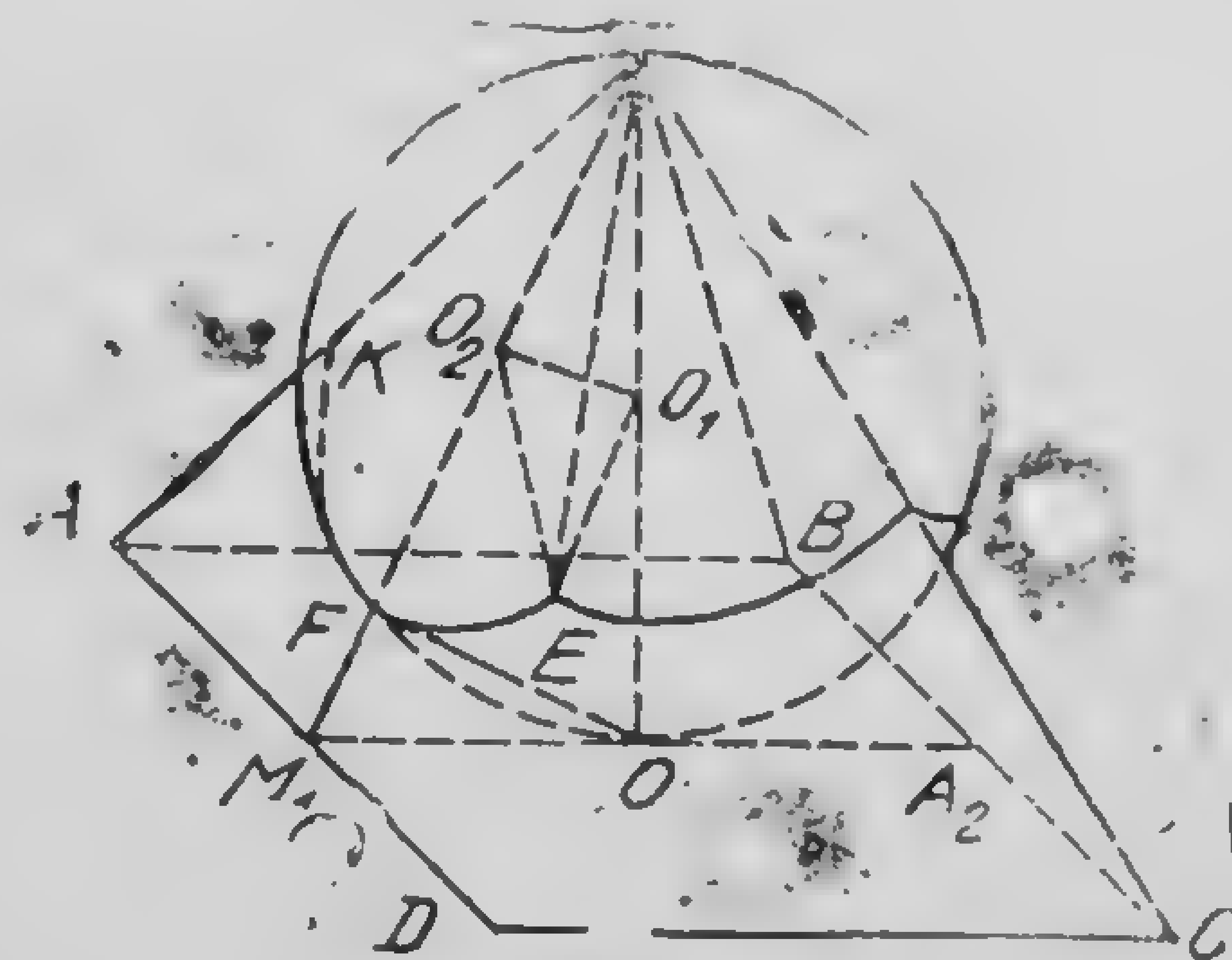
$$S_{јан} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2KP\cdot KP = \frac{6KP^2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,KP^2.$$

KPP_1 үчбучағында:

$$\angle PKP_1 = \alpha,\ \frac{PP_1}{KP} = \sin\alpha,\ PK = \frac{2R}{\sin\alpha};$$

$$S_{јан} = 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{2R}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{8\sqrt{3}\,R^2}{\sin^2\alpha}.$$

207. $MABCD$ дүзкүн дөрдбучаглы пирамидадыр, $MO = h$, $\angle AMD = \alpha$ (шәкил 191). AMD вә $ABCD$ мүстәвиләри ејни MM_1O мүстәвисинә перпендикулјар олдуғу үчүн онларын кәсишмә хәтти олан AD парчасы MM_1O-ја перпендикулјар олар. Демәли, $MM_1 \perp AD$, $OM_1 \perp AD$. F илә O нөгтәсини бирләшдирәк. Пирамиданын отурачағынын тәрәфини a илә ишарә едәк. MM_1O вә MFO дүзбучаглы үчбу- MFO дүзбучагдыр. MM_1O вә MFO дүзбучаглы үчбучагларын ити бучаглары бәрабәр олдугу үчүн бу үчбучаглар охшардыр. MM_1 парчасы AMD бәрабәрјанлы үчбучағын һүндүрлүјү олдугундан һәм тәнбөлән, һәм



Шәкил 191

дә меднан олачагдыр. Она көрә $\smile FE = \frac{1}{2} \smile KFE$ олур, MF парчасы кәсиіин O_2 мәркәзиндән кечдиіи үчүн кәсиіин диаметри олачагдыр.

O_2E радиусуну чәкәк. Онда FO_2E бучағы EO_2M үчбучағына нәзәрән харичи бучаг, $MO_2 = O_2E$ олдугу үчүн $\angle FO_2E = \alpha$.

$\triangle MM_1O \sim \triangle OFM$ олдугундан:

$$MO : MM_1 = MF : MO, \ MF = \frac{MO^2}{MM_1} = \frac{h^2}{MM_1}.$$

$\triangle MM_1O$-дан:

$$MM_1^2 = \frac{h^2}{4} + h^2. \qquad (1)$$

$\triangle MM_1D$-дән: $\frac{a}{2} = MM_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ вә ја $\frac{a^2}{4} = MM_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Сон бәрабәрлиіи (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$MM_1^2 = MM_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + h^2. \ MM_1 = \frac{h}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

олур. $MF = \frac{h^2}{MM_1}$ бәрабәрлиіиндә MM_1-и нәзәрә алсаг:

$$MF = h\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \ O_2F = \frac{ME}{2} = \frac{h\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

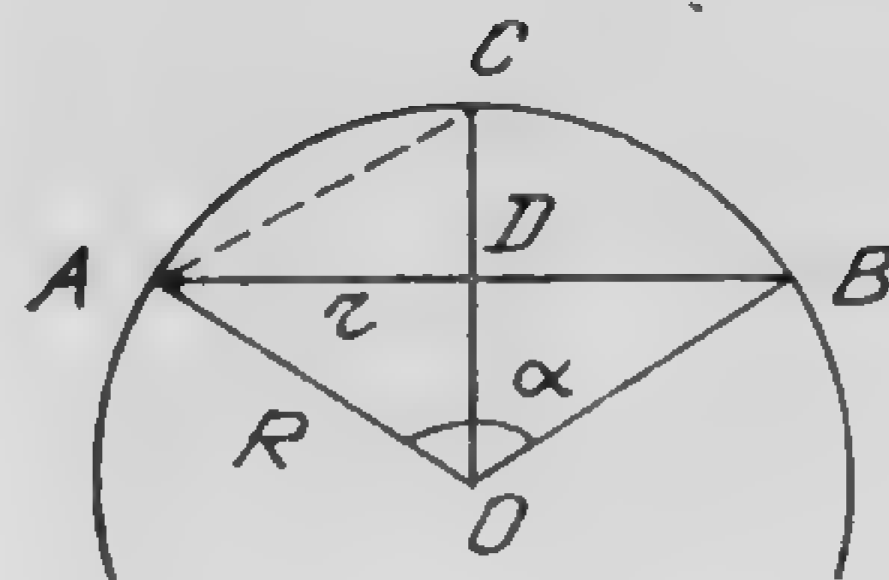
Ахтарылан әјри:

$$L = 4 \cdot \smile KFE = 4 \cdot \frac{2\pi \cdot O_2F}{360} 2\alpha = \frac{\pi\alpha h\sqrt{\cos\alpha}}{45\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

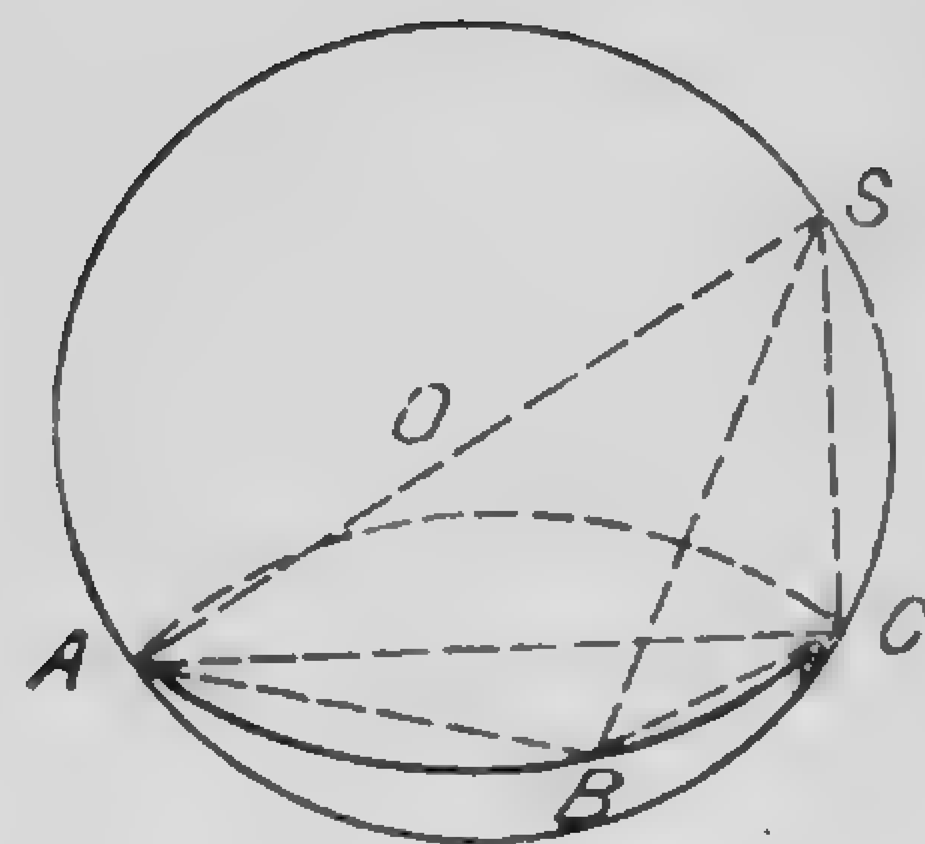
208. *Чаваб.* $S_т = \pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1\right)$.

Көстәриш. 192-чи шәкилдән истифадә един.

209. $SABC$ мәркәзи O олан күрә дахилинә чәкилмиш пирамидадыр, $\angle ABC = 90°$, $\angle BCA = \alpha$, $OS = R$, $\angle SBC = \alpha$; SBC вә SAC үзләри отурачаға перпендикулјардыр (шәкил 193). $CB \perp AB$ олдуғу үчүн $SB \perp AB$ олачагдыр. ACS мүстәвиси кәсик даирәнин диаметриндән кечәрәк, она перпендикулјар олдуғундан һәмин



Шәкил 192



Шәкил 193

мүстәви (ACS) күрәнин мәркәзиндән кечәчәкдир. Демәли, ASC үчбучағын харичинә чәкилмиш чеврә бөјүк даирә чеврәсидир. ACS дахилә чәкилмиш бучаг дүз-бучаг олдуғундан AS бөјүк даирә чеврәсинин диаметри олачагдыр.

$$V = S_{от} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot SC = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SC.$$

ABC дүзбучаглы үчбучағында: $\angle ACB = \alpha$. AC парчасыны x илә ишарә едәк:

$$AB = AC\sin\alpha = x\sin\alpha, \ BC = AC\cos\alpha = x\cos\alpha.$$

SBC дүзбучаглы үчбучағында:

$$\angle SBC = \alpha, \ SC = BC\operatorname{tg}\alpha = x\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = x\sin\alpha.$$

ASC үчбучағында: $AS = 2R$, $AC = x$, $SC = x\sin\alpha$, $SC^2 + AC^2 = AS^2$, $(x\sin\alpha)^2 + x^2 = (2R)^2$. Сон бәрабәрликдән: $x = \frac{2R}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}$.

Пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SC = \frac{1}{6} x\sin\alpha \cdot x\cos\alpha \cdot x\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \sin^2\alpha\cos\alpha,$$

бурада x-ин гијмәтини јеринә јаздыгда:

$$V = \frac{4R^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3\sqrt{(1 + \sin^2\alpha)^3}}.$$

210. Фәрз едәк ки, O күрә секторунун тәпәси (шәкил 194), O_1 бу секторун дахилинә чәкилмиш күрә мәркәзидир. O_1 мәркәзи илә M вә N тохунма нөгтәләрини бирләшдирәк. Онда $O_1M \perp AO$, $O_1N \perp OB$ олур. C тохунма нөгтәсини O_1 вә O мәркәзләри илә бирләшдирәк. Онда $O_1C \perp EF$, $OC \perp EF$ олур. Демәли, O_1C вә CO радиуслары үст-үстә дүшүр. $OO_1 + O_1C = OO_1 + r = R$. OC парчасы AOB бучағынын тәнбөләнидир. OO_1N дүзбучаглы үчбучағында

$$OO_1 = \frac{O_1N}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad R = OO_1 + O_1C$$

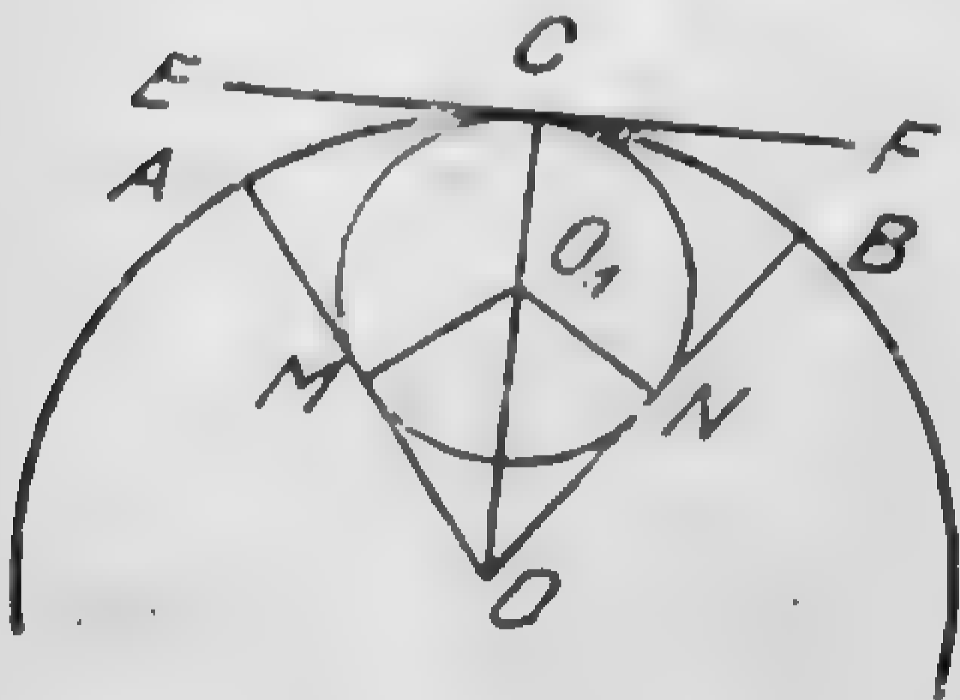
вә ја

$$R = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r, \; r = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

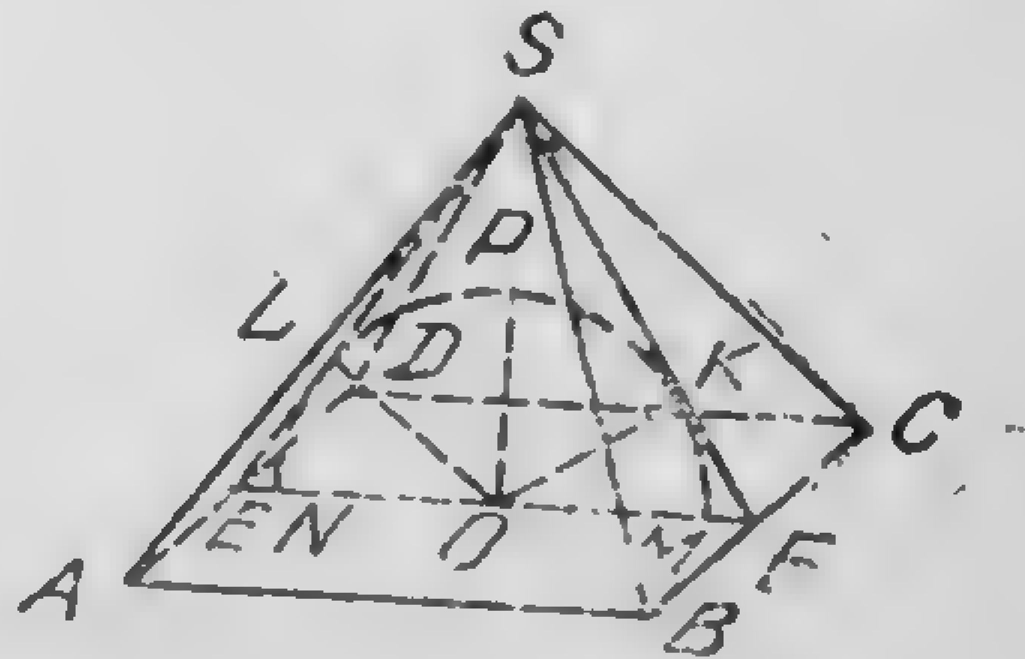
Күрәнин сәтһи:

$$S = 4\pi r^2 = \frac{\pi R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}; \; V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi R^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}}{6\cos^6\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

211. Күрәнин O мәркәзиндән $ABCD$ мүстәвисинә OP радиусу перпендикулјар чәкәк. O мәркәзи илә K тохунма нөгтәсини бирләшдирәк. Онда OK парчасы SBC мүстәвисинә перпендикулјар олачагдыр. Демәли, OP вә OK парчаларындан кечән $EFKPL$ мүстәвиси (шәкил 195) $ABCD$ вә SBC мүстәвиләринә перпендикулјар олур, буна көрә BC-јә перпендикулјар олачагдыр. $AD \parallel BC$ олдуғундан $EFKPL$ мүстәвиси ејни заманда AD-јә дә перпендикулјар олачагдыр. Она көрә KFO бучағы хәтти бучагдыр, $EF = AB$, MN исә күрәнин диаметридир. Күрәнин радиусуну r, пирамида отурачағынын тәрәфини исә a илә ишарә едәк. Күрәнин там сәтһи: $S_1 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$.



Шәкил 194



Шәкил 195

Пирамиданын там сәтһи: $S_2 = \dfrac{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. Күрә илә пирамиданын саһәләри нисбәти:

$$q = \frac{3\pi r^2 \cos\alpha}{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

OKF үчбучағында:

$$OK = OF\sin\alpha = \frac{a}{2}\sin\alpha \text{ вә ја } r = \frac{a}{2}\sin\alpha.$$

Мәсәләнин шәртинә көрә:

$$a - 2r = m; \; a - 2\cdot\frac{a}{2}\sin\alpha = m,$$

$$a = \frac{m}{2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}, \; r = \frac{a}{2}\sin\alpha = \frac{m\sin\alpha}{4\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Јарым күрәнин һәчми;

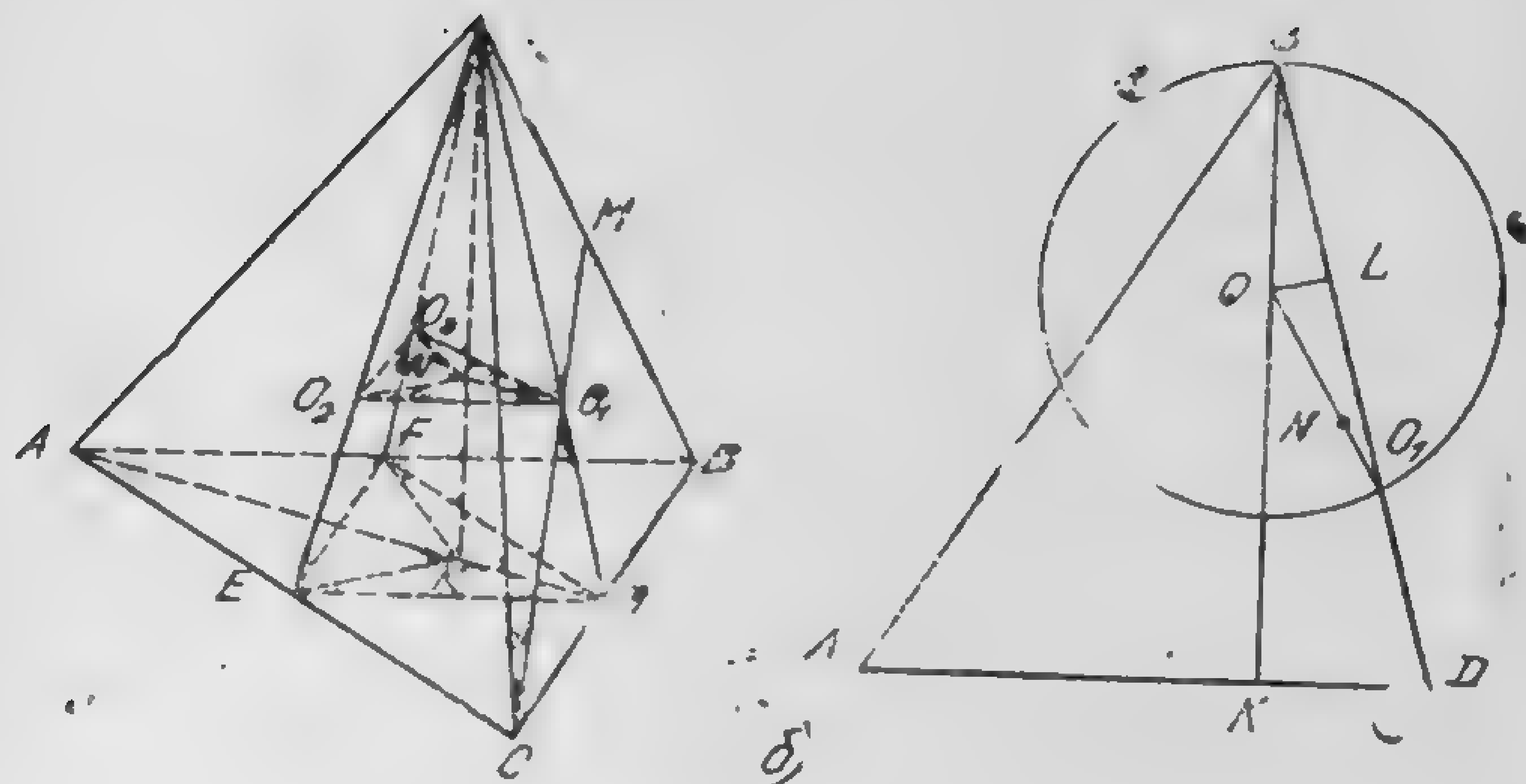
$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{m\sin\alpha}{4\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}\right)^3 =$$

$$= \frac{m^3\pi\sin^3\alpha}{96\sin^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Саһәләрин нисбәти:

$$q = \frac{3\pi\left(\frac{1}{2}a\sin\alpha\right)^2\cos\alpha}{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{3}{8}\pi\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$



Шәкил 196, а), б)

212. Пирамида дүзкүн олдуғундан, онун бүтүн јан үзләри бәрабәр үчбучаглардыр, она көрә дә һүндүрлүкләрин кәсишмә нөгтәси олан O_1, O_2, O_3 нөгтәләри S тәпәсиндән ејни мәсафәдә олачагдыр: $SO_1 = SO_2 = SO_3$. Пирамиданын SK һүндүрлүјүнү чәкәк. SK дүз хәтти илә $O_1O_2O_3$ мүстәвиси N нөгтәсиндә кәсишир. $\triangle SKD = \triangle SKF = \triangle SKE$ олдуғундан $\angle DSK = \angle FSK = \angle ESK$. Беләликлә, $\triangle SO_1N = \triangle SO_2N = SO_3N$. Бурадан $NO_1 = NO_2 = NO_3$. Демәли, N нөгтәси $O_1O_2O_3$ үчбучағынын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзидир (шәкил 196, а).

$SK \triangle O_1O_2O_3$ олдуғуну асанлыгла исбат етмәк олар.

Пирамиданын һәчмини тапаг. $BC = x$ гәбул едәк. SDB вә BMC дүзбучаглы үчбучагларында B ити бучағы ортаг олдуғуна көрә $\angle DSB = \angle MCB$, она көрә дә SDB вә O_1DC дүзбучаглы үчбучаглары охшардыр. Бу үчбучаглардан:

$$O_1D^2 = \frac{x^2}{4SD}. \qquad (1)$$

ASD мүстәвисини нәзәрдән кечирәк (шәкил 196, б). Фәрз едәк ки, O, күрәнин мәркәзидир, бу мәркәз ејни заманда S вә O_1 нөгтәләриндән кечән чеврәнин мәркәзидир, онда $SO = OO_1 = r$. $OL \perp SO_1$ чәкәк.

$\triangle SLO \sim \triangle SKD$ олдуғуна көрә

$$SL = \frac{rh}{SD}. \qquad (2)$$

$SD = 2SL + O_1D$. Бурада (1) вә (2) бәрабәрликләри нәзәрә алсаг: $SD = \frac{2rh}{SD} + \frac{x^2}{4SD}$ вә ја

$$SD^2 = 2rh + \frac{x^2}{4}. \qquad (3)$$

Дикәр тәрәфдән $\triangle SKD$-дән $SD^2 = h^2 + KD^2$,

$$KD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{6}x.$$

Демәли,

$$SD^2 = h^2 + \frac{x^2}{12}. \qquad (4)$$

(3) вә (4)-дән: $x^2 = 6h(h - 2r)$.

Беләликлә, $V = \frac{\sqrt{3}}{2}h^2(h - 2r)$.

213. Фәрз едәк ки, пирамиданын отурачағынын тәрәфи a-дыр. Онда јан тили $2a$ олур. Бурадан пирамиданын һүндүрлүјү $a\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Ашкардыр ки, күрәнин O мәркәзи пирамиданын SO_1 һүндүрлүјү үзәринә дүшәчәкдир (шәкил 197). Тутаг ки, M вә N сферанын ујғун олараг DC вә SC тилләринә тохунма нөгтәләридир. Тохунма нөгтәсинә чәкилән радиусун хассәсинә көрә:

$OM \perp DC$, $ON \perp SC$. $\triangle OMD = \triangle MOC = \triangle ONC$ (һипотенуза вә катетинә көрә).

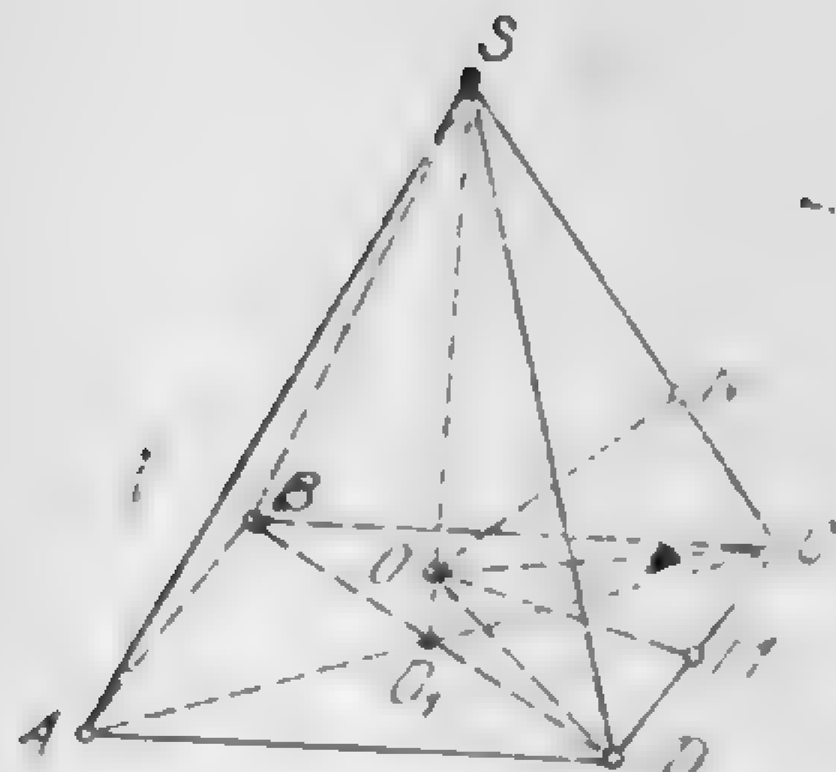
Бу үчбучагларын бәрабәрлијиндән

$$CN = CM = DM = \frac{a}{2}, \quad SN = SC - CN = \frac{3a}{2}.$$

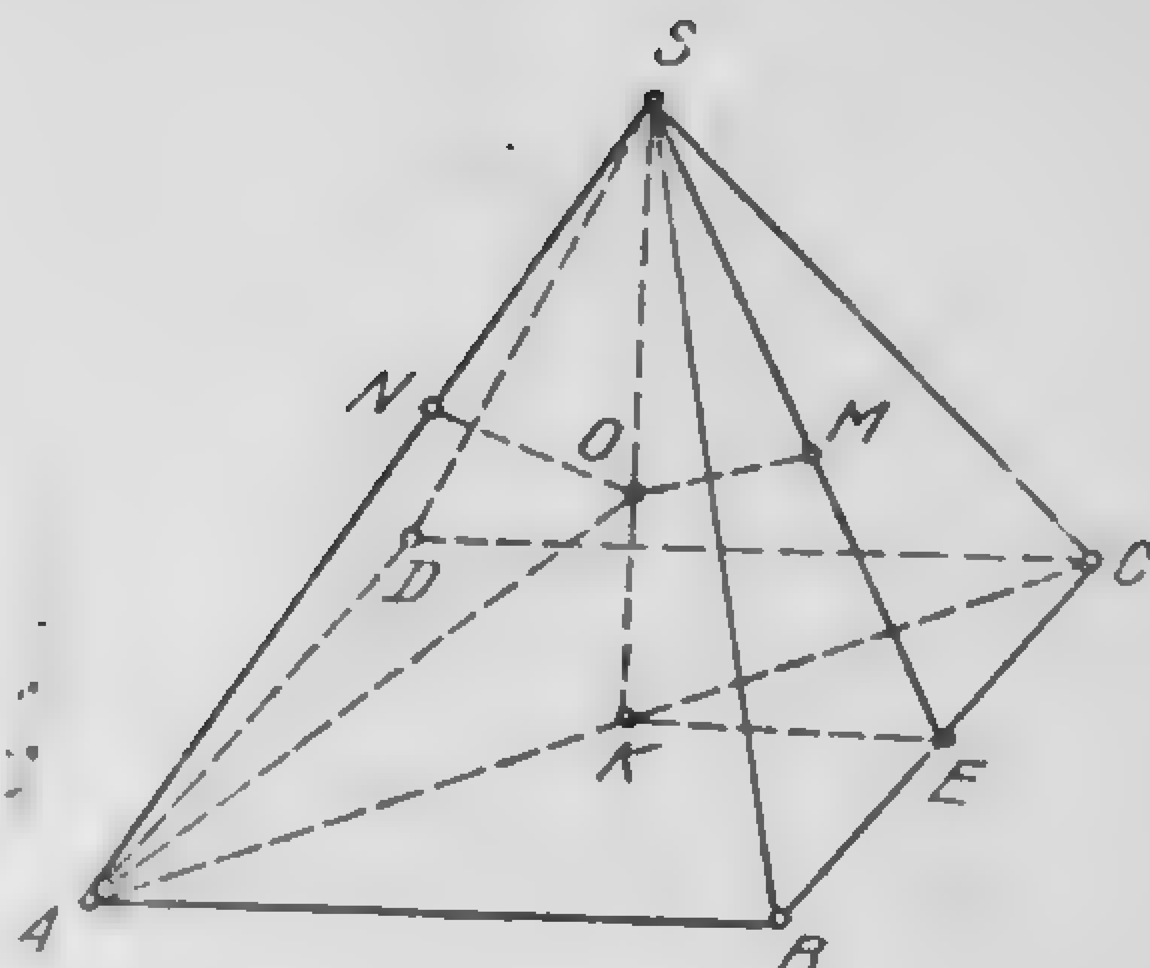
$\triangle SNO \sim \triangle SO_1C$ олдуғундан: $\frac{ON}{SN} = \frac{O_1C}{SO_1}$, бурадан

$$ON = \frac{3a}{2\sqrt{7}}, \quad V_п = \frac{1}{3}a^3\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad V_к = \frac{9\pi a^3}{14\sqrt{7}}.$$

Беләликлә: $\frac{V_п}{V_к} = \frac{49\sqrt{2}}{27\pi}$.



Шәкил 197



Шәкил 198

214. Тутаг ки, O нөгтәси $SABCD$ пирамидасынын харичинә чәкилмиш күрәнин мәркәзидир (шәкил 198). $SO = OA = R$—һәмин күрәнин радиусу, SK—пирамиданын һүндүрлүјүдүр. $SE \perp BC$, $OM \perp SE$, $ON \perp AS$ чәкәк. Мәсәләнин шәртинә көрә $OM = a$, $ON = b$.

$SKE \sim \triangle SOM$ олдуғуна көрә $\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}} = \frac{KE}{SK}$,

$\triangle SAK \sim \triangle SNO$ олдуғундан:

$$\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}} = \frac{AK}{SK} = \frac{\sqrt{2}\,KE}{SK}.$$

Беләликлә,

$$\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-a^2}}.$$

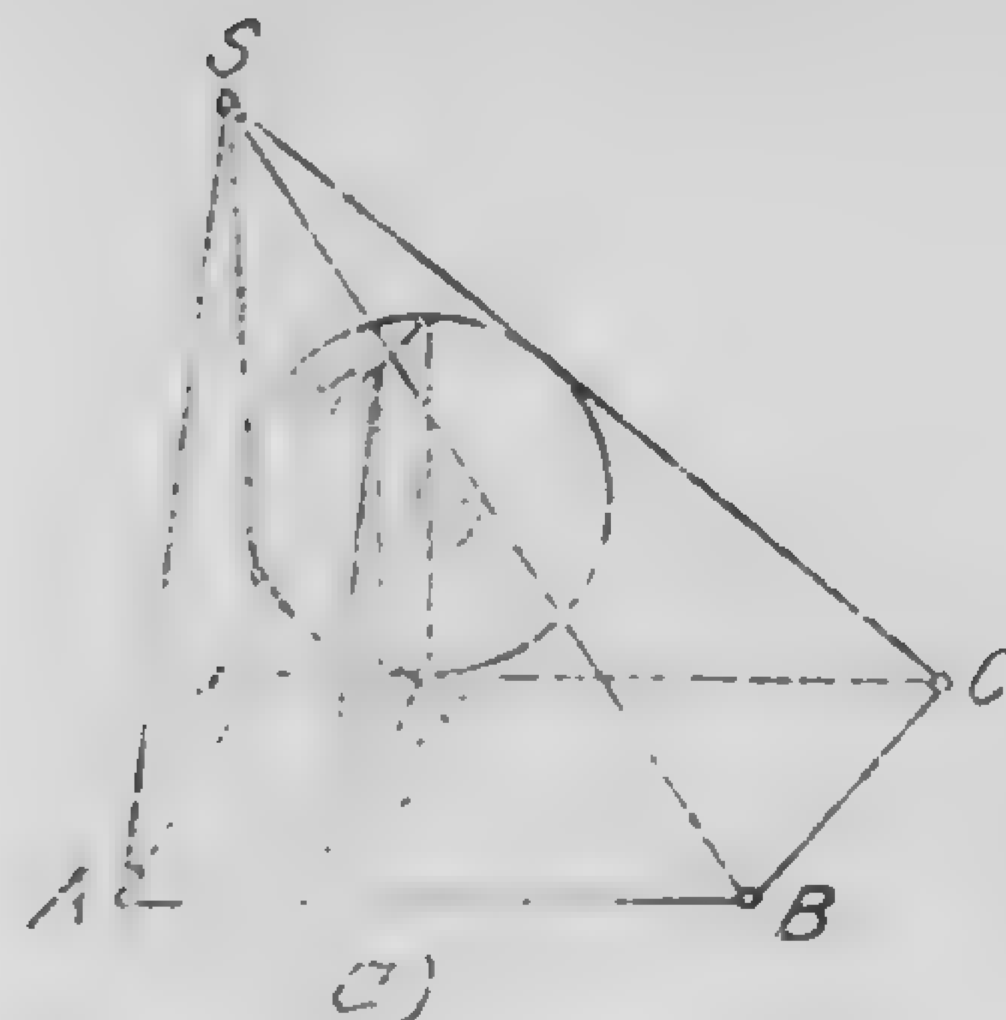
Бурадан

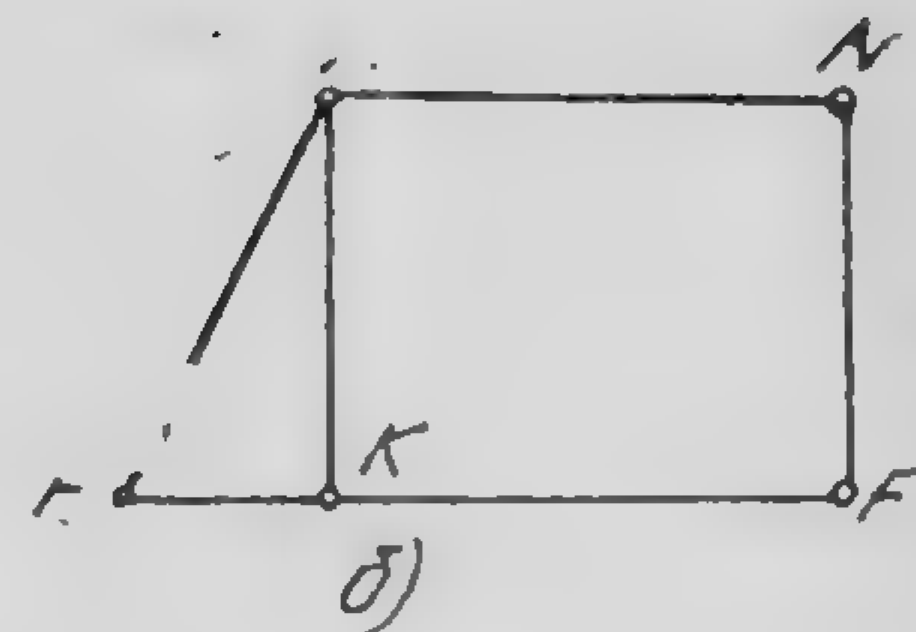
$$R = \frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}.$$

215. Пирамиданын SD тили отурачаг мүстәвисинә перпендикулјар олдуғундан дахилиндә силиндрин отурачағынын чеврәси олан SCD үчбучағы (шәкил 199, а), дүзбучаглы үчбучагдыр. Бу чеврәнин радиусу SDC үчбучағынын саһәсинин, онун јарымпериметринә нисбәтинә бәрабәрдир:

$$r = \frac{ah}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}.$$

$\angle MEK = \angle SAD$ олдуғу үчүн $\triangle MEK \sim \triangle SAD$.





Шәкил 199, а), б)

$\triangle SAD$-дән: $\operatorname{ctg}\angle SAD = \frac{a}{h}$. Беләликлә, $\operatorname{ctg}\angle MEK = \frac{a}{h}$. $EMNF$ трапесијасыны нәзәрдән кечирәк (шәкил 199, б), $MK = 2r$. $\triangle MEK$-дан; $EK = MK\operatorname{ctg}\angle MEK = 2r\cdot\frac{a}{h}$. Бурадан ахтарылан парча

$$KF = EF - EK = a - \frac{2ar}{h} = \frac{a\left(\sqrt{a^2+h^2}+h-a\right)}{\sqrt{a^2+h^2}+h+a}.$$

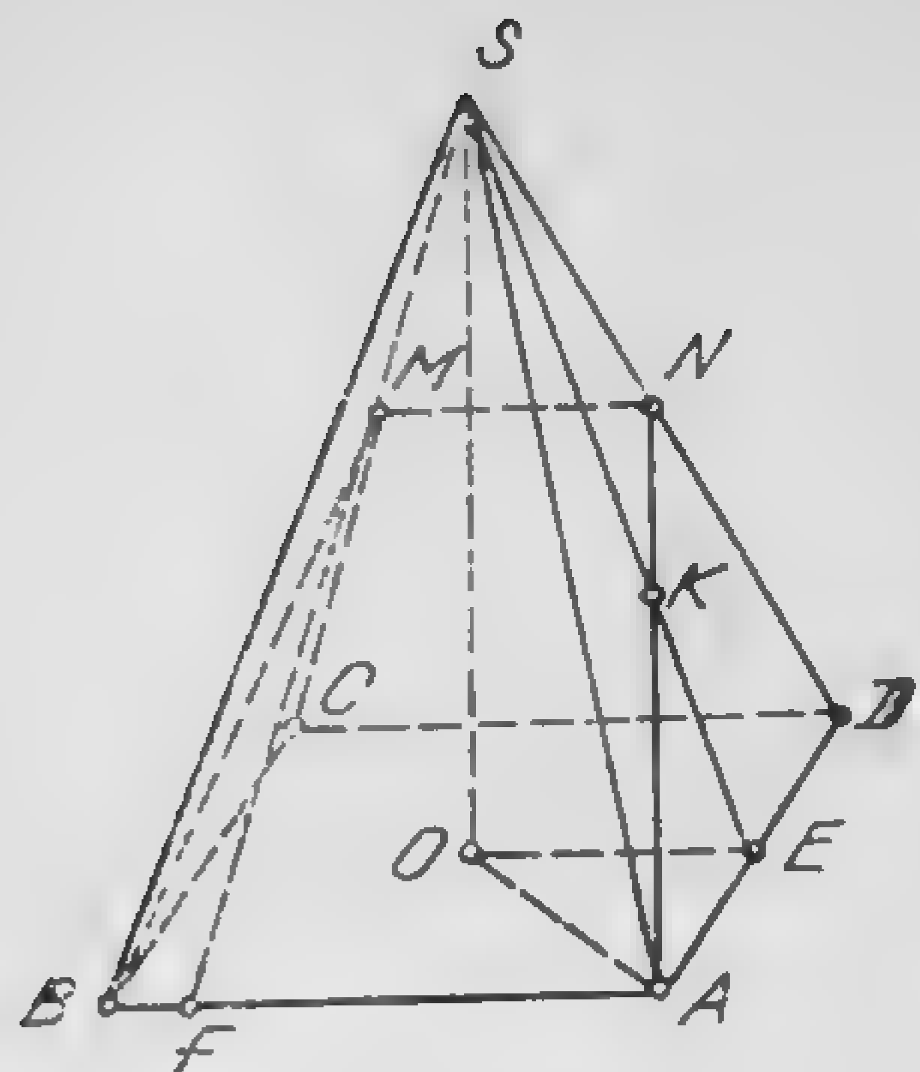
216. Кәсикдә $ABMN$ бәрабәрјанлы трапесијасы алыначагдыр (шәкил 200). Бу трапесијанын MN отурачағыны, AN јан тәрәфини тапаг. Тутаг ки, SO пирамиданын һүндүрлүјү, SE исә онун апофемидир.

$\triangle SOE$-дән: $SE = \sqrt{SO^2+OE^2} = \frac{3}{2}b$.

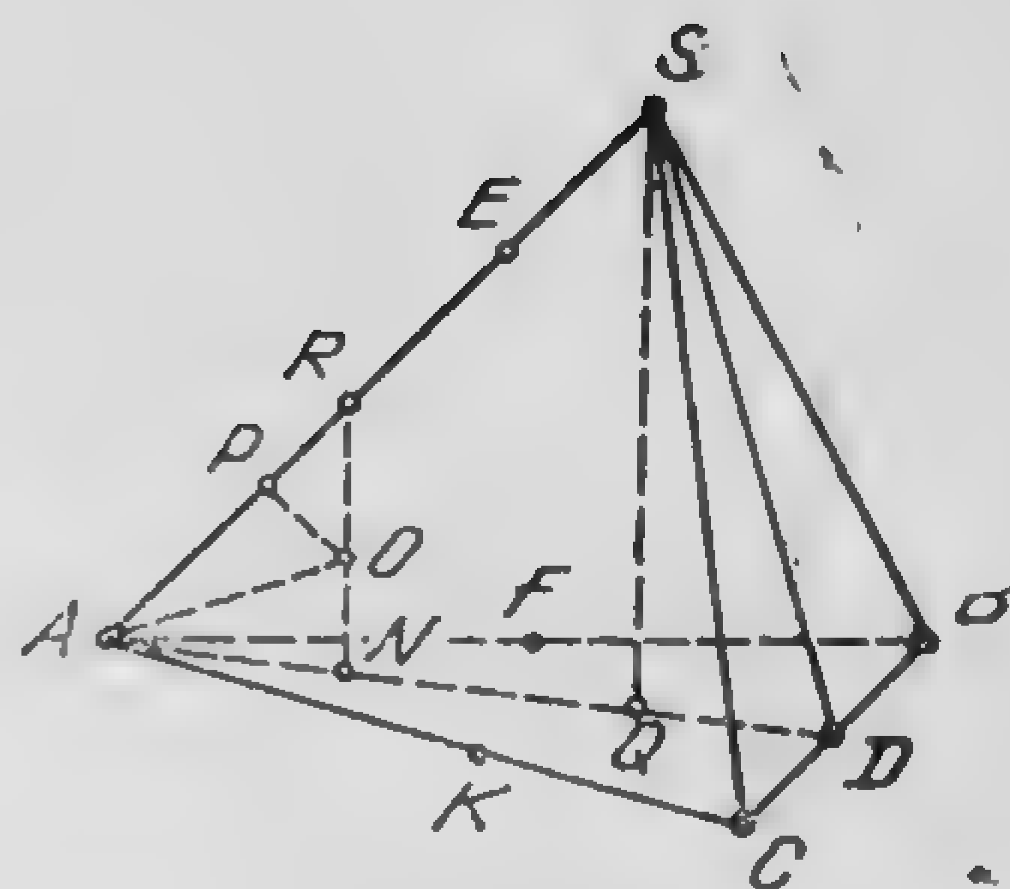
K вә O пирамида үзләринин күрәјә тохунма нөгтәләридир. Она көрә дә AO вә AK—күрәјә тохунанлардыр. Демәли, $AK = AO = \frac{b}{\sqrt{2}}$, һәмин сәбәбә көрә

$$EK = EO = \frac{b}{2};\quad \frac{EK}{SE} = \frac{b}{2} : \frac{3}{2}b = \frac{1}{3}.$$

Демәли, K—медианларын кәсишмә нөгтәсидир. Она көрә AN медиандыр. Бурадан



Шәкил 200



Шәкил 201

$AN = \frac{3}{2}AK = \frac{3}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{3b}{2\sqrt{2}}$ вә $MN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b.$

Фәрз едәк ки, MF парчасы трапесијанын һүндүрлүјүдүр.

$$BF = \frac{AB - MN}{2} = \frac{b - \frac{1}{2}b}{2} = \frac{b}{4},$$

онда △ MBF-дән:

$$MF = \sqrt{MB^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{9}{8}b^2 - \frac{b^2}{16}} = \frac{b\sqrt{17}}{4}.$$

Бурадан $S = \frac{3b^2\sqrt{17}}{16}$.

217. ACS мүстәвисинин (шәкил 201) сфера илә кәсији олан чеврә SC парчасына тохунур вә A нөгтәсиндән кечир. Кәсән илә тохунанын хассәсинә көрә чеврә AC-ни онун K орта нөгтәсиндә, AS тилини исә $SE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ олмаг шәрти илә E нөгтәсиндә кәсир. Һәмин гајда үзрә тапырыг ки, сфера AB тилини F орта, AS тилини исә E нөгтәсиндә кәсир. Сферанын радиусуну A, K, F вә E нөгтәләринин көмәји илә тапырыг. Сфера A, K вә F нөгтәләриндән кечир, AKF мүстәвиси илә сферанын кәсији, AKF үчбучағынын харичинә чәкилмиш чеврә олачагдыр. Демәли, сферанын мәркәзи, AKF

мүстәвисинә һәмин чеврәнин мәркәзиндән чәкилән перпендикулјарын үзәриндә олур. Бу чеврәнин N мәркәзи, ABC үчбучағынын AD медианы үзәринә дүшәчәкдир, бурадан $AN = \frac{2}{3}\cdot\frac{AD}{2} = \frac{1}{3}AD$. Беләликлә, сферанын мәркәзи, үзәриндә пирамиданын SQ һүндүрлүјү олдуғу ASD мүстәвиси үзәринә дүшүр. $AQ = \frac{2}{3}AD$ олдуғундан $AN = NQ$. Демәли, сферанын мәркәзи ASQ үчбучағынын RN орта хәтти үзәринә дүшүр.

Демәли, күрәнин мәркәзи, ASQ мүстәвиси үзәриндә олан ASQ үчбучағын орта хәтти илә AE парчасынын ортасындан чәкилән перпендикулјарын кәсишмә нөгтәси үзәриндә олачагдыр. AO—сферанын радиусудур.

$$AO = \sqrt{AP^2 + PO^2},\quad AP = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AS - ES) = \frac{3\sqrt{2}}{8}a.$$

PO-ну тә'јин едәк. △ RPO ∽ △ RAN олдуғундан

$$PO = RP\cdot\frac{AN}{RN},\quad RP = AR - AP = \frac{a\sqrt{2}}{8},$$

$$AN = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{6}a\sqrt{3},\quad RN = \frac{1}{2}SQ = \frac{a\sqrt{15}}{6},$$

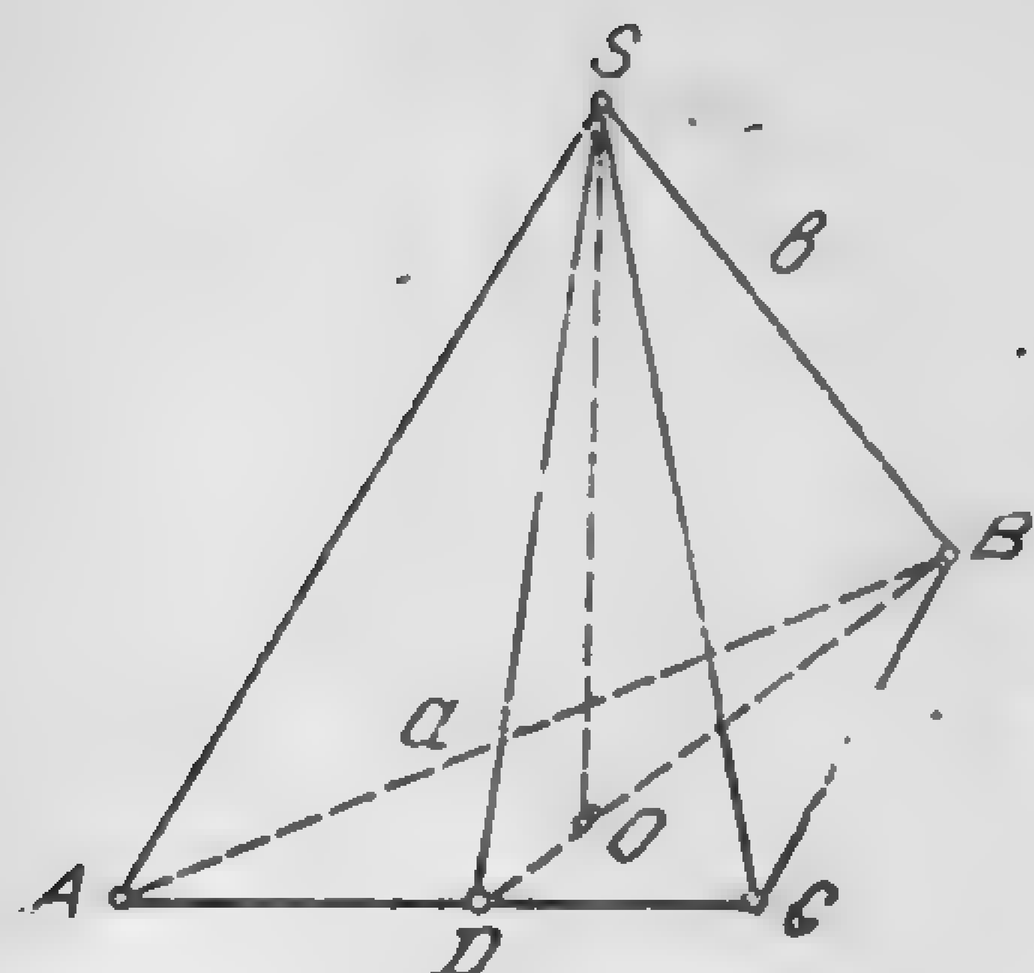
$$PO = \frac{a\sqrt{10}}{40}.$$

Вурадан

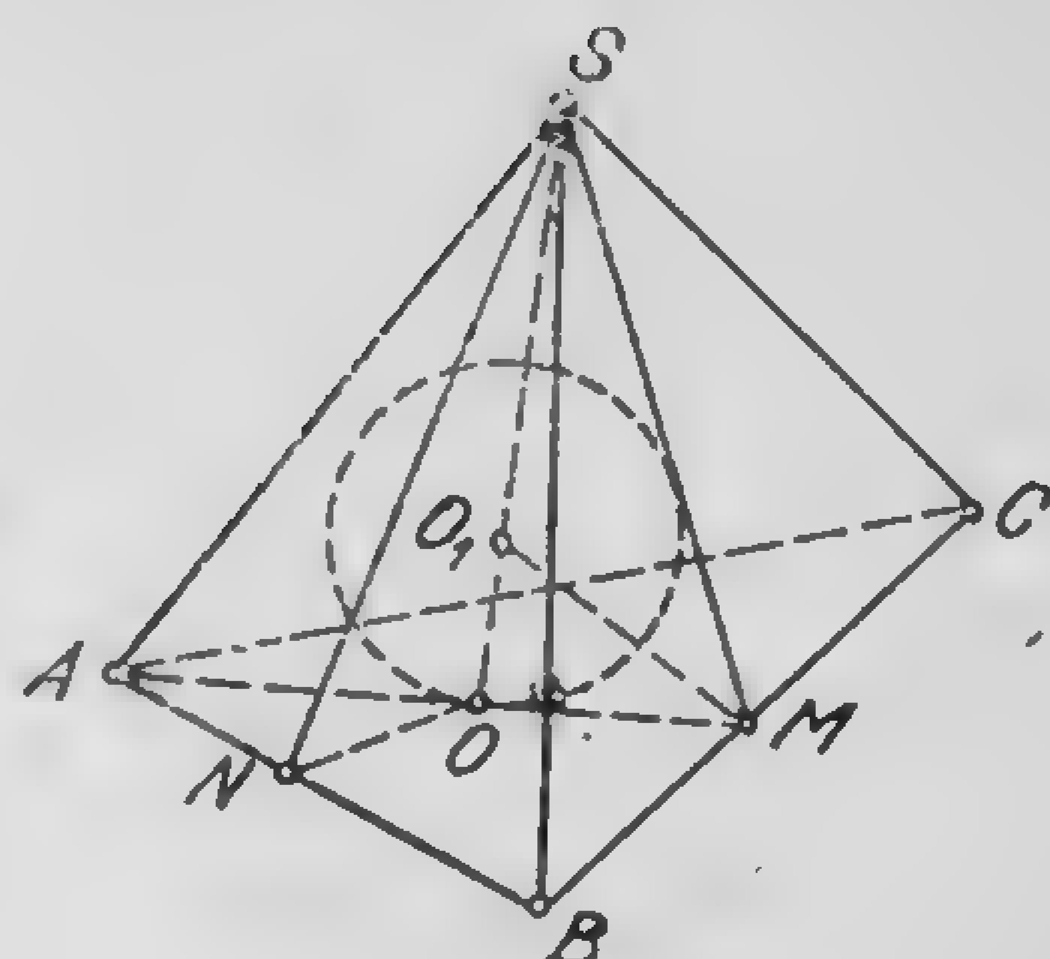
$$R = \frac{a\sqrt{115}}{20}.$$

218. Пирамида дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусуну $r = \frac{3V}{S}$ дүстуруна көрә тапачајыг. BSC вә BAS дүзбучаглы үчбучагларын һипотенузлары бәрабәр, катетләри ортаг олдуғундан бәрабәрдир (шәкил 202). Демәли, ASC дүзбучаглы үчбучаг бәрабәрјанлыдыр. $AS = SC = \sqrt{a^2 - b^2}$. Беләликлә,

$$V = \frac{1}{3}BS\cdot S_{ASC} = \frac{1}{3}b\cdot\frac{(a^2 - b^2)}{2}.$$



Шәкил 202



Шәкил 203

$\triangle ASC$-дән: $AD = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Демәли, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - b^4}$.

$$S_{ASC} = \frac{a^2 - b^2}{2},\ 2S_{SBC} = 2 \cdot \frac{2b\sqrt{a^2 - b^2}}{2} = b\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Алынмыш гиjмәтләри дүстурда нәзәрә алсаг:

$$r = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} + 2b}.$$

219. $\angle SMO = \varphi$, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$. Фәрз едәк ки, $OO_1 = R$ (шәкил 203). $AM \perp BC$ чәкәк. $OM = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, $SO = OM \operatorname{tg}\varphi = R\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. $ON \perp AB$ чәкәк, бурадан

$$ON = OM,\ AO = \frac{ON}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$AM = AO + OM = \frac{R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} =$$

$$= 2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot BM = AM\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Беләликлә,

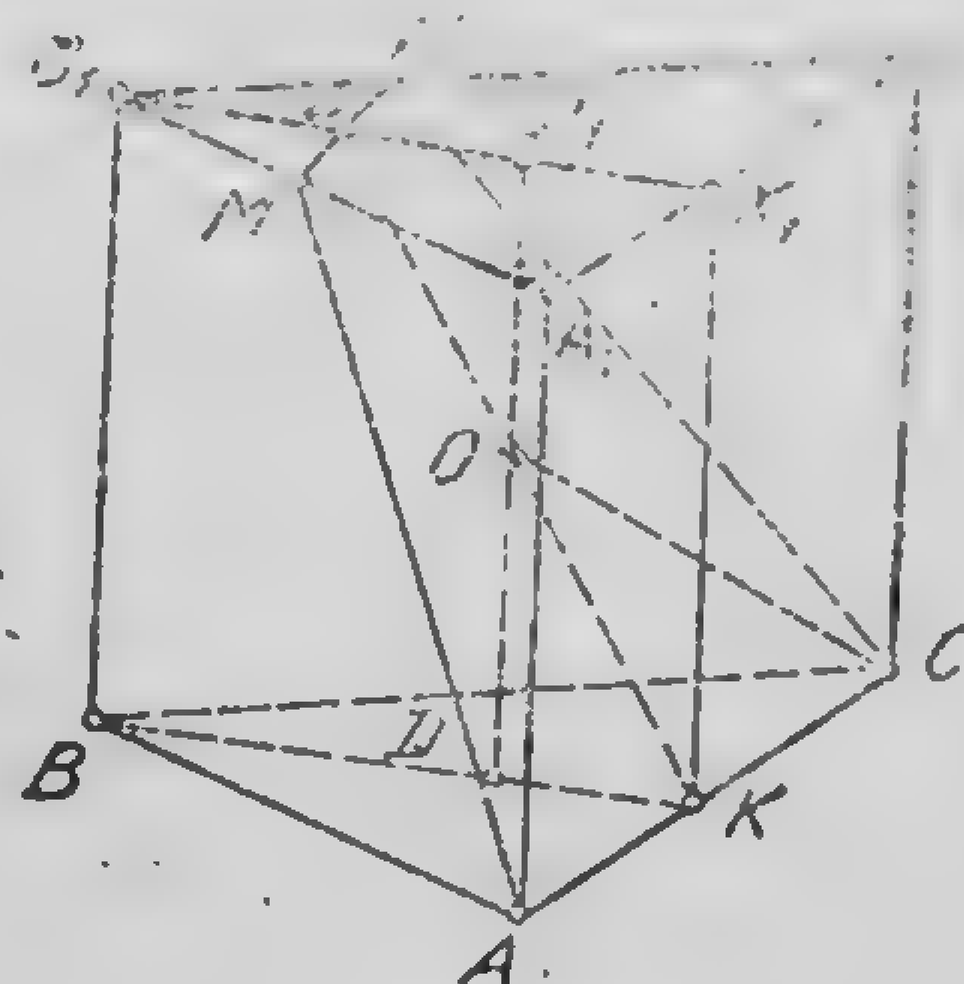
$$V_п = \frac{1}{3} \cdot AM \cdot BM \cdot SO = \frac{8}{3} R^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\varphi.$$

Күрәнин һәчми: $V_к = \frac{4}{3}\pi R^3$, $R^3 = \frac{3V}{4\pi}$, бурадан

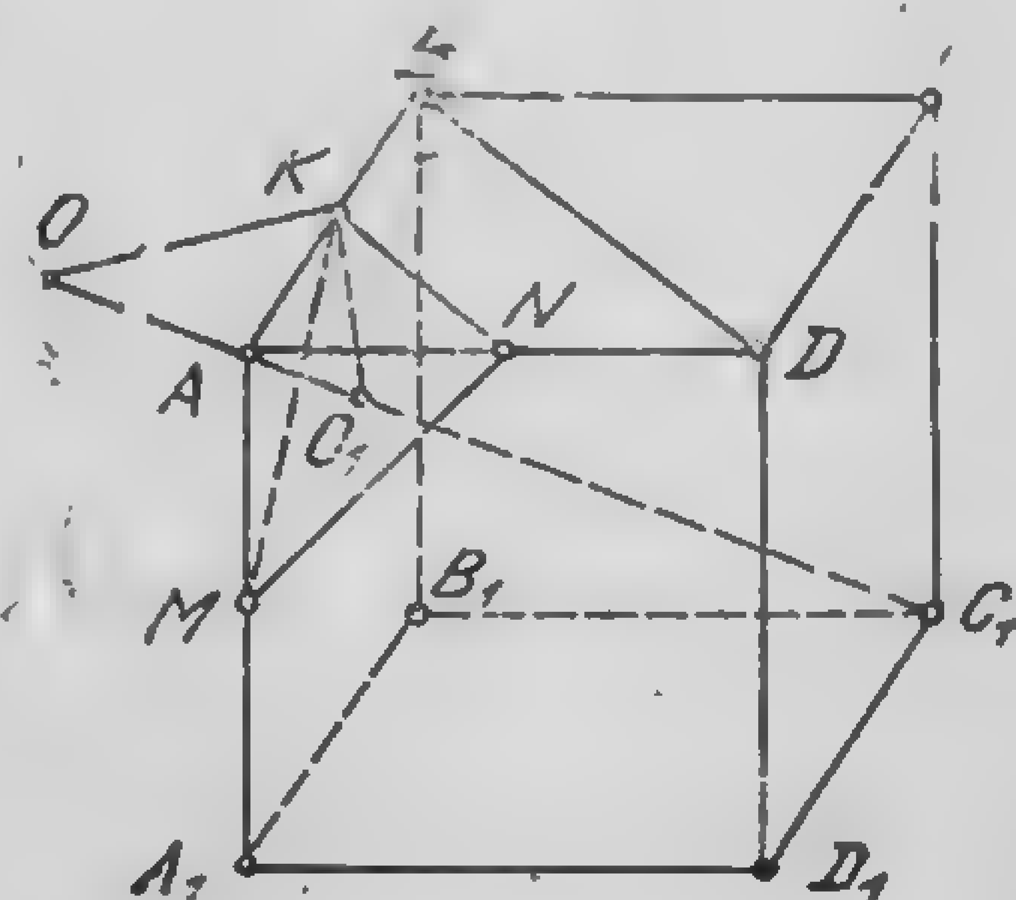
$$V_п = \frac{2V}{\pi}\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\varphi.$$

220. *Чаваб:* $S = \frac{2}{3}a\sqrt{4R^2 - a^2}$.

Көстәриш: 204-чү шәкилдән истифадә един.



Шәкил 204



Шәкил 205

221. Исбат едәк ки, AC_1 диагоналы (шәкил 205) MNK мүстәвисинә перпендикулјардыр вә MNK үчбучағын мәркәзиндән кечир; үч перпендикулјар теореминә көрә $AC_1 \perp BD$. Демәли, $AC_1 \perp KN$. Аналожи олараг $AC_1 \perp MN$ олдуғуну исбат етмәк олур. Демәли, $AC_1 \perp MNK$. $\triangle AKN = \triangle AMN = \triangle AMK$ олдуғундан $KN = MN = MK$.

Беләликлә, KMN бәрабәртәрәфли үчбучагдыр.

Демәли AC_1 диагоналы KMN дүзкүн үчбучағын мәркәзиндән кечир. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, күрәнин O мәркәзи AC_1 диагоналынын узанмасы үзәриндә јерләшир. AK парчасы OKO_1 үчбучағынын тәнбөләнидир. Беләликлә

$$\frac{OK}{KO_1} = \frac{AO}{AO_1} \qquad (1)$$

$OK = R$ гәбул едәк.

Галан парчаларын гијмәтини тапаг:

$$KO_1 = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}},\ AO_1 = \sqrt{AK^2 - KO_1^2} = \frac{a}{\sqrt{12}},$$

$$AO = OO_1 - AO_1 = \sqrt{OK^2 - KO_1^2} - AO_1 =$$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{6}} - \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Алдығымыз ифадәләри (1)-дә нәзәрә алсаг,

$$6R^2 - 2\sqrt{6}aR - 3a^2 = 0.$$

Бурадан $R = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$

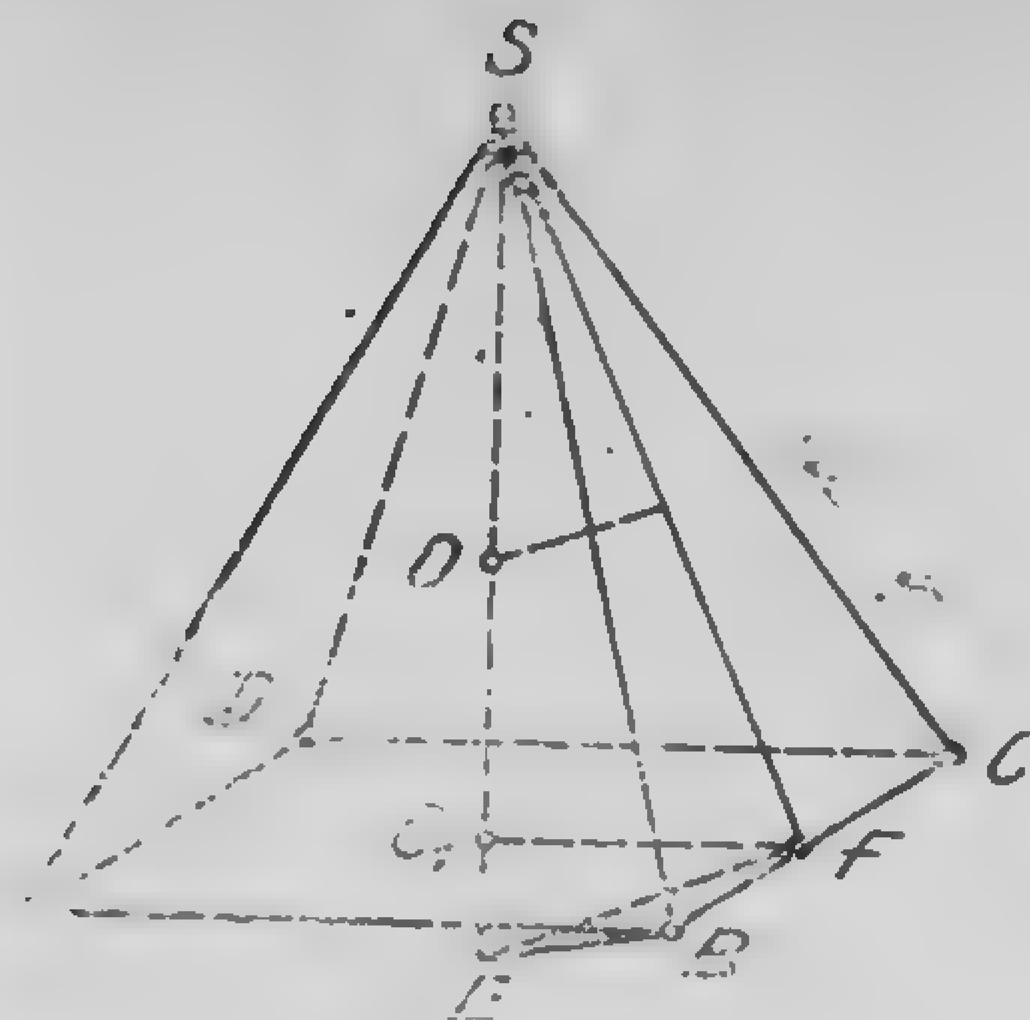
222. Тутаг ки, пирамиданын отурачағынын тәрәфи a, күрәнин радиусу R, пирамиданын һүндүрлүјү исә h олсун. Күрәнин һәчми: $\frac{4}{3}\pi R^3$, бурадан $R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

SE парчасы (шәкил 206) күрәнин диаметридир.

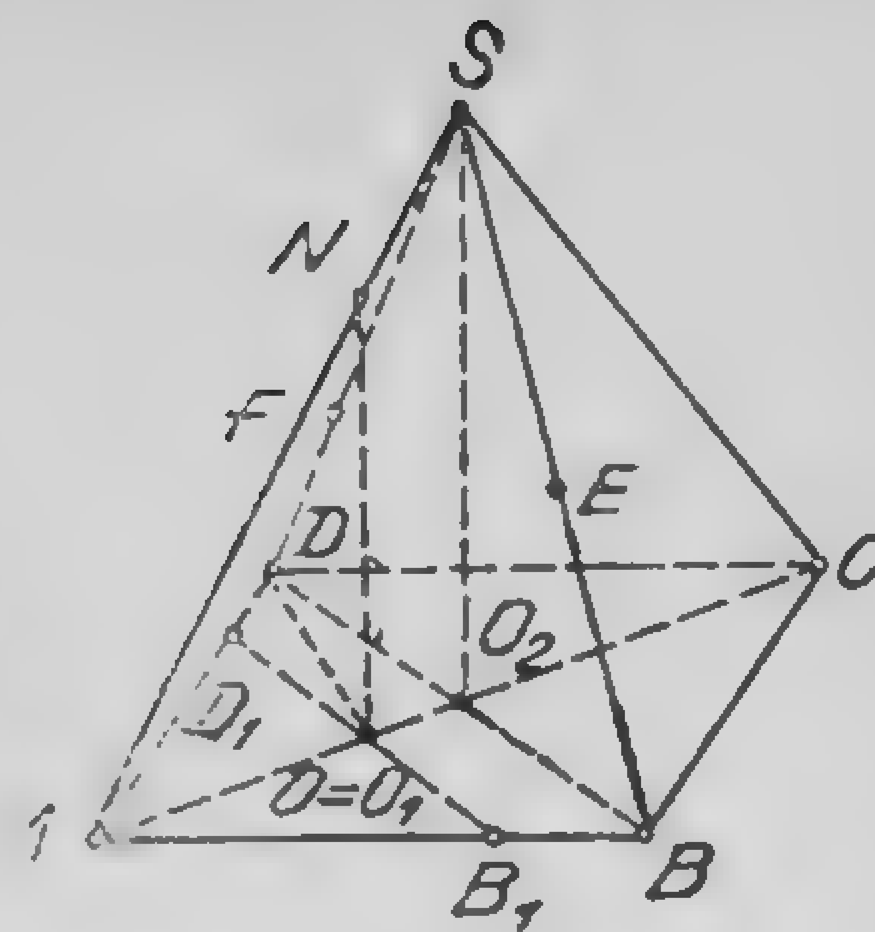
SEB-дән

$$O_1B^2 = h(2R - h). \qquad (1)$$

$$a = O_1B\sqrt{2}, \quad O_1B = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Шәкил 206



Шәкил 207

Бу бәрабәрлији (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$\frac{a^2}{2} = (2R - h)h. \qquad (2)$$

$\triangle SO_1F$-дән:

$$\frac{a}{2} = h \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (3)$$

(2) вә (3)-дән

$$h = \frac{2}{2\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} \cdot R = \frac{2}{2\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} \cdot \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} \cdot \left(\frac{6V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

223. *Чаваб;* $V = \frac{5\sqrt{2}}{96}a^3.$

Көстәриш. 207-чи шәкилдән истифадә един.

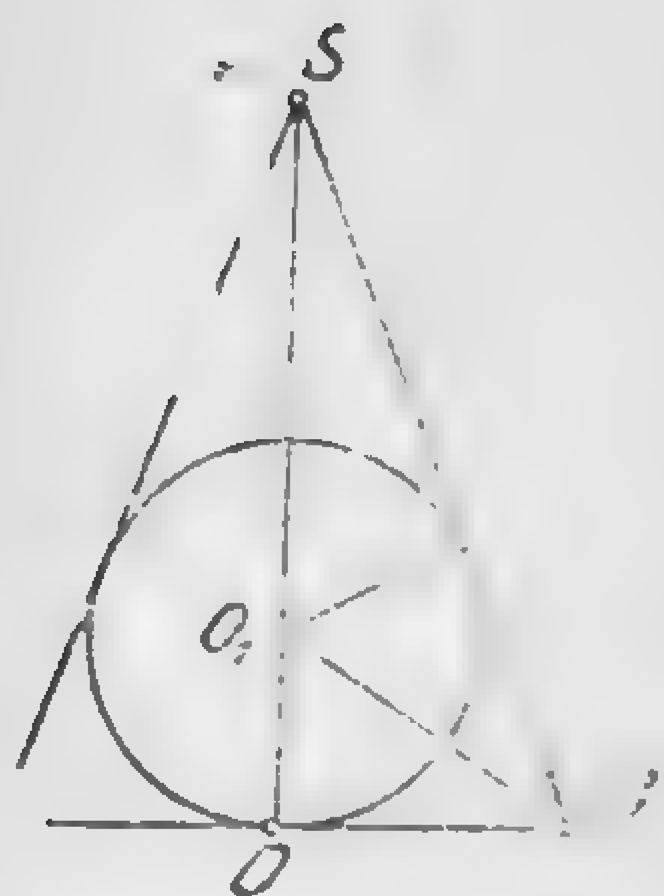
224. Фәрз едәк ки, $OO_1 = R$ вә $\angle SBO = \alpha$ (шәкил 208). Онда

$$OB = R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ SB = \frac{R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},\ S_к = 4\pi R^2.$$

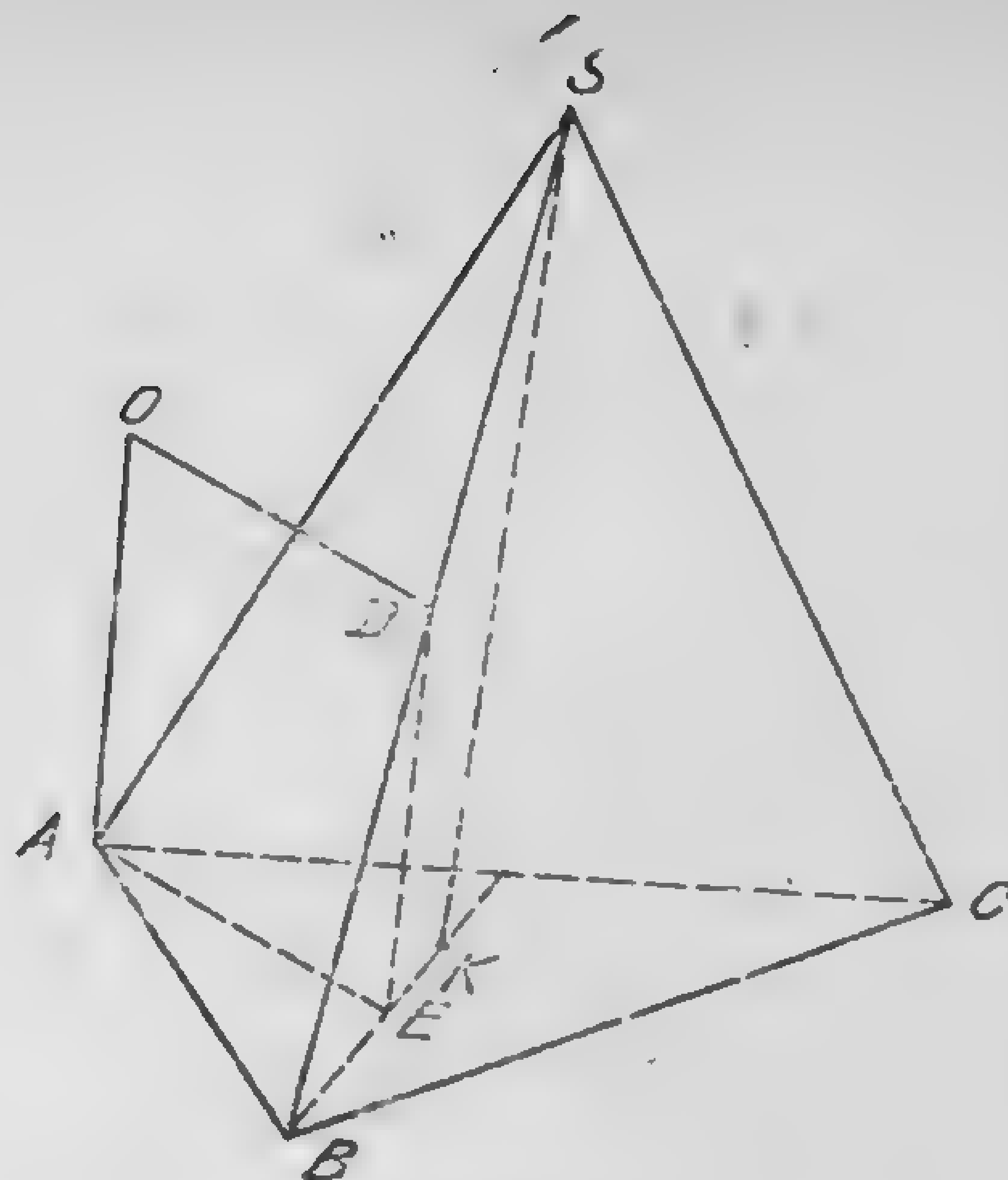
$$S_т = \pi R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\right) = 2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Мәсәләнин шәртинә көрә јаза биләрик:

$$\frac{2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi R^2\cos\alpha} = m.$$



Шәкил 208



Шәкил 209

Бу тәнликдән алырыг: $\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2m}=0$. Бурадан $\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}$. $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ ол малыдыр. $m=2$ олдугда $\alpha=2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2\,\mathrm{arctg}\,0{,}7071=70°32'$,

$m>2$ олдугда $\alpha_{1,2}=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$.

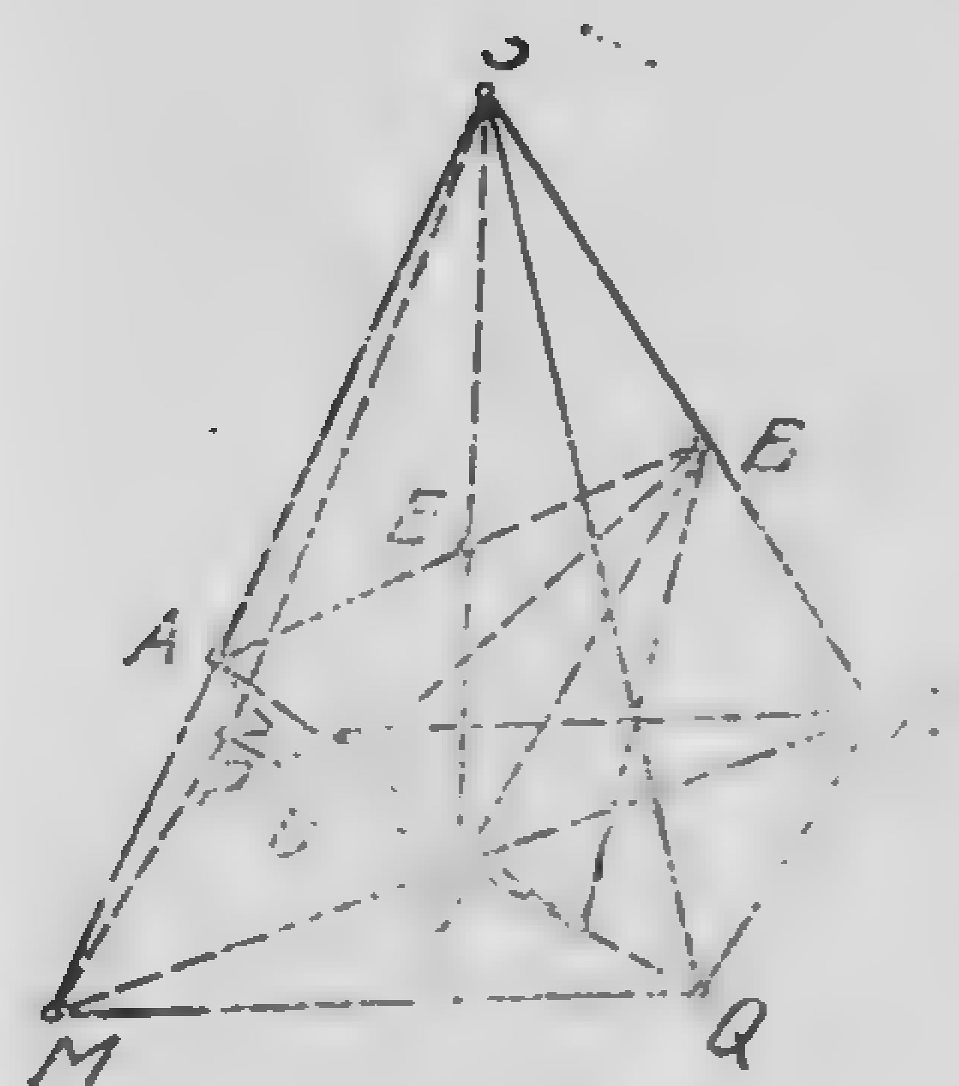
225. *Чаваб:* $r=\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}}$.

Көстәриш. 209-чу шәкилдән истифадә един.

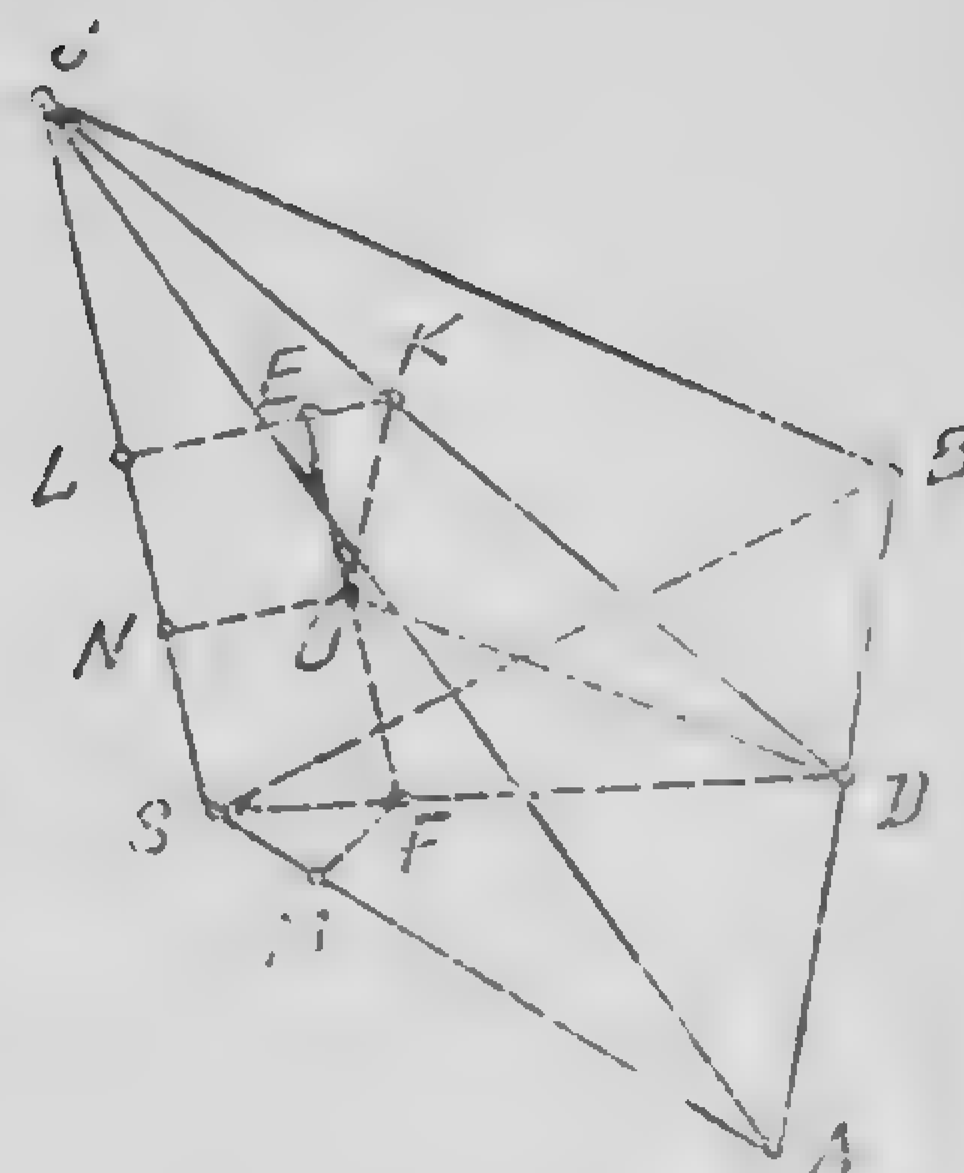
226. Фәрз едәк ки, $AB=QN=a$ (шәкил 210). Пирамиданын SO һүндүрлүјүнү тапаг.

$$BE=\frac{a}{2},\quad BO=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad ON=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$\triangle BOE$-дән: $OE=\sqrt{BO^2-BE^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.



Шәкил 210



Шәкил 211

$\triangle SON \sim \triangle SBE$ олдуғундан

$$\frac{SO}{SE}=\frac{ON}{BE} \text{ вә ја } \frac{SO}{SO-\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{a}{\sqrt{2}}:\frac{a}{2},$$

бурадан $SO=a(\sqrt{2}+1)$.

Инди дә пирамида вә тетраедрин һәчмини тапаг:

$$V_{\text{п}}=\frac{1}{3}a^3(\sqrt{2}+1),\quad V_{\text{т}}=\frac{a^3}{6\sqrt{2}}.$$

Һәчмләрин нисбәти:

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{т}}}=2(2+\sqrt{2}).$$

227. Мәсәләнин шәртиндән алырыг ки, SCD—бәрабәрјанлы дүзбучаглы үчбучагдыр, $SD=AD=R$, $SCD-SC$ тилиндәки икиүзлү бучағын биссектрисасыдыр, тәпәси C олан үчүзлү бучағын дахилинә чәкилмиш сферанын O мәркәзи SCD мүстәвисинин үзәринә дүшәчәкдир. $OK\perp CD$, $OF\perp SD$, $FM\perp AS$, $KL\perp SC$ (шәкил 211). $OK=FM=x$ илә ишарә едәк. Онда алырыг:

$$EK=\frac{1}{\sqrt{2}}OK=\frac{x}{\sqrt{2}},\quad LK=EL+EK=\frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

$$CK = LK\sqrt{2} = 3x,\quad CD = SD\sqrt{2} = R\sqrt{2}.$$

Ашкардыр ки, $DK = CD - CK = R\sqrt{2} - 3x$; $OD = R \pm x$. Ишарә плјус олдугда, сфералар харичдән, мәнфи олдугда исә дахилдән тохунур.

$\triangle KOD$-дән:

$$OD^2 = OK^2 + KD^2,\quad (R \pm x)^2 = x^2 + \left(R\sqrt{2} - 3x\right)^2.$$

Бу тәнликдән: $x = \frac{R}{9}\left(3\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{10 + 6\sqrt{2}}\right)$ вә

$$x = \frac{R}{9}\left(3\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}\right).$$

228. Фәрз едәк ки, $CM \perp AB$, $MN \perp CD$ (шәкил 212), K нөгтәси ABC үчбучагынын харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзидир, $KO \triangle CM$. Ашкардыр ки, O нөгтәси пирамида харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзи олачагдыр. OC парчасы һәмин күрәнин радиусу олачагдыр.

$$DM = CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{65};$$

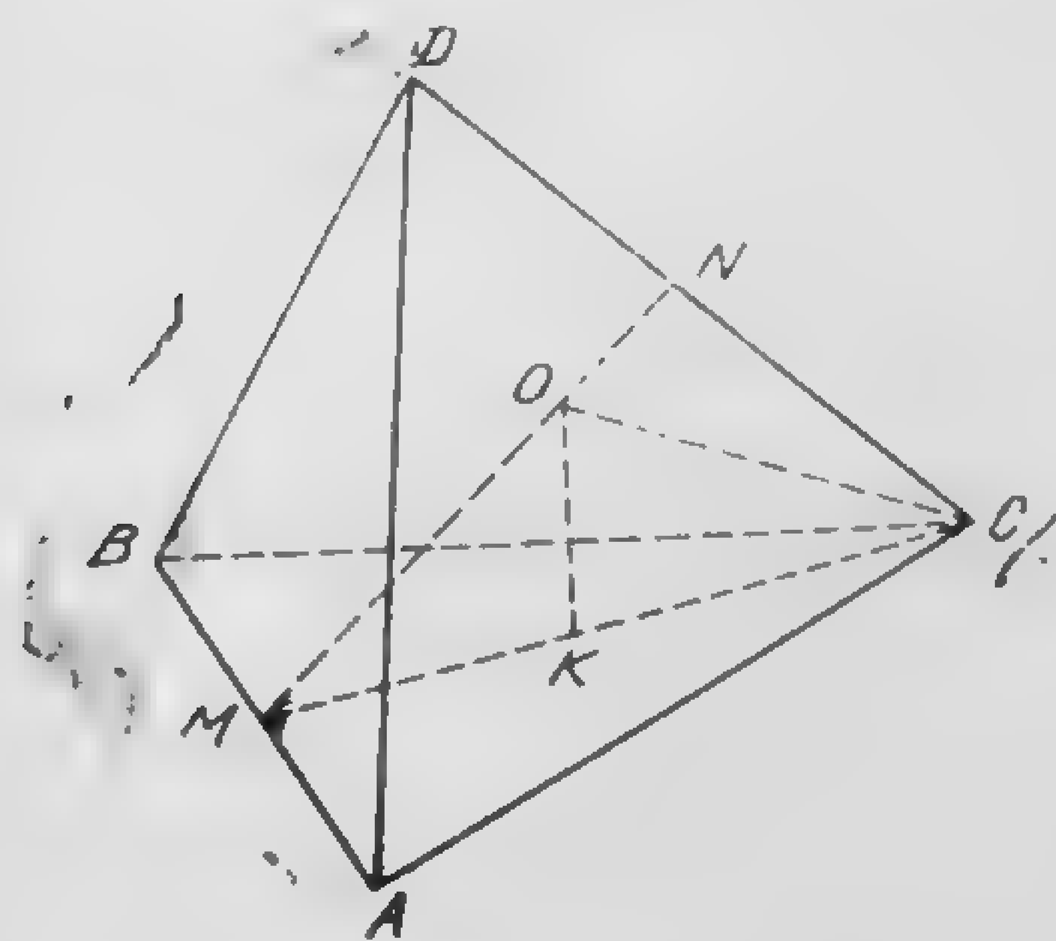
$$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = 7.$$

$R = \frac{abc}{4S}$ дүстуруна көрә

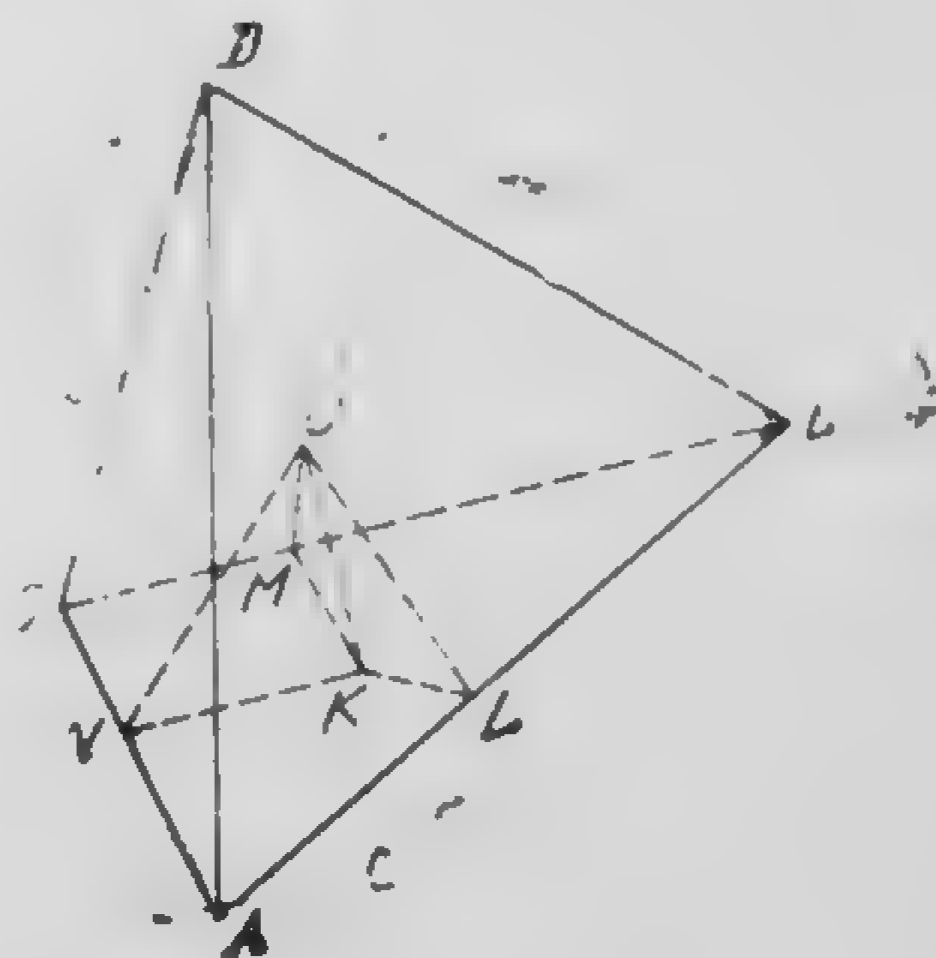
$$KC = \frac{37}{\sqrt{65}};\quad MK = CM - KC = \frac{28}{\sqrt{65}}.$$

$\triangle MOK \sim \triangle MCN$ олдуғундан:

$$OK = \frac{CN \cdot MK}{MN} = \frac{16}{\sqrt{65}},\quad OC = \sqrt{OK^2 + KC^2} = 5.$$



Шәкил 212



Шәкил 213

229. Фәрз едәк ки, O верилән $ABCD$ пирамидасынын (шәкил 213) дахилинә чәкилмиш күрәнин мәркәзи, $OK = r$ онун радиусу, AB парчасы ABC үчбучағынын һипотенузу, $OL \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$.

Дахилә чәкилмиш күрәнин мәркәзи, икиүзлү бучагларын биссектор мүстәвиләрин кәскинләшмәсиндән алынан хәтләрин кәсишмә нөгтәсиндә олачагдыр.

$$\angle OMK = \frac{\alpha}{2},\quad \angle ONK = \frac{\beta}{2},\quad \angle OLK = \frac{\gamma}{2}.$$

Беләликлә,

$$KM = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2},\quad KN = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2},\quad KL = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}.$$

ABC үчбучағын саһәси:

$$\frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{2}(BC \cdot KM + AC \cdot KN + AB \cdot KL) =$$

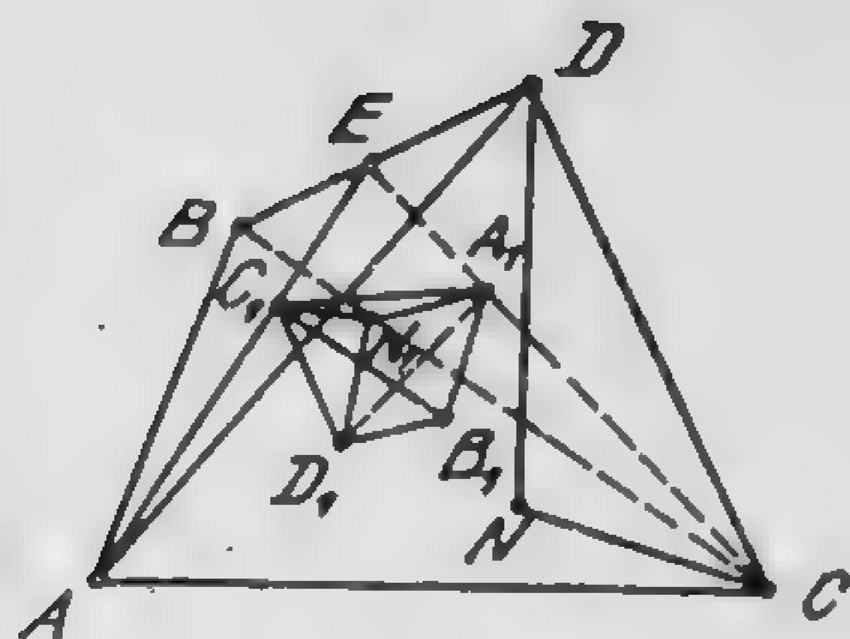
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}lr\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}lr\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2} + lr\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}\right),$$

бурадан

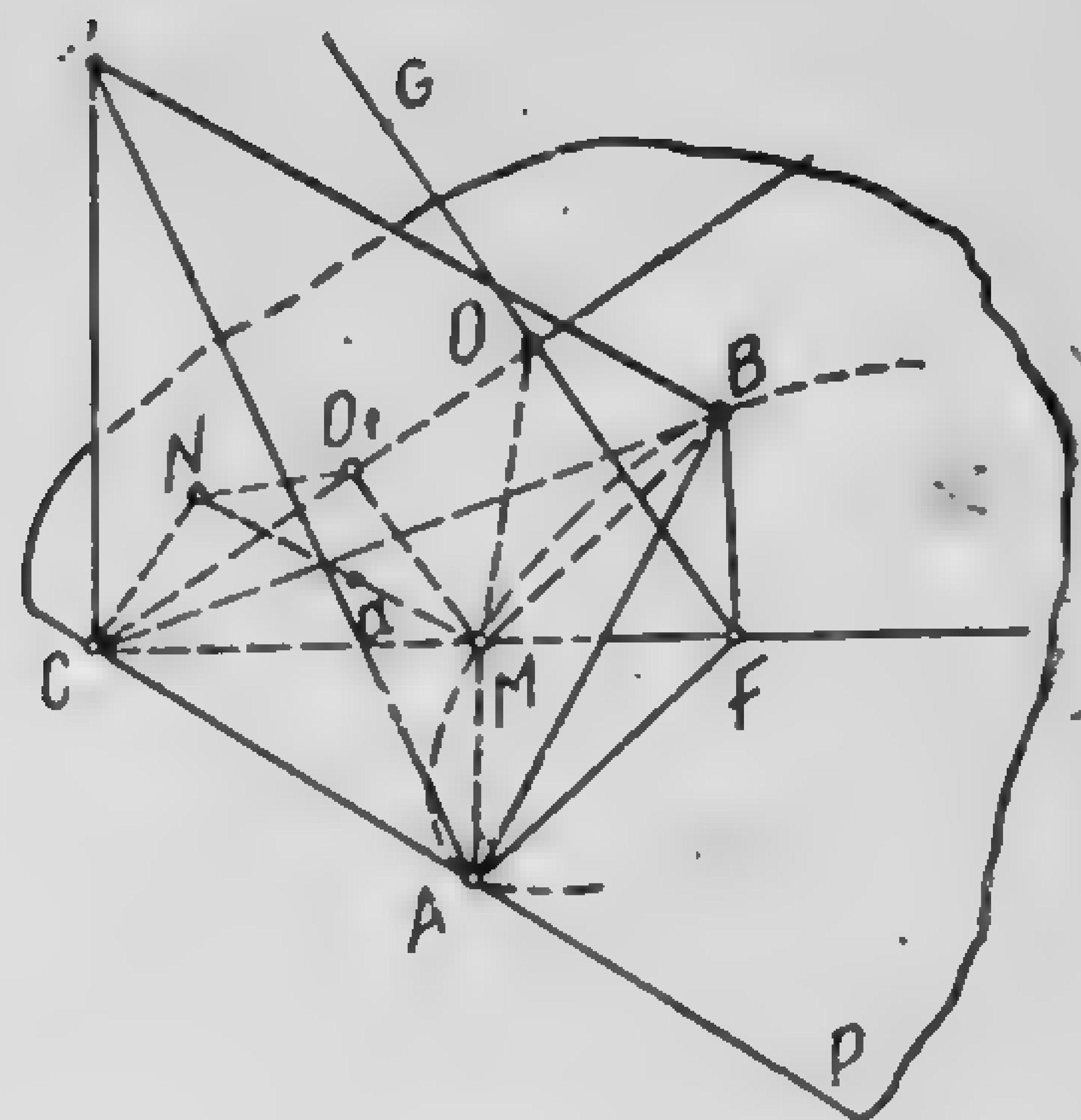
$$r = \frac{l}{2\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2} + \sqrt{2}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}\right)}.$$

230. AEC вә C_1EA_1 үчбучаглары (шәкил 214) охшардыр, чүнки, AE вә CE медианлары C_1 вә A_1 нөгтәләриндә ејни $2:1$ нисбәтиндә бөлүнүр. Она көрә $C_1A_1 = \frac{1}{3}AC$. Аналожи олараг исбат етмәк олар ки, $B_1A_1 = \frac{1}{3}AB$ вә $C_1B_1 = \frac{1}{3}BC$. Бурадан пирамиданын отурачагларынын саһәләри нисбәти: $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{9}$. ABC вә $A_1B_1C_1$ охшар үчбучаглары паралел мүстәвиләр үзәриндәдир (тәрәфләри паралел олдуғу үчүн). Беләликлә, DN вә D_1N_1 һүндүрлүкләри паралел DNC вә $D_1N_1C_1$ дүзбучаглы үчбучаглар охшардыр. Она көрә $D_1N_1 = \frac{1}{3}DN$. Һәчмләрин нисбәти:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{S_1 \cdot D_1N_1}{S \cdot D \cdot N} = \frac{1}{27}.$$



Шәкил 214



Шәкил 215

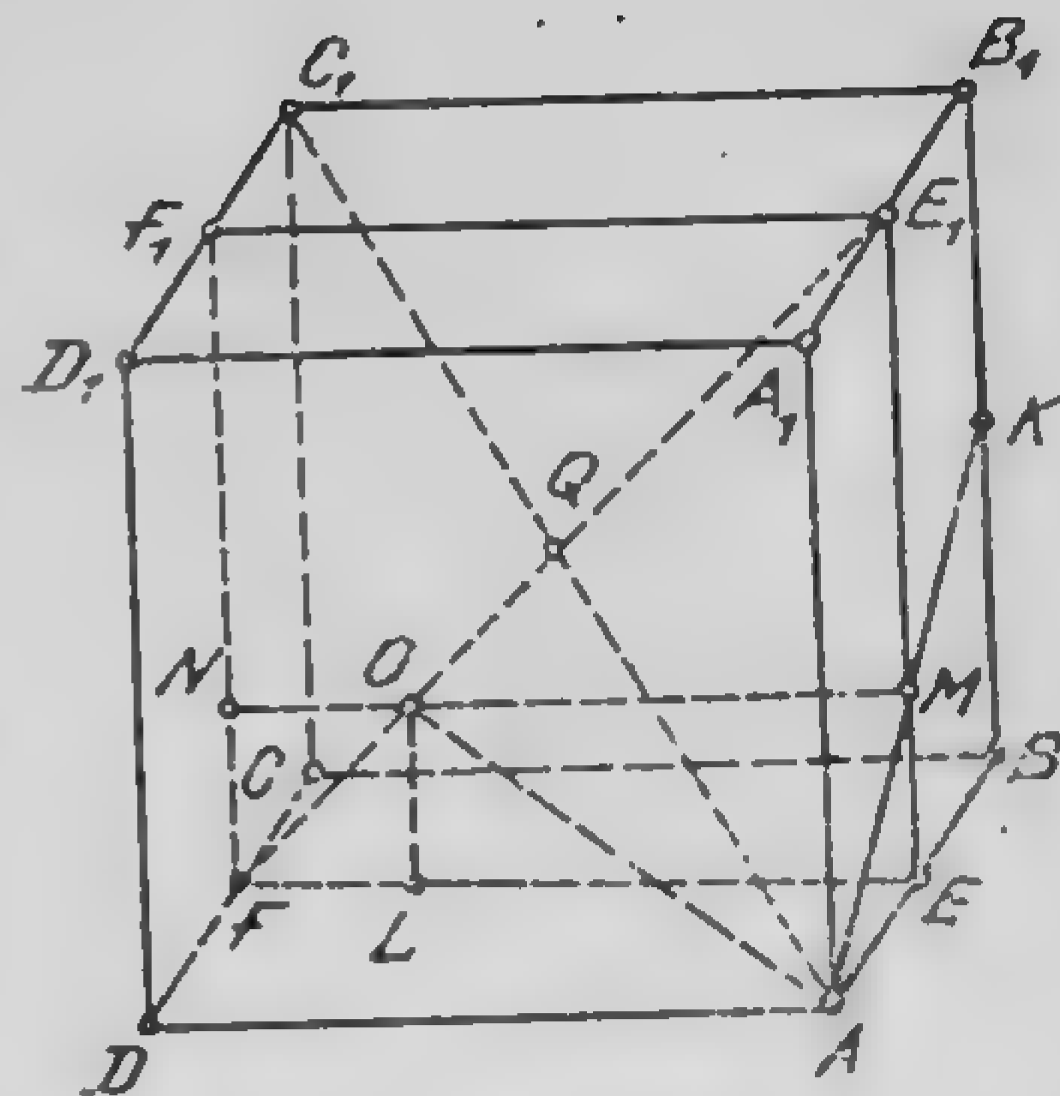
231. 1) Сферанын мәркәзини гураг. ABC вә ACD үзләринин (шәкил 215) мәркәзләрини уjғун олараг M вә N илә ишарә едәк.

Фәрз едәк ки, F нөгтәси A, B, M нөгтәләринин харичинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзи, FG дүз хәтти исә AMB мүстәвисинә перпендикулjардыр, FG—A, M, B нөгтәләриндән еjни узаглыгда олан нөгтәләрдир. MN парчасынын Q орта нөгтәсиндән она перпендикулjар олан P мүстәвисини кечирәк. P мүстәвиси, M вә N нөгтәләриндән еjни узаглыгда олан нөгтәләр чохлуғудур. P мүстәвиси илә FG дүз хәттинин O кәсишмә нөгтәси A, M, B вә N нөгтәләриндән еjни узаглыгдадыр. Демәли, O сферанын мәркәзидир. CO—дүз хәтти тетраедрин O_1 мәркәзиндән кечдиjини исбат едәк. Доғрудан да C, O_1 вә O нөгтәләри P мүстәвиси үзәриндәдир (бунларын һәр бири M вә N-дән еjни узаглыгдадыр) вә OFC мүстәвиси үзәриндәдир (бу нөгтәләр A вә B-дән бәрабәр узаглыгдадыр). Демәли, C, O_1 вә O нөгтәләри P вә OFC мүстәвиләринин кәсишмә хәтти үзәринә дүшүр. OM парчасы ахтарылан радиус олачагдыр. OFC үчбучағыны нәзәрдән кечирәк. $\angle AMF = 60°$. Онда $FM=FA=AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $MC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Де-

мәли, O_1M парчасы OFC үчбучағынын орта хәттидир. Она көрә $OF=2O_1M$. O_1M парчасы тетраедрин дахилинә чәкилмиш күрәнин радиусудур. O_1M радиусуну тапаг: $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Бурадан $OF=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Беләликлә,

$$OM=\sqrt{OF^2+O\ldots}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Шәкил 216

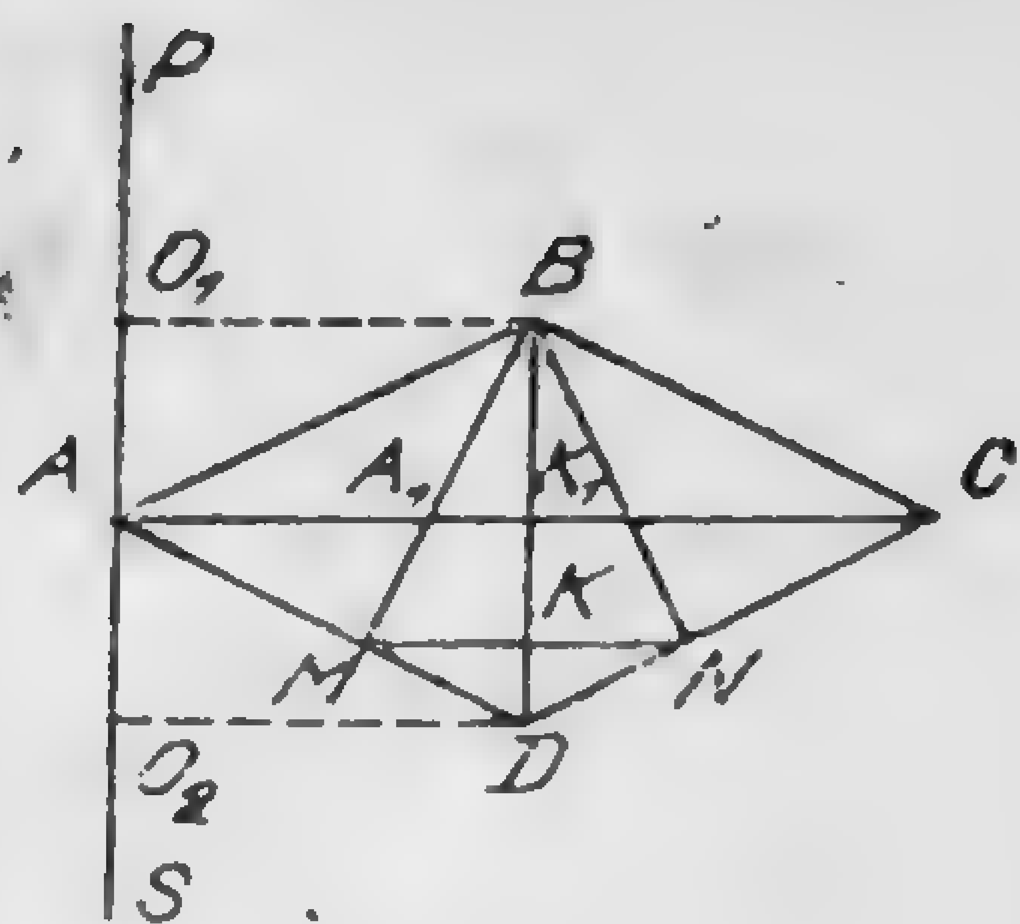
2) Сфера A нөгтәсиндән BB_1 тилинин ортасындан кечдиjиндән сферанын мәркәзи, AK парчасынын M орта нөгтәсиндән она перпендикулjар чәкилмиш дүз хәтт үзәриндә олур, лакин, $EF \perp (ABB_1)$ олдуғундан $MN \parallel EF$ олдугда $MN \perp AK$. (шәкил 216). Демәли, сферанын O мәркәзи MN илә E_1F дүз хәтләрин кәсишмә нөгтәсидир. Бурадан ахтарылан радиус: OA. $ME=\frac{1}{2}BK=\frac{1}{4}a$, $OL \perp EF$ чәкәк.

$$NO=NF=ME=\frac{1}{4}a.\ LE=EF-FL=a-\frac{a}{4}=\frac{3}{4}a$$

$$\triangle AEL\text{-дән:}\quad AL=\sqrt{EL^2+AE^2}=\frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$\triangle AOL\text{-дән:}\quad AO=\sqrt{AL^2+OL^2}=\frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

232. $ABCD$ ромбдур, $BM \perp AD$, $BN \perp CD$, $MN=d$, $\angle MBN=\alpha$, $PS \perp AC$ (шәкил 217). MBD вә BDN дүзбучаглы үчбучагларында $\angle MDB=\angle NDB$ (ромбун диагоналларынын хассәсинә көрә) вә BD ортаг тәрәф олдуғундан $\triangle MBD=\triangle BDN_1$. Бурадан $MB=BN$, $MD=DN$. Демәли, ADC вә MDN үчбучаглары бәрабәрjанлы, ADC бучағы ортаг олдуғундан $MN \parallel AC$. $BD \perp AC$, $MN \parallel AC$ олдуғу үчүн $BD \perp MN$ олур. MBN үчбучағы бәрабәрjанлы вә $BD \perp MN$ олдуғундан



Шәкил 217

$\angle MBD = \angle DBN$ олачагдыр. AA_1M вә A_1BK_1 дүзбучаглы үчбучагларында $\angle AA_1M = \angle BA_1K_1$ олдуғундан $\angle MAA_1 = \angle A_1BK_1 = \frac{\alpha}{2}$.

Фырланма чисмин һәчми, ики бәрабәр кәсик конусларын чәми илә ики бәрабәр там конусларын чәми фәргинә бәрабәрдир:

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}BD\left(AC^2 + AC\cdot\frac{AC}{2} + \frac{AC^2}{4}\right) - 2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}BD\cdot\frac{AC^2}{4} = \frac{\pi\cdot BD}{3}\cdot\frac{7AC^2}{4} - \frac{\pi BD}{3}\cdot\frac{AC^2}{4} = \frac{1}{2}\pi BD\cdot AC^2,$$

бурадан

$$V = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot BD\cdot AC^2. \qquad (1)$$

MBN үчбучағында $\angle MBN = \alpha$, $MN = d$,

$$\angle BMN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{MN}{\sin\alpha} = \frac{BN}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$BN = \frac{MN\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{d\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

MBD үчбучағында:

$$\angle MBD = \frac{\alpha}{2}, \quad BM = BN = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$BD = \frac{BM}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin\alpha}.$$

ADK дүзбучаглы үчбучағында:

$$\angle DAK_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad DK_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{\sin\alpha},$$

$$AK_1 = \frac{1}{2}AC, \quad AK_1 = DK_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$AK_1 = \frac{1}{2}BD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2\sin\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

$$AC = 2AK_1 = 2\cdot\frac{d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha} = \frac{d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.$$

BD вә AC-ни (1) нәзәрә алсаг:

$$V = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{d}{\sin\alpha}\cdot\left(\frac{d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{\pi d^3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^3\alpha}.$$

233. $MN \parallel BC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = \beta$ (шәкил 218), $S_{ABC} = S$; $AK \perp BC$ чәкәк. Һәчм һаггында олан леммаја әсасән ABC-дән: MN оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми:

$$V_ф = S_{BC}\cdot\frac{1}{3}AK.$$

BC-нин әмәлә кәтирдији сәтһ силиндрин јан сәтһи олачагдыр. Демәли,

$$S_{BC} = 2\pi\cdot NC\cdot BC = 2\pi\cdot AK\cdot BC, \quad S_{BCA} = \frac{1}{2}BC\cdot AK.$$

Лакин шәртә көрә $\frac{1}{2}BC\cdot AK = S$, бурадан $BC\cdot AK = 2S$.

Беләликлә, һәчми:

$$V_ф = 2\pi\cdot AK\cdot BC\cdot\frac{1}{3}AK = \frac{2}{3}\pi\cdot 2S \times$$

$$\times AK = \frac{4}{3}\pi\cdot S\cdot AK.$$

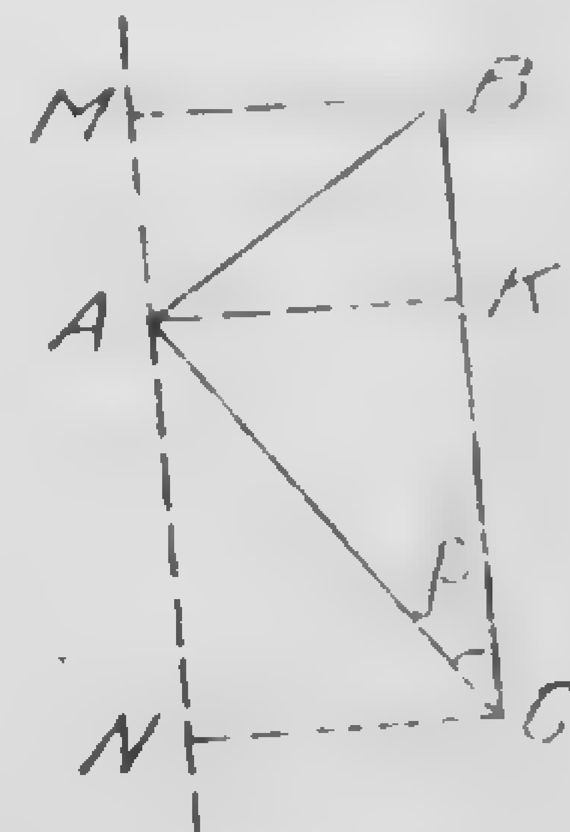
$\triangle ABC$-дән: $AB = AC\cdot\operatorname{tg}\beta$;

$$\frac{1}{2}AC\cdot AB = \frac{1}{2}AC\cdot AC\operatorname{tg}\beta = S;$$

$$AC = \sqrt{2S\operatorname{ctg}\beta}.$$

$\triangle AKC$-дән: $AK = AC\sin\beta =$

$$= \sqrt{2S\operatorname{ctg}\beta}\sin\beta.$$



Шәкил 218

$$V_\phi = \frac{4}{3}\pi S\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\beta}\,\sin\beta = \frac{4}{3}\pi\sqrt{2S^3\,\mathrm{ctg}\,\beta}\cdot\sin\beta.$$

234. ABC дүзбучаглы үчбучаг, $\angle ABC=90°$, $\angle ABN=\angle CBN$, $NB\perp EF$, $BC=a$, $\angle BNC=\alpha$ (шәкил 219).

Ахтарылан һәчм, $ACMD$-нин фырланмасындан алынан һәчм илә BCM вә ABD үчбучагларынын фырланмасындан алынан һәчмләр чәминин фәргинә бәрабәрдир.

$$V_\phi = \frac{1}{3}\pi MD\cdot(MC^2+MC\cdot AD+AD^2) - \left(\frac{1}{3}\pi MC^2\cdot BM+\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot BD\right) \qquad (1)$$

$$\angle DAB = \angle DBN - \angle ABN = 90° - 45° = 45°.$$

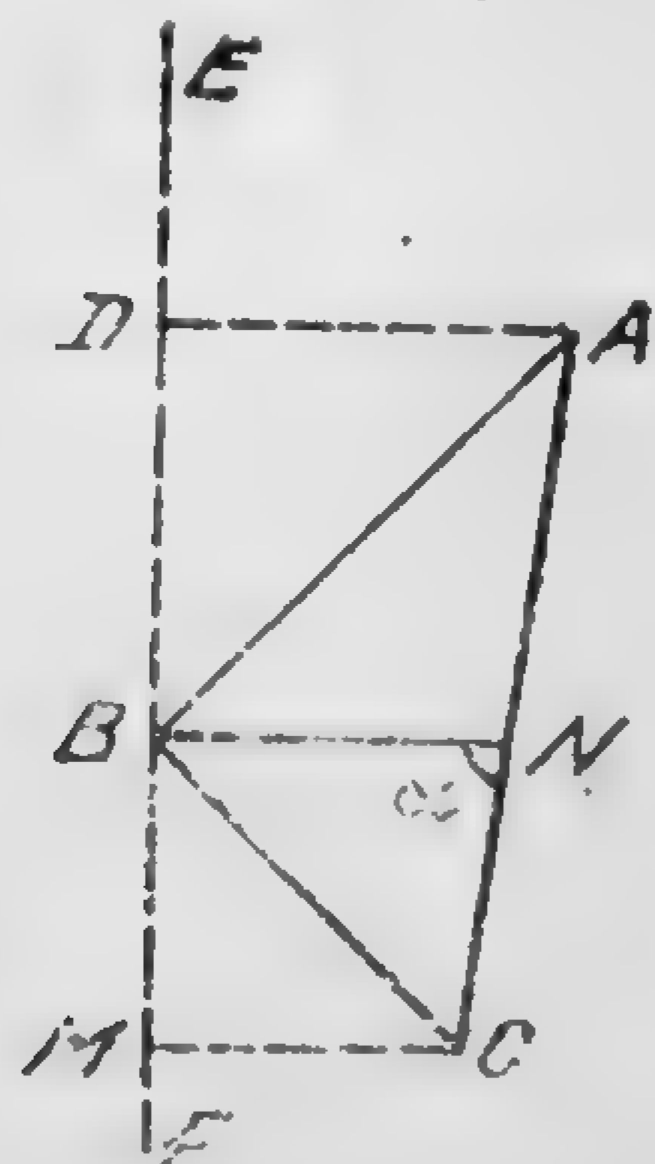
Демәли, ABD дүзбучаглы үчбучаг бәрабәрјанлы дүзбучаглы үчбучагдыр. Она көрә

$$BD = AD \qquad (2)$$

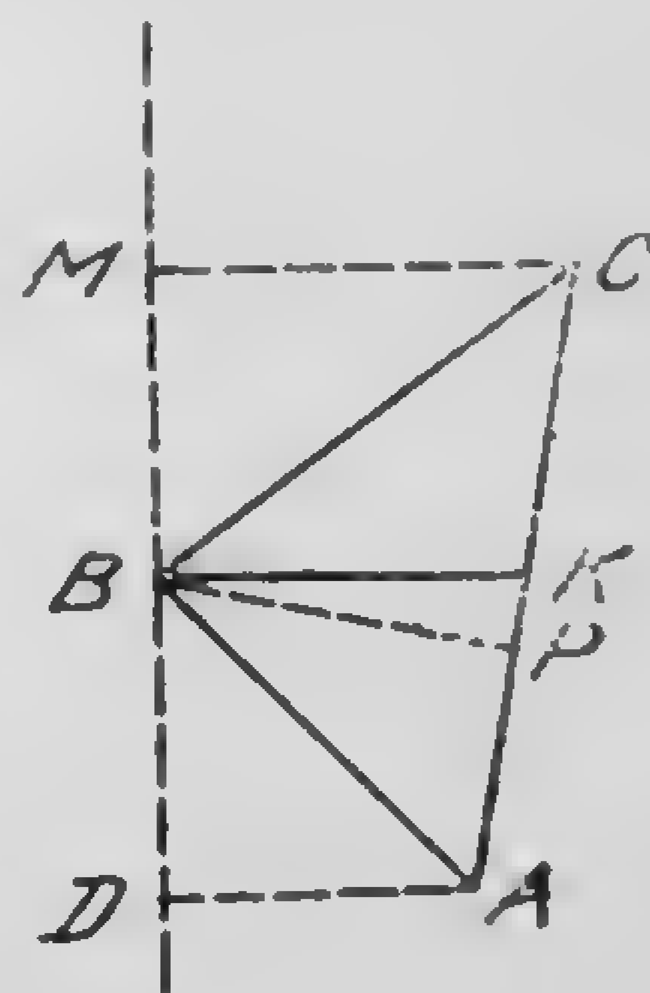
Һәмин гајда үзрә BMC дүзбучаглы үчбучағын бәрабәрјанлы олдуғуну исбат едирик. Бурадан

$$BM = MC \qquad (3)$$

Мә'лумдур ки, $\angle BAN + \angle ABN = \angle BNC$ вә а $\angle BAN + 45° = \alpha$, бурадан $\angle BAN = \alpha - 45°$. (2) вә (3) бәрабәрликләрини (1)-дә нәзәрә алсаг:



Шәкил 219



Шәкил 220

$$V_\phi = \frac{1}{3}\pi(AD+MC)\cdot(MC^2+MC\cdot AD+AD^2) - \left(\frac{\pi}{3}MC^2\cdot MC+\frac{1}{3}\pi AD^2\cdot AD\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(AD+MC)(MC^2+MC\cdot AD+AD^2) - \frac{1}{3}\pi(MC+AD)(MC^2-MC\cdot AD+AD^2) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi(MC+AD\cdot MC\cdot AD).$$

$\triangle BCM$-дән: $MC = BC\sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$\triangle ABC$-дән: $AB = BC\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°) = a\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°)$.

$\triangle ADB$-дән: $AD = AB\sin 45° = \frac{a\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°)}{\sqrt{2}}$,

$$V_\phi = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°)}{\sqrt{2}}\right]\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi a^3\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°)}{3\sqrt{2}}\cdot[1+\mathrm{ctg}(\alpha-45°)] =$$

$$= \frac{\pi a^3\,\mathrm{ctg}(\alpha-45°)}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)} = \frac{\pi a^3\sin\alpha\cos(\alpha-45°)}{3\sin^2(\alpha-45°)}.$$

235. ABC дүзбучаглы үчбучагдыр: $\angle ABC=90°$, KB медианы MD оxуна перпендикулјардыр; $BK=a$; $\angle AKB=\alpha$ (шәкил 220). $BP\perp AC$, $AD\perp MD$, $CM\perp DM$ чәкәк, һәчм һаггында олан леммаја әсасән ABC үчбучағынын DM оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми:

$$V_\phi = S_{AC}\cdot\frac{1}{3}BP = \pi(AD+MC+AC)\cdot\frac{1}{3}BP.$$

Дүзбучаглы үчбучағын һипотенуза чәкилән медианын хассәсинә көрә $BK=\frac{1}{2}AC$ вә ја $AC=2BK$.

Бурадан $AC=2a$ олачагдыр. Трапесијанын орта хәттинин хассәсинә көрә

$$BK = \frac{AD+CM}{2} \text{ вә ја } AD+CM=2BK.$$

$$V_ф = \pi \cdot 2BK \cdot AC \cdot \frac{1}{3} BP.$$

$\triangle KPB$-дән: $BP = BK \sin\alpha = a \sin\alpha$.

$$V_ф = \pi \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{1}{3} a \sin\alpha = \frac{4}{3} \pi a^3 \sin\alpha.$$

236. ABC дүзбучаглы үчбучагдыр, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $MN \perp AC$ (шәкил 221). $BD \perp MN$ чәкәк. Һәчм һаггында леммаја әсасән ABC үчбучағынын MN оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми:

$$V_ф = S_{BC} \cdot \frac{1}{3} AB = \pi (AC + BD) \cdot BC \cdot \frac{1}{3} AB$$

дүстуру илә һесабланыр.

ABC үчбучағында: $AC = x$ гәбул едәк.

$BC = AC \sin\alpha = x \sin\alpha$, $AB = AC \cos\alpha = x \cos\alpha$.

$\triangle ABD$-дән: $BD = AB \cos\alpha = x \cos\alpha \cos\alpha = x \cos^2\alpha$.

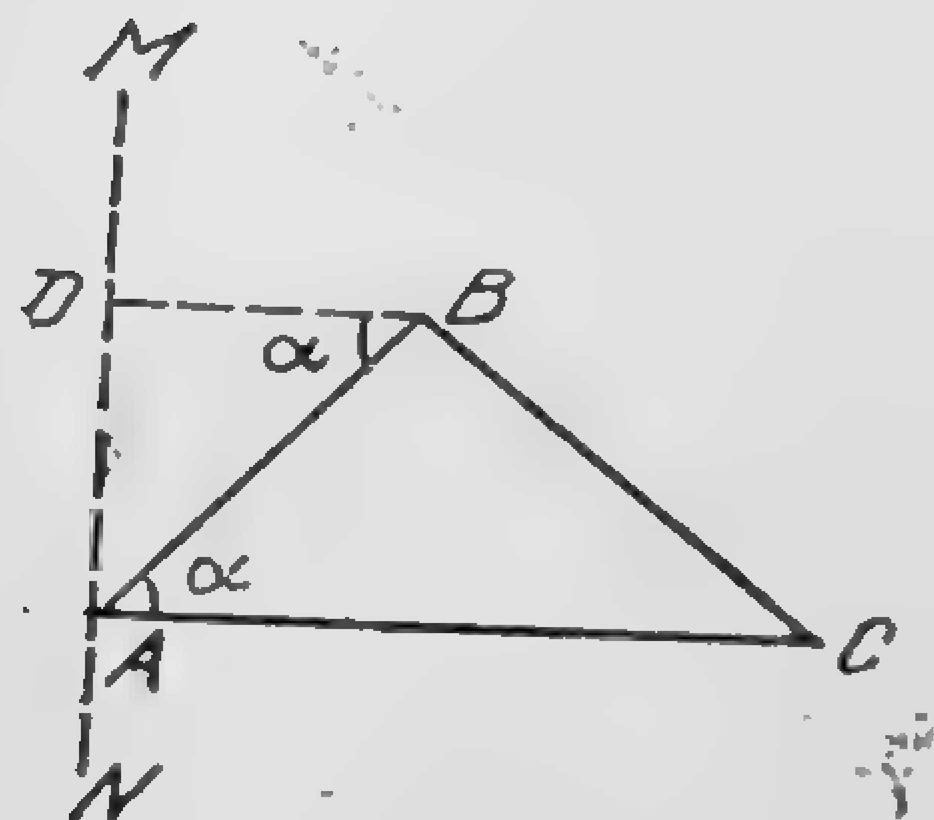
Бурадан һәчм:

$$V_ф = \pi (x + x\cos^2\alpha) \cdot x \sin\alpha \cdot \frac{1}{3} x \cos\alpha =$$

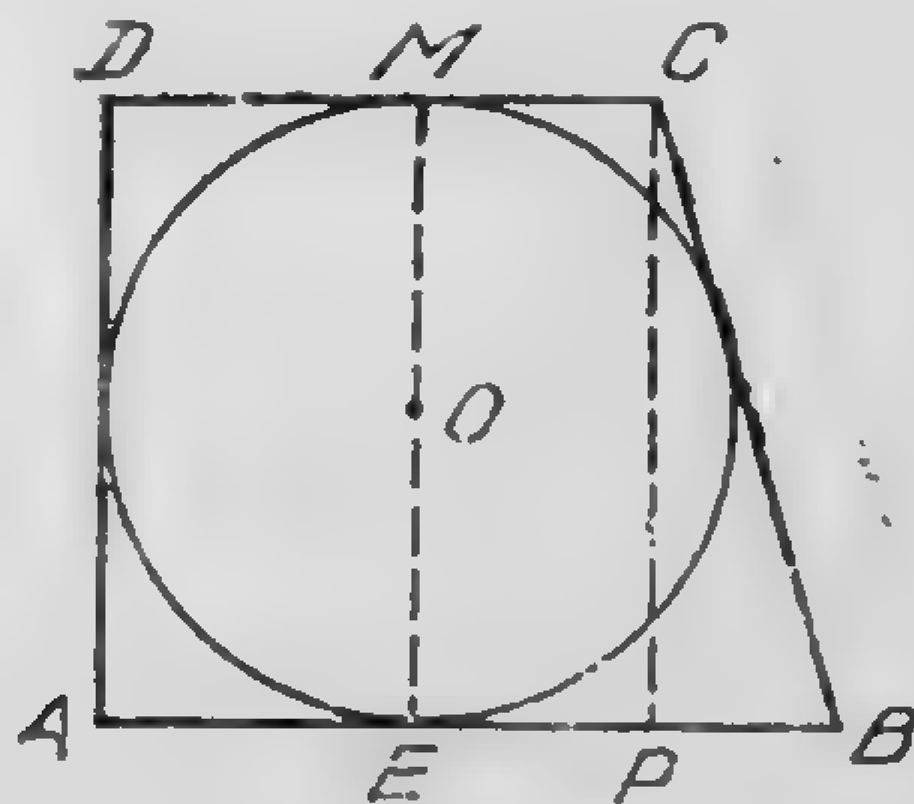
$$= \frac{1}{3} \pi \cdot x^3 (1 + \cos^2\alpha) \sin\alpha \cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{6} \pi x^3 (1 + \cos^2\alpha) \sin 2\alpha.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} x \cos\alpha \cdot x \sin\alpha,$$



Шәкил 221



Шәкил 222

лакин шәртә көрә $\frac{x^2 \cos\alpha \sin\alpha}{2} = S$, бурадан $x = 2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$.

$$V_ф = \frac{1}{6} \pi \left(2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \right)^3 \cdot \sin 2\alpha (1 + \cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{4}{3} \pi \sqrt{\frac{S^3}{\sin 2\alpha}} \cdot (1 + \cos^2\alpha).$$

237. $ABCD$ дүзбучаглы трапесија, O исә онун дахилинә чәкилмиш чеврәнин мәркәзидир (шәкил 222).

$$OE = R, \angle CBE = \alpha.$$

O мәркәзини E вә M тохунма нөгтәләри илә бирләшдирәк, онда $OE \perp AB$, $OM \perp DC$ олар, лакин $AB \parallel DC$ олдуғу үчүн OE вә OM радиуслары ејни бир дүз хәтт үзәриндәдир. Она көрә ME диаметрдир. $CP \perp AB$ чәкәк. Чеврә харичинә чәкилмиш дөрдбучаглынын хассәсинә көрә $DC + AB = BC + AD$. Трапесијанын AD парчасы әтрафында фырланмасындан алынан чисмин јан сәтһи:

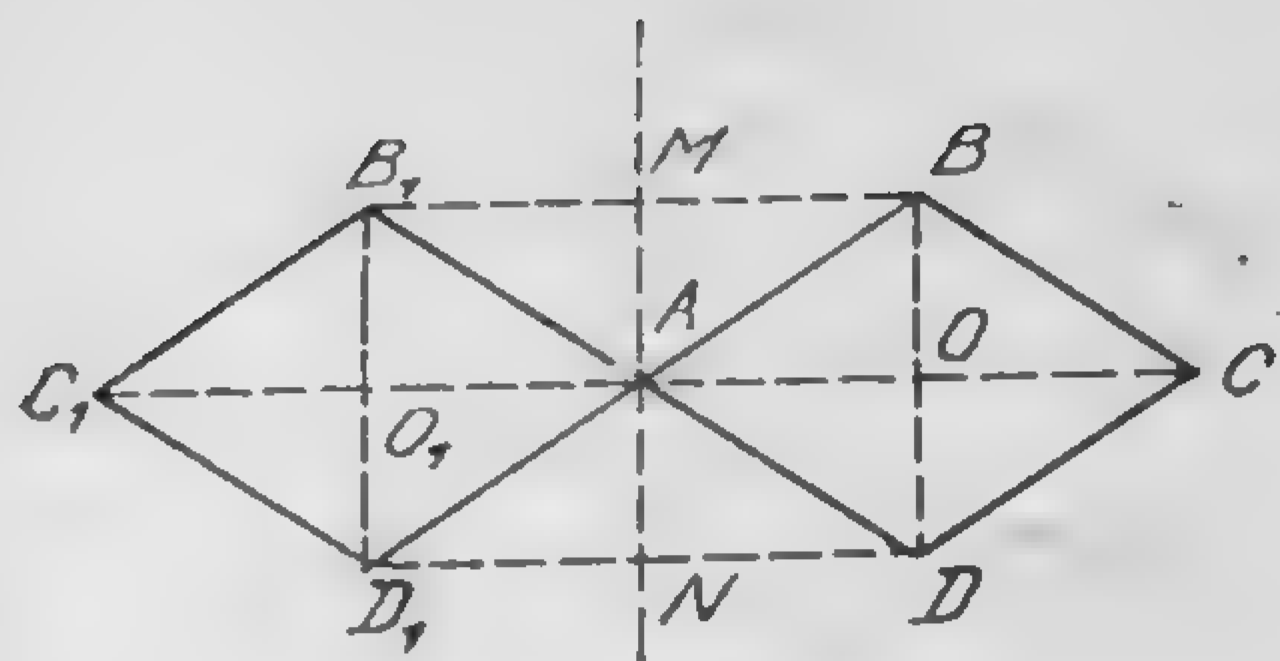
$$S_ф = \pi (DC + AB) \cdot BC = \pi (AD + BC) \cdot BC.$$

BCP үчбучағында: $BC = \frac{PC}{\sin\alpha} = \frac{2R}{\sin\alpha}$.

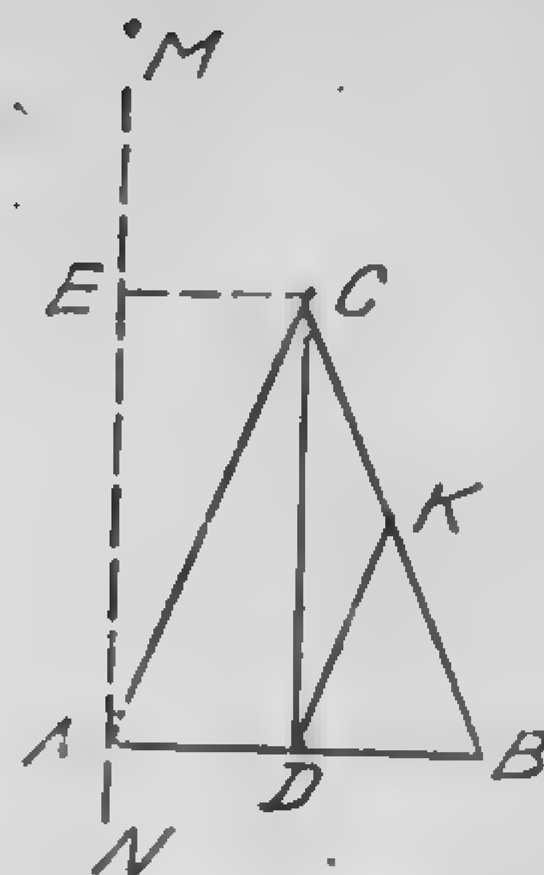
$$S_ф = \pi \left(2R + \frac{2R}{\sin\alpha}\right) \cdot \frac{2R}{\sin\alpha} = \frac{4\pi R^2}{\sin\alpha} \cdot \frac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha} [1 + \cos(90° - \alpha)] = \frac{8\pi R^2}{\sin^2\alpha} \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

238. $ABCD$ ромбдур, $\angle BAC = \alpha$, $AC = a$, $MN \parallel BD$ (шәкил 223). $BD \perp AC$, $MN \parallel BD$ олдуғундан $MN \perp AC$ олачагдыр. $ABCD$ ромбун фырланмасындан алынан чисмин һәчми $AMBC$ вә $ANDC$ трапесијаларынын фырланмасындан алынан ики кәсик конусун һәчмләри чәми илә AMB вә AND үчбучагларын фырланмасындан алынан ики конусун һәчмләри чәминин фәргинә бәрабәрдир. $MB = ND$; $AO = OC$, $BO = OD$. ABB_1 вә ADD_1 конусларын отурачагларынын радиуслары вә һүндүрлүкләри бәрабәр олдуғундан бу конуслар бир-биринә бәрабәр олачагдыр. Һәмин сәбәбә көрә кәсик конуслар да бир-биринә бәрабәрдир.



Шәкил 223



Шәкил 224

$$V_ф=2\cdot\left[BO\left(a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\cdot BO\cdot\frac{a^2}{4}\right]=\pi a^2\cdot BO.$$

$\triangle\ AOB$-дән: $BO=AO\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{AC}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

$V_ф=\pi a^2\cdot\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\pi a^3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha.$ $S_ф=2\pi(AC+BM)\,BC+$ $+\,2\pi MB\cdot BC=2\pi\,BC\,(AC+2BM)=2\pi BC\left(a+2\frac{a}{2}\right)=$ $=4\pi a\cdot BC.$

ACB үчбучағындан исә $AB=\frac{AO}{\cos\alpha}=\frac{a}{2\cos\alpha}$;

$$S_ф=4\pi a\cdot\frac{a}{2\cos\alpha}=\frac{2\pi a^2}{\cos\alpha}.$$

239. $AC=BC,\ DK=a,\ \angle DKB=\alpha,\ MN\perp AB,\ D$ нөгтәси AB-нин, K нөгтәси исә BC-нин орта нөгтәсидир (шәкил 224). CD парчасы бәрабәрјанлы үчбучағын медианы олдуғундан $CD\perp AB$, $\angle ACD=\angle DCB$ олар. $CE\perp MN$ чәкәк. Демәли, $ADCE$ дөрдбучаглысы дүзбучаглыдыр, бурадан $EC=AD$, $AE=DC$. Үчбучағын орта хәттинин хассәсинә көрә $AC\parallel DK$, $DK=\frac{1}{2}AC$, бурадан

$$\angle ACB=\angle DKB=\alpha,\ AC=2DK=2a.$$

ABC үчбучағынын MN оху әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми, $ABCE$-нин фырланмасындан алынан һәчмлә BCE үчбучағын фырланмасындан алынан һәчмин фәргинә бәрабәрдир.

$$V_ф=\frac{1}{3}\pi AE(AB^2+CE^2+AB\cdot EC)-\frac{1}{3}\pi EC^2\cdot AE=$$
$$=\frac{1}{3}\pi AE[(2AD)^2+AD^2+2AD\cdot AD]-$$
$$-\frac{1}{3}\pi AD^2\cdot AE=2\pi AD^2\cdot AE.$$

ADC үчбучағында: $\angle ACD=\frac{1}{2}\alpha$,

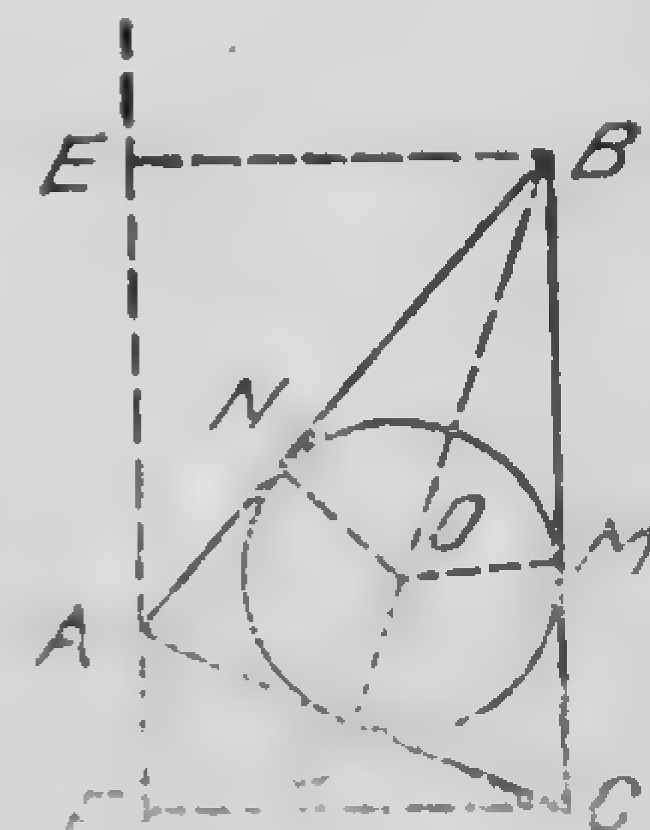
$$AD=AC\sin\frac{\alpha}{2}=2a\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$CD=AC\cos\frac{\alpha}{2}=2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

бурадан $AE=CD=2a\cos\frac{\alpha}{2}$; $V_ф=2\pi AD^2\cdot AE=$

$$=2\pi\left(2a\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot 2a\cos\frac{\alpha}{2}=8\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$
$$S_ф=\pi(AB+EC)\cdot BC+\pi EC\cdot AC=$$
$$=\pi(2EC+EC)\cdot BC+\pi\cdot EC\cdot BC=3\pi EC\cdot BC+$$
$$+\pi EC\cdot BC=4\pi EC\cdot BC=4\pi\cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2a=16\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$$

240. ABC үчбучағы бәрабәрјанлыдыр, $AB=BC$, $\angle ABC=\alpha$, $OD=r$ (шәкил 225). BC вә BE парчаларыны ујғун олараг H вә R_1 илә ишарә едәк. Фырланмадан алынан чисмин һәчми:

$$V_ф=\pi BE^2\cdot BC-\left(\frac{1}{3}\pi BE^2\cdot AE+\frac{1}{3}\pi BE^2\cdot AF\right)$$
$$=\pi R_1^2H-\frac{1}{3}\pi R_1^2(AE+AF)=\pi R_1^2H-\frac{1}{3}\pi R_1^2H=$$
$$=\frac{2}{3}\pi R_1^2H. \qquad (1)$$



Шәкил 225

Паралел дүз хәтләрин чарпаз бучаглары олдуғуна көрә $\angle EAB=$ $=\angle ABC=\alpha$.

ABE үчбучағында: $BE=AB\sin\alpha$ вә ја $R_1=H\sin\alpha$, буна көрә (1) дүстуру $V_ф=\frac{2}{3}\pi H^3\sin^2\alpha$.

Үчбучағын саһәси: $S=rP$,

$$r=\frac{S}{P} \qquad (2)$$

дүстуру илә һесабланыр.

BDC үчбучағында

$$DC = BC\sin\frac{\alpha}{2} = H\sin\frac{\alpha}{2}. \quad BD = BC\cos\frac{\alpha}{2} = H\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Бурадан $AC = 2DC = 2H\sin\frac{\alpha}{2}$,

$$AB + BC + AC = 2P \text{ вә ја}$$

$$H + H + 2H\sin\frac{\alpha}{2} = 2P,\ P = H\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= H\left[1+\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2H\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= 2H\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right).$$

ABC үчбучағынын саһәси:

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 2H\sin\frac{\alpha}{2}\cdot H\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}H^2\sin\alpha.$$

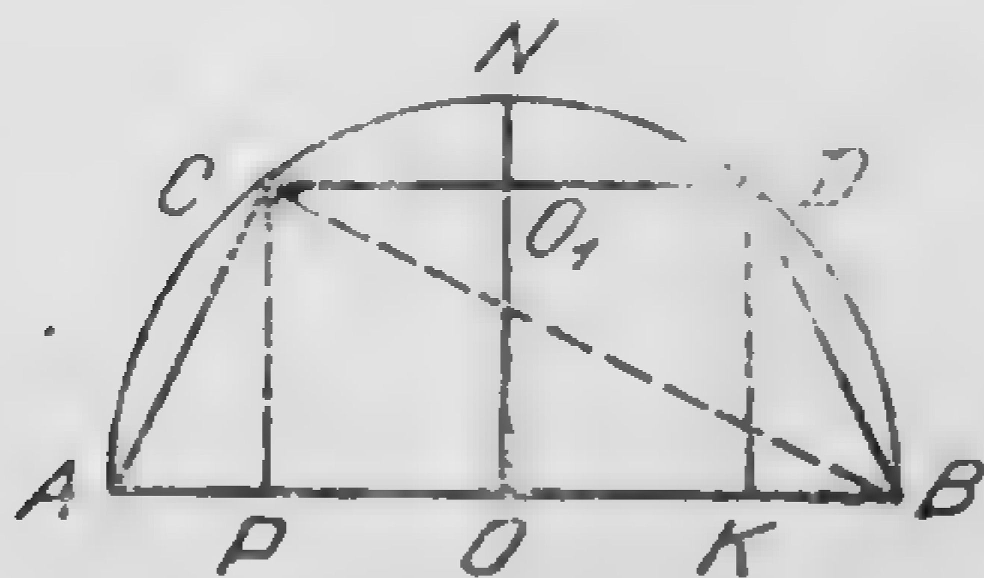
S вә P-нин гијмәтләрини (2)-дә јеринә јазсаг:

$$r = \frac{\frac{1}{2}H^2\sin\alpha}{2H\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right)}, \quad H = \frac{4r\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}.$$

$$V_ф = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{4r\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}\right]^3\sin^2\alpha = \frac{128\pi r^3\sin^6\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right)}{3\sin\alpha}$$

241. $ABDC$ трапесијасы диаметри AB олан јарымдаирә дахилинә чәкилмишдир $\angle CAB = 60°$, $NO \perp AB$, $AO = R$ (шәкил 226).

$ABDC$ трапесијасы бәрабәрјанлыдыр, онда $CO_1 = O_1D$ олар. Фырланмадан алынан фигур кәсик конус олачагдыр. Һәмин конусун OO_1 һүндүрлүјүнү вә CO_1 радиусуну тә'јин едәк. Трапесијанын BC диагоналыны чәкәк. $\angle ACB$ дахилә чәкилмиш диаметрә сөјкәндијиндән дүз бучагдыр.



Шәкил 226

ABC дүзбучаглы үчбучағында $\angle ABC = 30°$. Она көрә $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 2R = R$. $CP \perp AB$, $DK \perp AB$ чәкәк.

ACP дүзбучаглы үчбучағында

$$AP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}R,\ CP = \sqrt{AC^2 - AP^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2};\ AO = AP + PO = AP + CO_1,$$

AO вә AP-нин гијмәтләрини сон бәрабәрликдә нәзәрә алсаг, $R = \frac{1}{2}R + CO_1$, бурадан $CO_1 = \frac{1}{2}R$ олур.

$$V_ф = \frac{1}{3}\pi OO_1\left(AO^2 + AO\cdot CO_1 + CO_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(R^2 + R\cdot\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R^2\right) = \frac{7\pi R^3\sqrt{3}}{24}.$$

242. ABC бәрабәрјанлы үчбучагдыр. $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, O—дахилә чәкилмиш чеврәнин мәркәзидир, $BC \perp MN$, $OP = r$ (шәкил 227). $AK \perp MN$ чәкәк. B вә O нөгтәләриндән кечән BP дүз хәтт ABC бучағынын тәнбөләни олачагдыр. BP парчасы бәрабәрјанлы үчбучағын тәпә бучағын тәнбөләни олдуғундан $BP \perp AC$, $AP = PC$ олачагдыр. Һәчм һаггында леммаја көрә:

$$V_ф = S_{AC}\cdot\frac{1}{3}BP = \pi(BC + AK)\cdot AC\cdot\frac{1}{3}BP.$$

фәрз едәк ки, $AP = x$. Онда $AC = 2AP = 2x$. ABP үчбучағында:

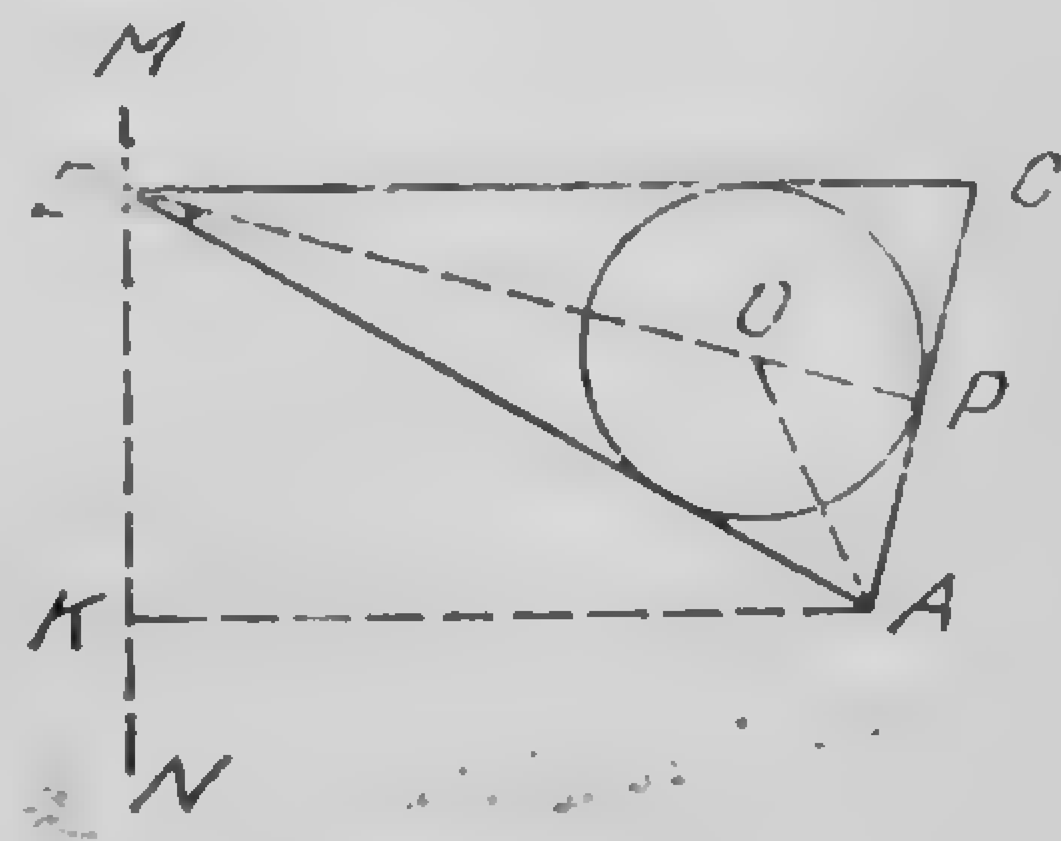
$$AB = \frac{AP}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad BC = AB = \frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$BP = AP\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = x\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

ABK үчбучағында:

$$AK = AB\sin(90° - \alpha) = \frac{x\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$V_ф = \pi\left(\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{x\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\times$$



Шәкил 227

$$\times 2x\cdot\frac{1}{3}x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pi(1+\cos\alpha)\cdot\frac{2x^3\cos\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\pi x^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

ABP үчбучағында:

$\angle BAP=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, лакин AO тәнбөлән олдуғу үчүн

$\angle PAO=\frac{1}{2}\angle BAP=45^\circ-\frac{\alpha}{4}$.

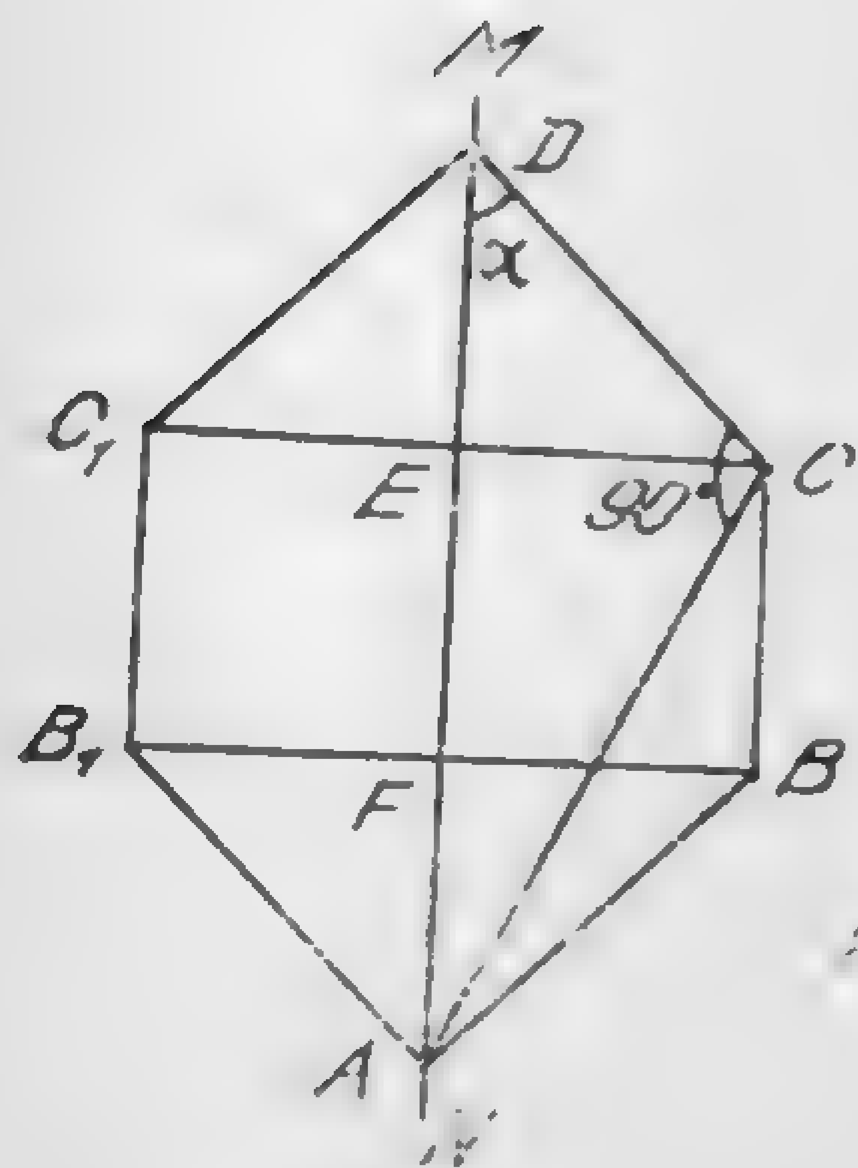
$\triangle$ AOP-дән: $AP=OP\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)=r\operatorname{ctg}\times$

$$\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right).$$

$$V_ф=\frac{4\pi\left[r\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\right]^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^3}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{32\pi r^3\cos^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{3\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$



Шәкил 228

243. $AD=a$, $\angle BAF=\alpha$, $DC=AB$, $AC\perp DC$ (шәкил 228). DCC_1 вә ABB_1 конуслары отурачагларынын радиуслары вә һүндүрлүкләри бәрабәр олдуғундан бәрабәр олур. $ABCD$ трапесијасынын AD тәрәфи әтрафында фырланмасындан алынан чисмин һәчми, BCC_1B_1 силиндри илә ABB_1 вә DCC_1 конусларынын һәчмләри чәминә бәрабәрдир:
$V_ф=V_{BCC_1B_1}+V_{ABB_1}+V_{DCC_1}=$

$$=\pi BF^2\cdot EF+\frac{2}{3}\pi\cdot BF^2\cdot AF=\pi BF^2\left(EF+\frac{2}{3}AF\right)=$$

$$=\frac{\pi BF^2}{3}\cdot(3EF+2AF).$$

$\triangle$ ACD-дән:

$DC=AD\cos\alpha=a\cos\alpha$, $AC=AD\sin\alpha=a\sin\alpha$.

$\triangle$ DCE-дән:

$EC=DC\sin\alpha=a\cos\alpha\sin\alpha$, $DE=DC\cos\alpha=$
$=a\cos\alpha\cos\alpha=a\cos^2\alpha$,

бурадан:

$$AF=DE=a\cos^2\alpha,\quad BF=CE=\frac{a}{2}\sin 2\alpha;$$

$$FE=AD-2DE=a-2a\cos^2\alpha.$$

$$V_ф=\frac{\pi}{3}\left(\frac{a}{2}\sin 2\alpha\right)^2\cdot[3(a-2a\cos^2\alpha)+2a\cos^2\alpha]=$$

$$=\frac{\pi a^3}{12}\sin^2 2\alpha(3-4\cos^2\alpha);\quad 3-4\cos^2\alpha=3-4\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=$$

$$=1-2\cos 2\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=2(\cos 60^\circ-\cos 2\alpha)=$$

$$=4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(\alpha-30^\circ).$$

$$V_ф=\frac{\pi}{12}a^3\sin^2 2\alpha\cdot 4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(\alpha-30^\circ).$$

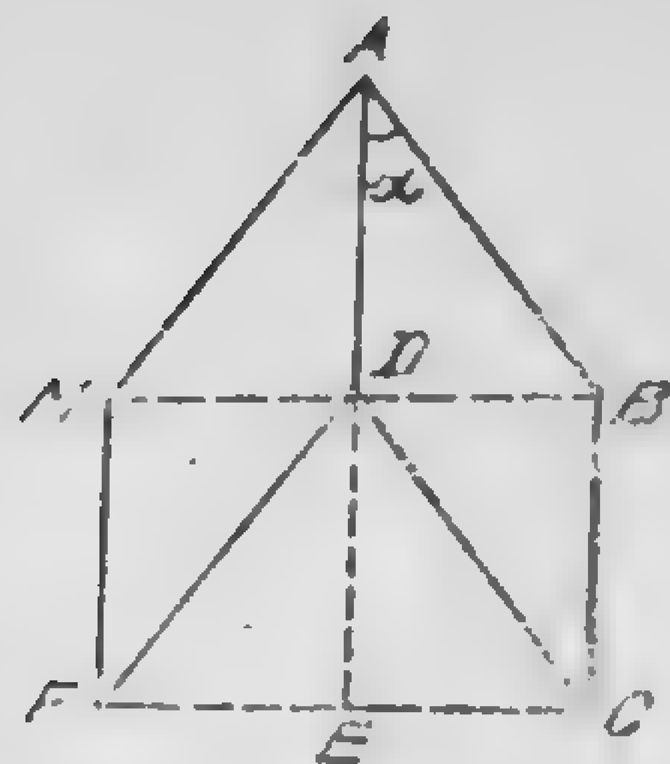
Беләликлә, һәчми тә'јин етмиш олуруг:

$$V_ф=\frac{1}{3}\pi a^3\sin^2 2\alpha\sin(30^\circ+\alpha)\sin(\alpha-30^\circ).$$

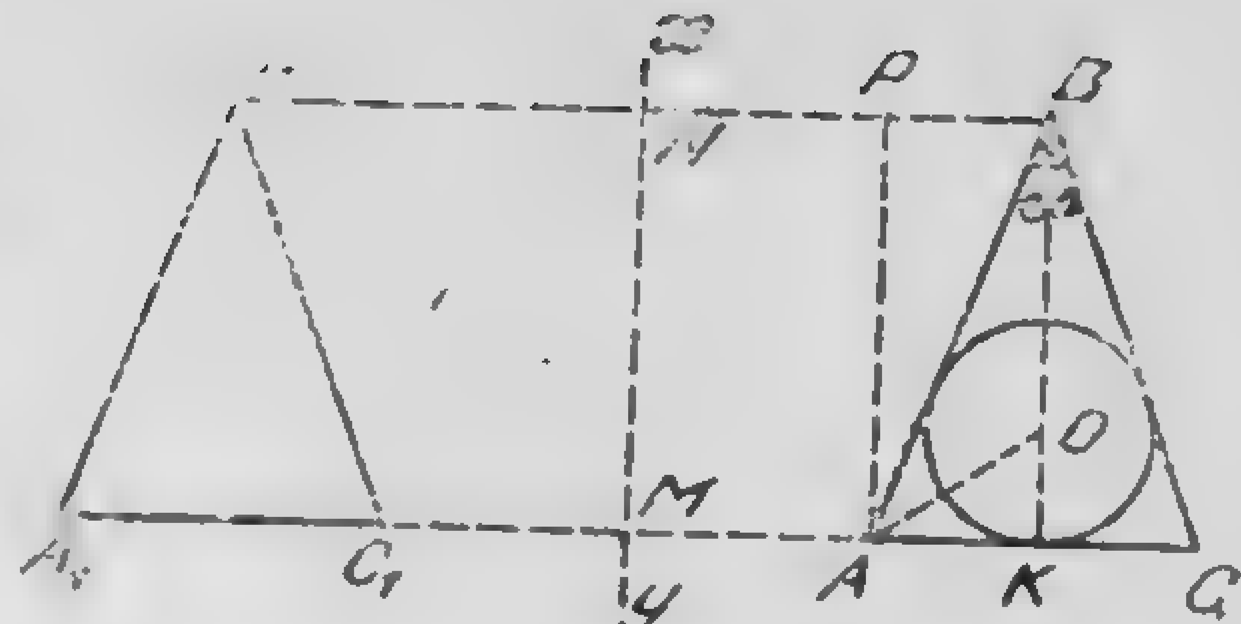
244. $ABCD$ паралелограмдыр, $BD\perp AD$, $\angle BAD=\alpha$, $V_ф=V$ (шәкил 229). AD парчасыны өз истигамәтиндә узадаг вә $CE\parallel BD$ чәкәк. $BD\perp ED$, $DB\perp BC$, $CE\parallel BD$ олдуғу үчүн $BCED$ дүзбучаглыдыр. $ABCD$ паралелограмынын AD кичик тәрәф әтрафында фырланмасындан алынан чисмин сәтһи, AB, CD вә BC парчаларын һәмин тәрәф әтрафында фырланмасындан алынан сәтһләрин чәминә бәрабәрдир.

$$S_ф=S_{AB}+S_{DC}+S_{BC}=\pi\cdot BD\cdot AB+\pi\cdot CE\cdot DC+$$
$$+2\pi CE\cdot BC=2\pi\cdot BD\cdot AB+2\pi\cdot BD\cdot BC=2\pi BD(AB+BC).$$

ABD үчбучағында: $AD=BD\operatorname{ctg}\alpha$, $AB=\frac{BD}{\sin\alpha}$.



Шәкил 229



Шәкил 230

$$S_ф = 2\pi BD\left(\frac{BD}{\sin\alpha} + BD\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right) =$$

$$= 2\pi BD^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{4\pi BD^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

$$V_ф = V_{ABM} + V_{BCFM} - V_{DCF},$$

лакин $V_{ABM} = V_{DFC}$ олдугу үчүн $V_ф = V_{BCFM}$.

$$V_ф = \pi DB^2\cdot BC = \pi\cdot DB^2\cdot AD = \pi DB^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \quad \text{лакин}$$

$$\pi DB^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha = V, \quad DB = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}}.$$

BD-нин бу гиjмәтини (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$S_ф = \frac{4\pi\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cdot\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha}} = \frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cdot\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{\mathrm{ctg}^2\alpha}}.$$

245. ABC бәрабәрjанлы үчбучагдыр, $\angle ABC = \alpha$, $AB = BC = a$, $xy \parallel BK$. O дахилә чәкилмиш чеврәнин мәркәзидир. $BN = n\cdot OK = nr$ (шәкил 230). $AP \perp BN$, $BK \perp AC$ чәкәк. BK парчасы бәрабәрjанлы үчбучағын тәпә бучағынын һүндүрлүjү олдуғундан $\angle ABK = \angle KBC$, $AK = KC$, чеврәнин O мәркәзи һүндүрлүк үзәриндә олар. ABK үчбучағында $\angle BAK = 90° - \frac{\alpha}{2}$, лакин AO тәнбөлән олдуғундан $\angle OAK = \frac{1}{2}\angle BAK = 45° - \frac{\alpha}{4}$, бәрабәрjанлы ABC үчбучағынын фырланмасындан әмә-

лә кәлән чисим кәсик конуслар, һәм дә бунун кәсик конусу олан оjуғу вардыр:

$$V_ф = V_{BC} - V_{AB} = \frac{1}{3}\pi BK(MC^2 + BN^2 + MC\cdot BN) -$$

$$-\frac{1}{3}\pi BK(BN^2 + AM^2 + BN\cdot AM) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi BK(MC^2 + MC\cdot BN - AM^2 - BN\cdot AM) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot BK[(MC - AM)(MC + AM + BN(MC - AM)] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi BK[AC(MC + AM) + BN\cdot AC) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi BK\cdot AC(MC + AM + BN). \qquad (1)$$

Лакин $MC + AM = MK + KC + AM =$

$$= MK + (AK + AM) = MK + MK = 2MK = 2BN. \qquad (2)$$

(2) бәрабәрлиjини (1)-дә нәзәрә алсаг:

$$V_ф = \pi BK\cdot AC\cdot BN.$$

ABK үчбучағында:

$$BK = AB\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}, \quad AK = AB\sin\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Бурадан $AC = 2AK = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$.

AOK үчбучағында:

$$OK = AK\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = a\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

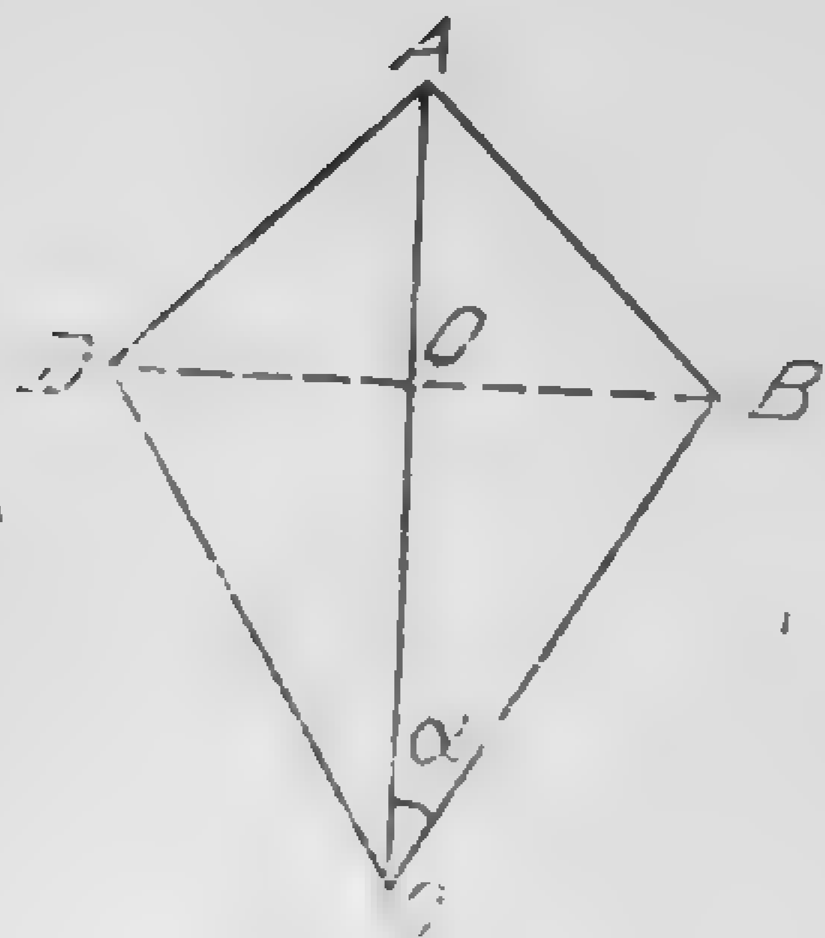
$$BN = nr = na\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

$$V_ф = \pi a\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot na\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) =$$

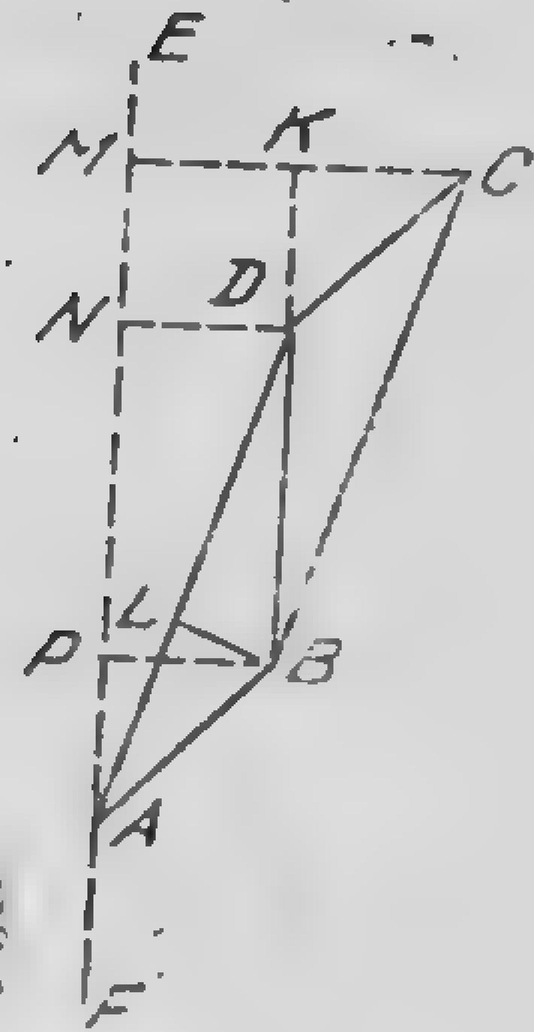
$$= \pi a\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot na\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= 4\pi na^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

246 (1). ABC дүзбучаглы үчбучагдыр, $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = \alpha$, $AC + BC + AB = 2P$ (шәкил 231). Фырланмадан алынан чисмин һәчми, ABO вә CBO дүзбучаглы



Шәкил 231



Шәкил 232

үчбучагларын өз AO вә OC катетләри әтрафында фырланмасындан алынан там конусларын һәчмләри чәминә бәрабәрдир.

$$V_{\text{ф}} = \frac{1}{3}\pi\cdot AO\cdot OB^2 + \frac{1}{3}\pi\cdot OC\cdot OB^2 = $$

$$= \frac{1}{3}\pi OB^2 (AO + OC) = \frac{1}{3}\pi OB^2\cdot AC.$$

ABC үчбучағынын һипотенузуну x гәбул едәк.

$\triangle ABC$-дән: $AB = AC\sin\alpha = x\sin\alpha,$

$BC = AC\cos\alpha = x\cos\alpha.$

$\triangle COB$-дән: $OB = BC\sin\alpha = x\cos\alpha\sin\alpha.$

Бурадан $V_{\text{ф}} = \frac{1}{3}\pi(x\cos\alpha\sin\alpha)^2\cdot x = \frac{1}{3}\pi x^3\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$

x-ин гиjмәтини тә'јин едәк: $x + x\sin\alpha + x\cos\alpha = 2P.$

$x(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = 2P,$ $x\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right) = 2P,$ бурадан $x = \frac{P}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$

x-ин гиjмәтини һәчм дүстурунда јеринә јазаг:

$$V_{\text{ф}} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{P}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}\right]^3\cdot\cos^2\alpha\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{P^3\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{2\sqrt{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\cos^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi P^3\cos^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3\cos^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

246 (2). $CM\perp EF$, $DN\perp EF$, $BP\perp EF$ чәкәк (шәкил 232). Ахтарылан һәчм, ABP вә $BPMC$-нин фырланмасындан алынан һәчмләрин чәми илә ADN вә $DCMN$-нин фырланмасындан алынан чисимләрин һәчмләр чәми фәргинә бәрабәрдир, она көрә:

$$V_{\text{ф}} = \frac{1}{3}\pi\cdot BP^2\cdot AP + \frac{1}{3}\pi PM(BP^2 + MC^2 +$$

$$+ BP\cdot MC) - \left[\frac{1}{3}\pi\cdot ND^2\cdot AN +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\pi MN(ND^2 + ND\cdot MC + MC^2)\right]. \qquad (1)$$

ABP вә CDK дүзбучаглы үчбучагларында: $\angle KCD = \angle ABP$ (уjғун тәрәфләри паралел олан бучаглар олдуғу үчүн). $AB = DC$ олдуғундан бу үчбучаглар бир-биринә бәрабәрдир. Она көрә $KC = BP$, $DK = AP$ дүзбучаглынын гаршы тәрәфләри олдуғу үчүн $MK = ND = BP$. Дикәр тәрәфдән $KC = BP$. Бурадан:

$$MK = KC. \qquad (2)$$

Демәли,

$$MC = 2BP. \qquad (3)$$

$AP = DK$, $MN = DK$ олдуғундан

$$MN = AP. \qquad (4)$$

$$AN = PM. \qquad (5)$$

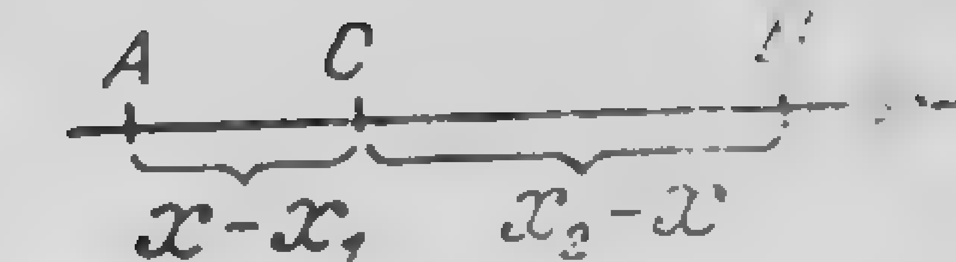
$$AN = AP + PN,\ PM = MN + PN$$

бәрабәрликләриндә сағ тәрәфләр бәрабәр олдуғу үчүн (чүнки $AP = MN$) $AN = PM$. (1), (2), (3), (4) вә (5) бәрабәрликләри нәзәрә алсаг:

$$V_{\text{ф}} = \frac{1}{3}\pi\left\{BP^2\cdot AP + \frac{1}{3}\pi\cdot AN[BP^2 + (2BP)^2 + BP\cdot 2BP] -\right.$$

$$- \left[\frac{1}{3}\pi BP^2\cdot AN + \frac{1}{3}\pi\cdot AP(BP^2 + BP\cdot 2BP + 4BP^2)\right] =$$

Шәкил 233



Шәкил 234

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot BP^2(AP+7AN) - \frac{1}{3}\pi\cdot BP^2(AN+7AP) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi BP^2(6AN-6AP) = 2\pi\cdot BP^2\cdot PN. \qquad (6)$$

ABD үчбуҹағында $\angle ABD=\beta$, $\angle BAD=\alpha$ олдуғу үчүн $\angle ADB = 180^\circ-(\alpha+\beta)$ олур. BDL үчбуҹағында

$$BD = \frac{BL}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]} = \frac{h}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$\angle NAD = \angle ADB$ (паралел дүз хәтләрин чарпаз буҹағлары олдуғу үчүн).

ABP үчбуҹағында:

$\angle BAP = \angle BAL + \angle LAP = \alpha + 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ-\beta$

ABL-дән: $AB = \frac{BL}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$.

ABP-дән: $BP = AB\sin(180^\circ-\beta) = \frac{h\sin\beta}{\sin\alpha}$.

BD вә BP-нин гијмәтләрини (6)-да нәзәрә алсаг:

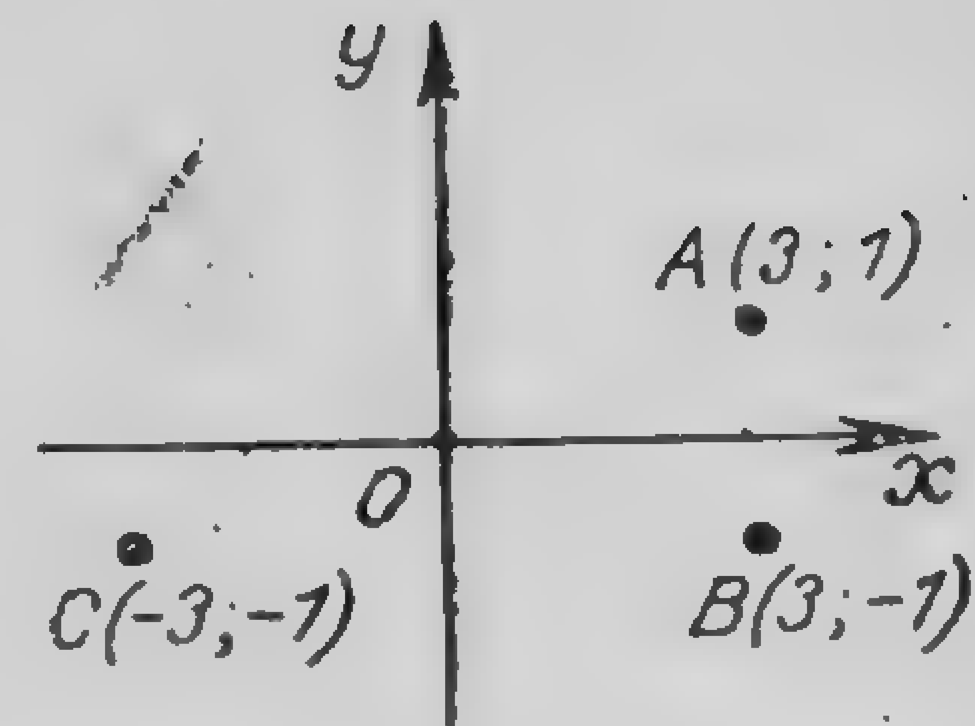
$$V_ф = \frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha+\beta)}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2.$$

247. Шәртә көрә $AB=7$ вә $x_A=-1$, онда (шәкил 233) $|AB| = |x_A - x_B|$, $7 = |-1-x_B|$, $x_B = 6$.

248. Шәртә көрә $AC:CB=\lambda$. Фәрз едәк ки, AB парчасынын (шәкил 234) уч нөгтәләри $A(x_1)$ вә $B(x_2)$. Онда $\frac{AC}{CB} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$, бурадан C-нин координаты $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

Хүсуси һалда, C нөгтәси парчанын орта нөгтәси исә, онда $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ олур.

249. $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ дүстурунда $x_1=2$, $x_2=-7$ вә $\lambda = \frac{1}{2}$ олдуғундан



Шәкил 235

$$x = \frac{2+\frac{1}{2}(-7)}{1+\frac{1}{2}} = -1.$$

250. B нөгтәси AC парчасыны јары бөлүр. Онда $x_B = \frac{x_A+x_C}{2}$; $-3 = \frac{4+x_C}{2}$, бурадан $x_C = -10$.

251. $A(3, 1)$ нөгтәсинин абсис охуна нәзәрән симметрик B нөгтәси, абсис охуна A-дан чәкилмиш перпендикулјар үзәриндә олур (шәкил 235). Она көрә B нөгтәсинин абсиси A нөгтәсинин абсиси илә ејни олур, јә'ни $x_B=3$. Бундан башга B нөгтәсинин абсис охундан олан мәсафәси A нөгтәсинин абсис охундан олан мәсафәси 1 узунлуг ваһидинә бәрабәрдир. Демәли, B-нин ординаты -1. Беләликлә, $B(3-1)$. Аналожи оларағ $B(3;-1)$ илә ординат охуна нәзәрән симметрик нөгтә $C(-3;-1)$.

252. Көстәриш. Ашағыдакы мүнасибәтләрдән истифадә един. Дүзбуҹаглы үчбуҹаг үчүн $a^2+b^2=c^2$, итибуҹаглы үчбуҹаг үчүн $a^2+b^2>c^2$, корбуҹаглы үчбуҹаг үчүн $a^2+b^2<c^2$.

253. Верилмиш үч нөгтәни бирләшдирән дүз хәтт парчаларынын узунлуғуну тапаг. Үч нөгтә бир дүз хәтт үзәриндәдирсә, онда ики кичик парчанын ҹәми бөјүк парчаја бәрабәр олмалыдыр, јә'ни $MN+NP=MP$. M, N вә P нөгтәләри бир дүз хәттә аид дејилсә, онда $MP < MN+NP$.

$$MN = \sqrt{(5-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{9+1} \approx 3{,}16:$$

$$MP=\sqrt{(-3-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{74}\approx 8{,}6;$$
$$NP=\sqrt{(-3-5)^2+(-4-2)^2}=10.$$
$$3{,}16+8{,}6>10.$$

Демәли, M, N, P нөгтәләри бир дүз хәтт үзәриндә дејилдир. M нөгтәси координат мәркәзинә јахындыр.

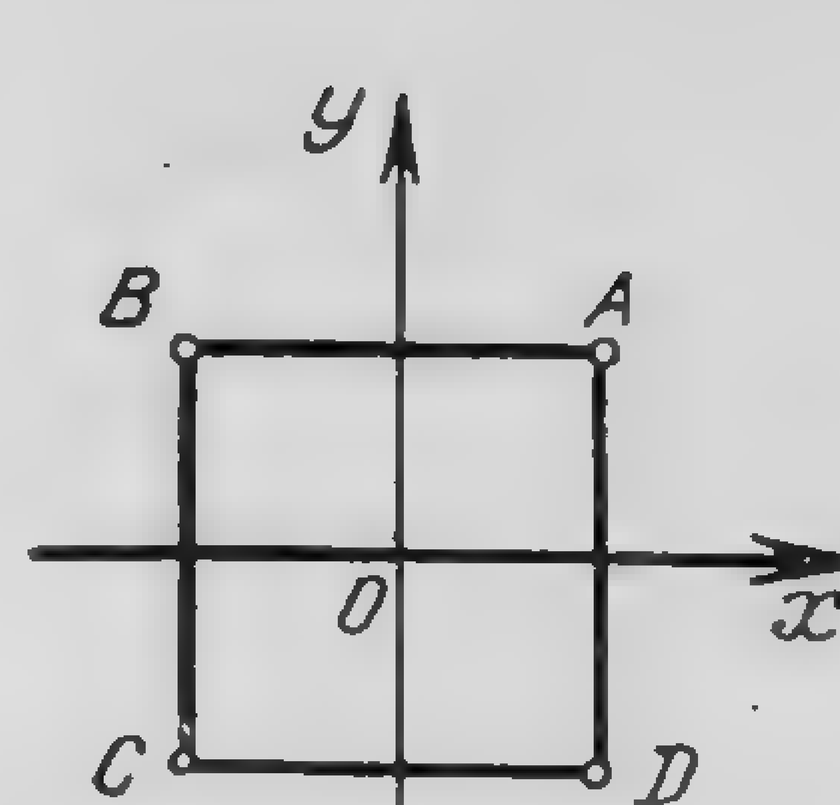
254. a, b вә c үчбучагын тәрәфләринин узунлуғу вә S онун саһәси олдугда бу үчбучағын харичинә чәкилмиш чеврәнин радиусуну $R=\frac{abc}{4S}$ дүстуру илә һесаблајаг.

Бурада $AB=\sqrt{(6-1)^2+(1+4)^2}=5\sqrt{2}$.
$$AC=\sqrt{(4-1)^2+(6+4)^2}=\sqrt{109},$$
$$BC=\sqrt{(4-6)^2+(6-1)^2}=\sqrt{29}.$$

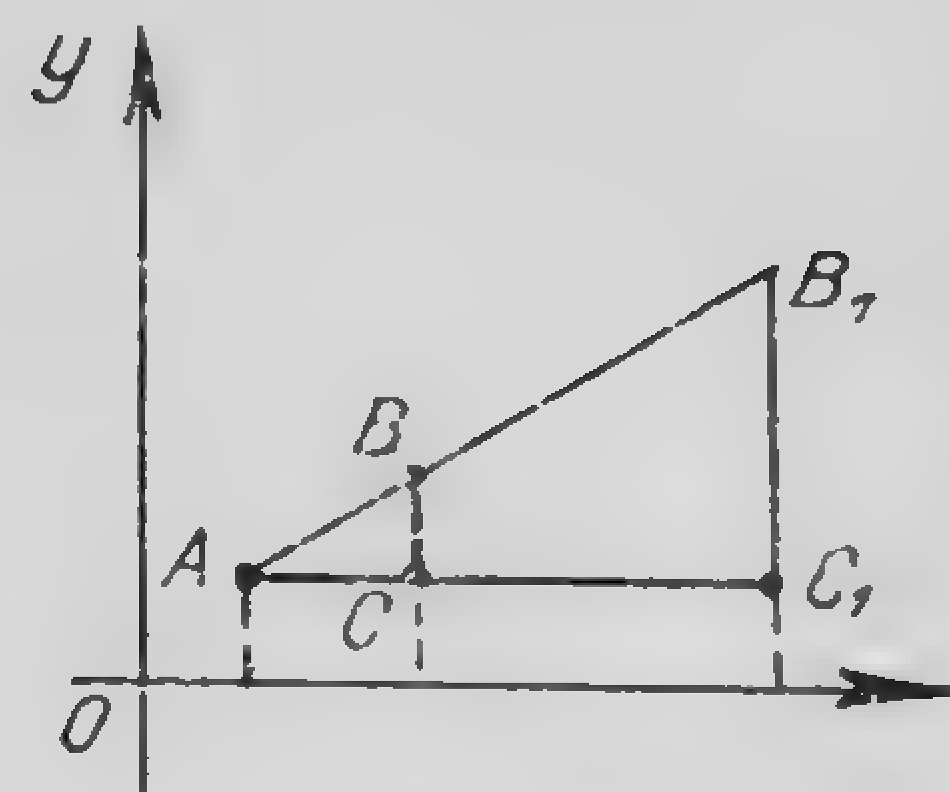
Тәпә нөгтәләри координатлары $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ вә $C(x_3;y_3)$ олан үчбучағын саһәси
$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}$$
дүстуру илә һесабланыр, (бурада $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-cb$ икитәртибли детерминантдан истифадә едилир).
$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6-1 & 4-1\\ 1+4 & 6+4\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3\\ 5 & 10\end{vmatrix}=22{,}5$$
олдуғундан
$$R=\frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{109}\cdot\sqrt{29}}{4\cdot 22{,}5}\approx 4{,}48.$$

255. Үчбучағын саһәси
$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5-2 & 5-2\\ y-1 & 1-1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 3\\ y-1 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}(0-3(y-1)),\quad \frac{3}{2}(y-1)=6,\quad y=5.$$

256. BC парчасынын орта нөгтәсинин координатлары:
$$x_N=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2},\ y_N=\frac{3+1}{2}=2,$$
јә'ни $x_N=-\frac{1}{2}$, $y_N=2$ вә AB парчасынын орта нөгтәси M координатлары



Шәкил 236



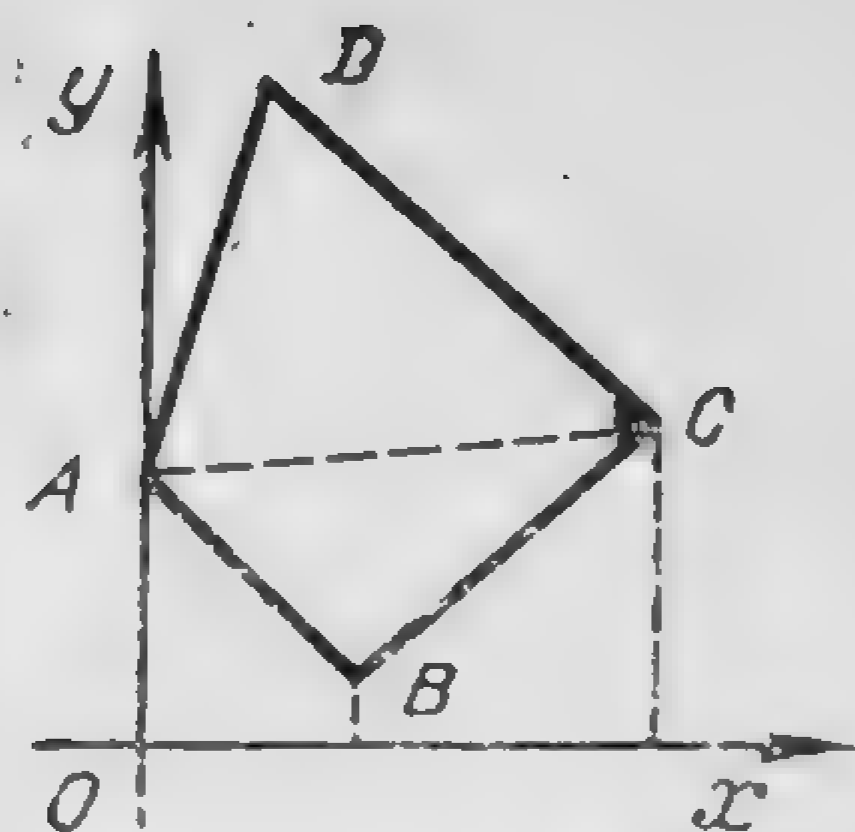
Шәкил 237

$$x_M=\frac{-2-4}{2}=-3,\quad y_M=\frac{-3+3}{2}=0,$$
$$\text{јә'ни } x_M=-3 \text{ вә } y_M=0.$$
$$M(-3;0) \text{ вә } N\left(-\frac{1}{2},2\right)$$
нөгтәләриндән кечән парчанын узунлуғу
$$MN=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{6{,}25+4}\approx 3{,}2.$$

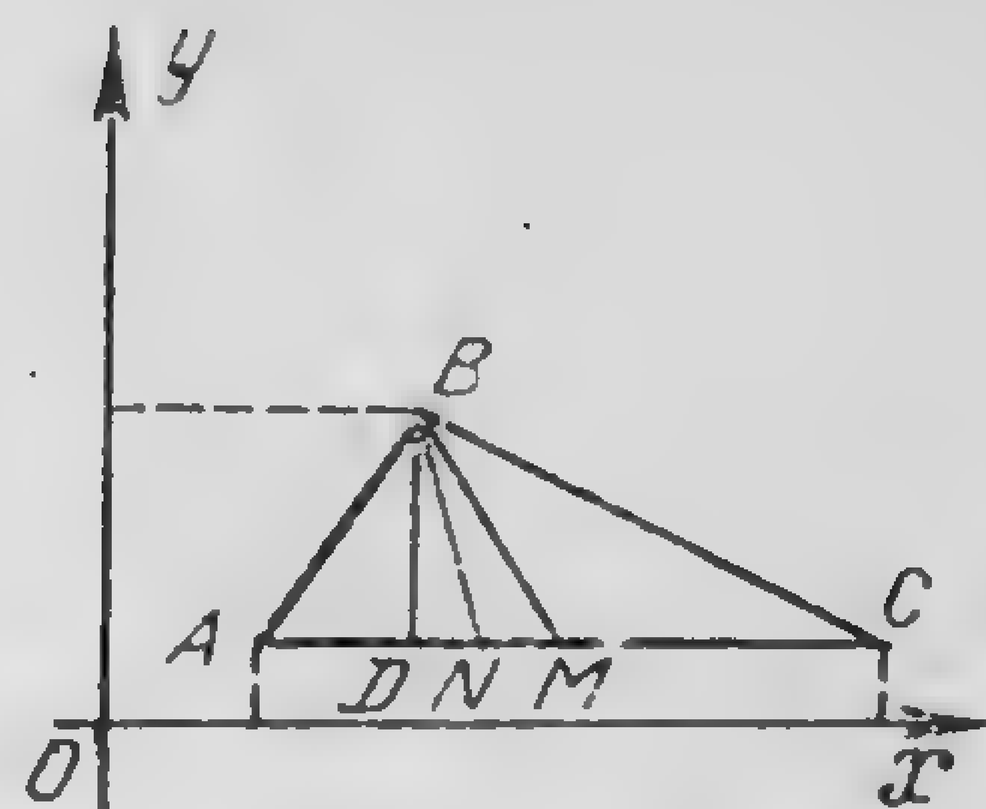
Демәли, орта хәттин узунлуғу $MN\approx 3{,}2$, C нөгтәсиндән чәкилмиш медиан $C(3,1)$ вә $M(-3,0)$ нөгтәләрини бирләшдирир. Онда $CM=\sqrt{(3+3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{37}\approx 6{,}08$.

257. Квадратын саһәси $AB^2=(1+1)^2+(1-1)^2=4$ (шәкил 236).

258. Охшарлыг әмсалы $k=\frac{10}{3}$ олдугда, онда (шәкил 237)
$$\frac{AC_1}{AC}=\frac{10}{3},\ \frac{x-2}{5-2}=\frac{10}{3},\ x_{C_1}=12 \text{ вә } y_{C_1}=2,$$
Ајдындыр ки, $x_{B_1}=12$ олур.
$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{10}{3}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{10}{3},\ y_{B_1}=8\frac{2}{3}.$$
Демәли, $B_1\left(12;8\frac{2}{3}\right)$ вә $C_1(12;2)$.



Шәкил 238



Шәкил 239

259. Тәпә нөгтәләри $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ вә $D(x_4, y_4)$ олан дөрдбучаглынын саһәси

$$S=\pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_4 & y_4\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right)$$

олдуғундан ахтарылан саһә (шәкил 238)

$$S_{ABCD}=\pm\left[\begin{vmatrix}0 & 250\\ 200 & 50\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}200 & 50\\ 500 & 300\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}500 & 300\\ 100 & 700\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}100 & 700\\ 0 & 250\end{vmatrix}\right]=\pm\frac{1}{2}(-50000+60000-25000+$$

$$+350000-30000+25000)=15{,}5\ ha.$$

260. BM медианы үчбучағын AC тәрәфини јары бөлдүјү үчүн M нөгтәсинин координатлары (шәкил 239)

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+15}{2}=9,$$

$$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1+1}{2}=1,\quad M(9;\ 1).$$

BM медианын узунлуғу $BM=\sqrt{(9-6)^2+(1-5)^2}=5$. $BM=5$.

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$$

бәрабәрлијиндән һүндүрлүјү тапаг: $BD=\dfrac{2S}{AC}$, бурада

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}6-3 & 15-3\\ 5-1 & 1-1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 12\\ 4 & 0\end{vmatrix}=24;$$

$$AC=\sqrt{(15-3)^2+(1-1)^2}=12,\quad BD=\frac{2\cdot 24}{12}=4,\quad BD=4.$$

Дахили бучағын тәнбөләни гаршыдакы тәрәфи јан тәрәфләрлә мүтәнасиб һиссәјә ајырдығы үчүн $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AB}{BC}$ бәрабәрлијини алырыг. Бурада

$$AB=\sqrt{(6-3)^2+(5-1)^2}=5\ \text{вә}$$

$$BC=\sqrt{(15-6)^2+(1-5)^2}=\sqrt{97}\ \text{олдуғундан}$$

$$\frac{AN}{NC}=\frac{5}{\sqrt{97}}.$$

Онда N нөгтәсинин координатлары:

$$x_N=\frac{3+\frac{5}{\sqrt{97}}\cdot 15}{1+\frac{5}{\sqrt{97}}}\approx 7{,}04,\quad y_N=\frac{1+\frac{5}{\sqrt{97}}}{1+\frac{5}{\sqrt{97}}}=1,\quad N(7{,}04;\ 1)$$

$$BN=\sqrt{(7{,}04-6)^2+(1-5)^2}=\sqrt{10{,}8+16}\approx 4{,}13,$$

$$BN=4{,}13.$$

261. $AB=|x_A-x_B|=|-7-2|=9,\ AB=9.$

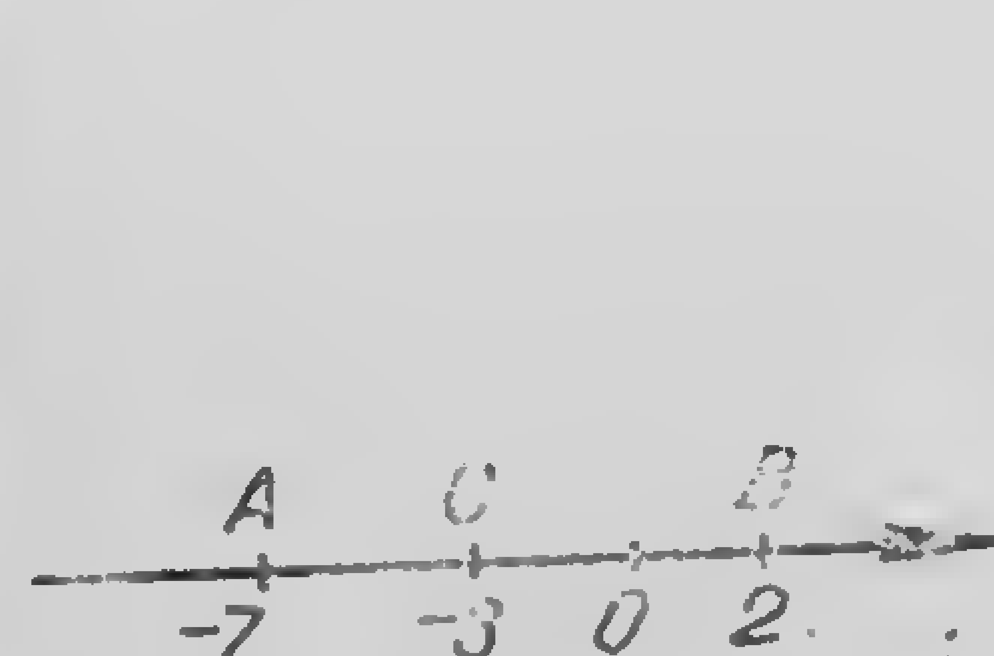
$$BC=|x_B-x_C|=|2-(-3)|=5,\ BC=5,$$

$$AC=|x_A-x_C|=4,\ AC=4\ \text{вә}\ AB=BC+AC$$

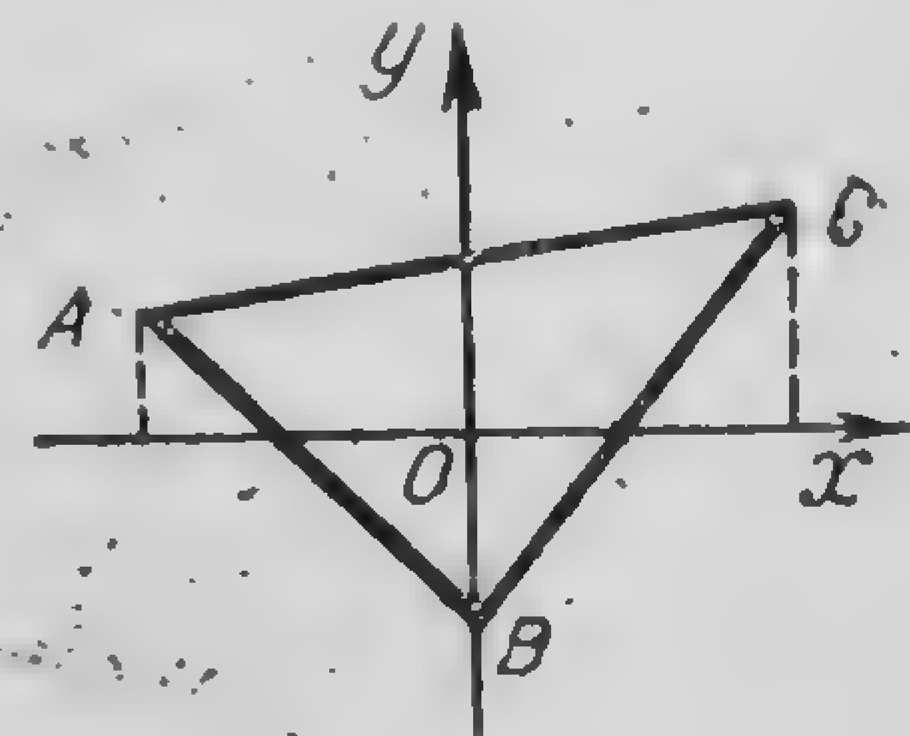
доғрудур (шәкил 240).

262. Үчбучағын периметри $P=AB+BC+AC$ (шәкил 241) шәклиндә һесабландығындан

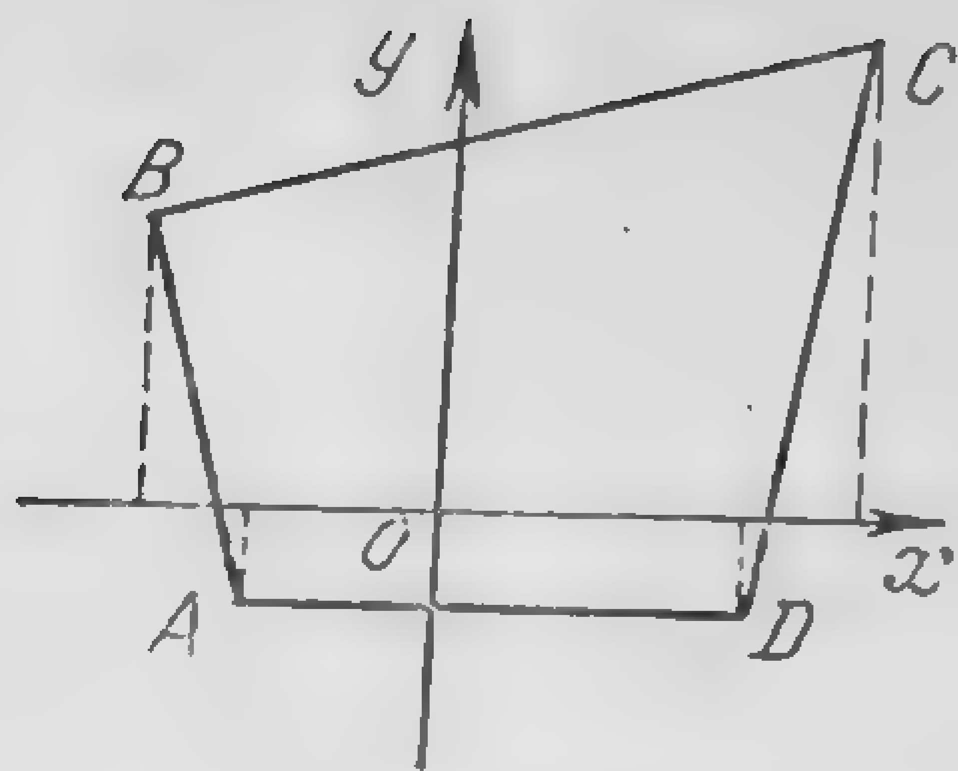
$$AB=\sqrt{(0+3)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}\approx 4{,}24,$$



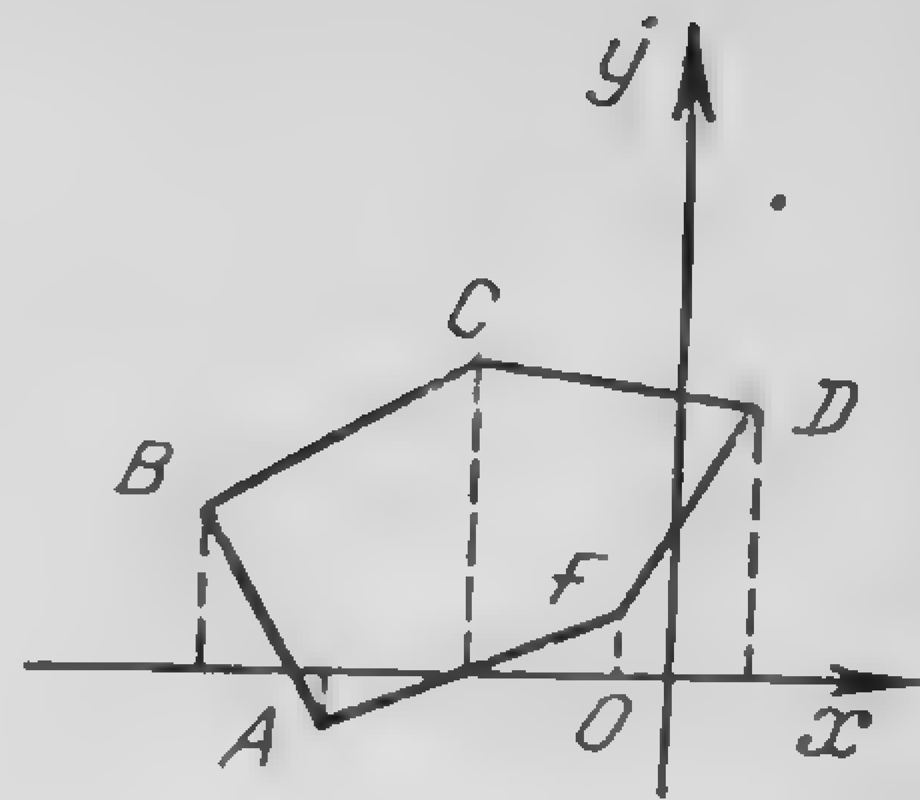
Шәкил 240



Шәкил 241



Шәкил 242



Шәкил 243

$$BC = \sqrt{(3-0)^2+(2+2)^2} = 5,$$

$$AC = \sqrt{(3+3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{82} \approx 9{,}01.$$

Онда $P = 4{,}24 + 5 + 9{,}01 = 18{,}25$, $P \approx 18{,}25$. Үчбучағын саһәси

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3-0 & 3-0 \\ 1+2 & 2+2 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(-12-9) = 10{,}5.$$

263. Чохбучаглынын саһәси дүстуруна көрә аларыг (шәкил 242):

$$S = \pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) = \pm\frac{1}{2}(-9-27-19-5) = 25,\ S = 25.$$

264. Чохбучаглынын саһә дүстуруна көрә:

$$S = \pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) = 12.$$

265. Саһә дүстуруна көрә

$$S = \pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \pm\frac{1}{2}(-14-24-4-6) = 18.$$

266. Саһә дүстуруна көрә (шәкил 243):

$$S = \pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-30-42-26-4+8) = 46,\ S = 46.$$

267. I ABC отурачагы (шәкил 244) xOy мүстәвиси үзәриндәдир, она көрә пирамиданын DO_1 һүндүрлүјү Oz охуна паралелдир вә D нөгтәсинин xOy мүстәвисиндән олан мәсафәсинә, јә'ни D-нин аппликаты 6-ја бәрабәрдир: $H = DO = 6$. Пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC}\cdot H,$$

бурада

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot AC\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} AB\cdot AC\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

$$AB = \sqrt{(5-3)^2+(11-2)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85},$$

$$AC = \sqrt{(1-3)^2+(13-2)^2} = \sqrt{4+121} = \sqrt{125},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5-3,\ 11-2,\ 0) = (2; 9; 0) \text{ вә}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-2;\ 11; 0)$$

олса, онда

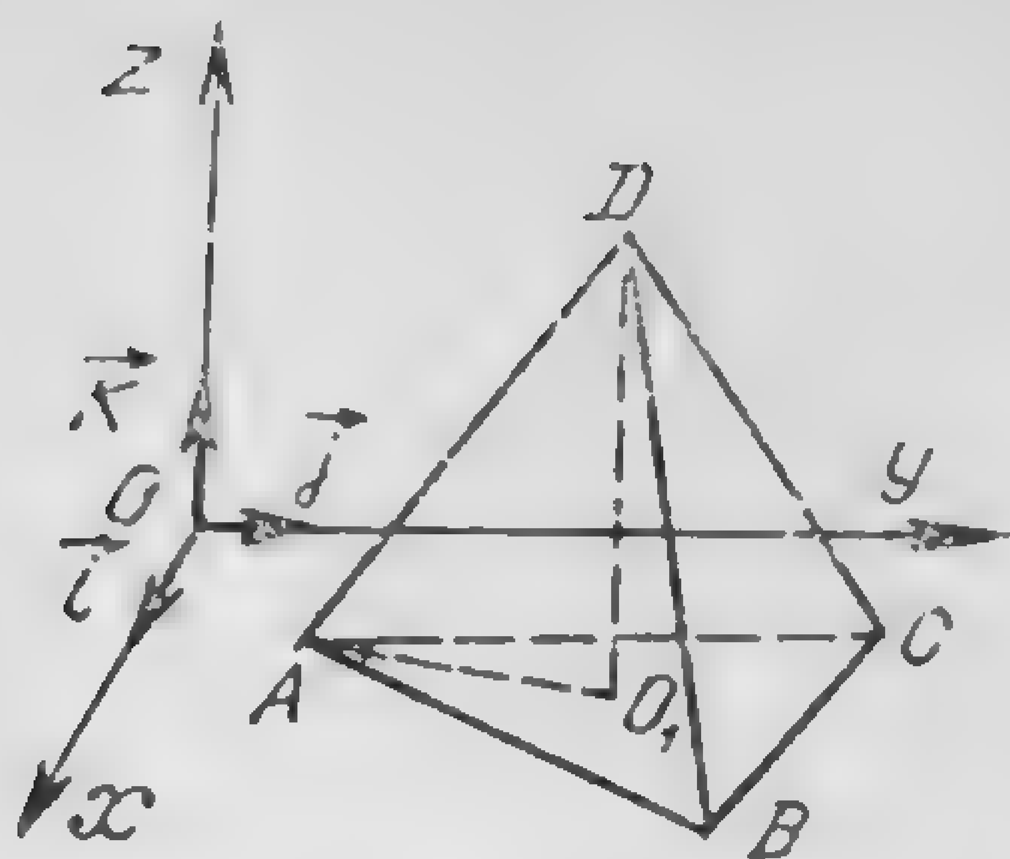
$$\cos\alpha = \cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} =$$

$$= \frac{|(-2)(-2)+(-9)\cdot 11+0|}{\sqrt{4+81+0}\cdot\sqrt{4+121+0}} = \frac{19}{5\sqrt{17}},$$

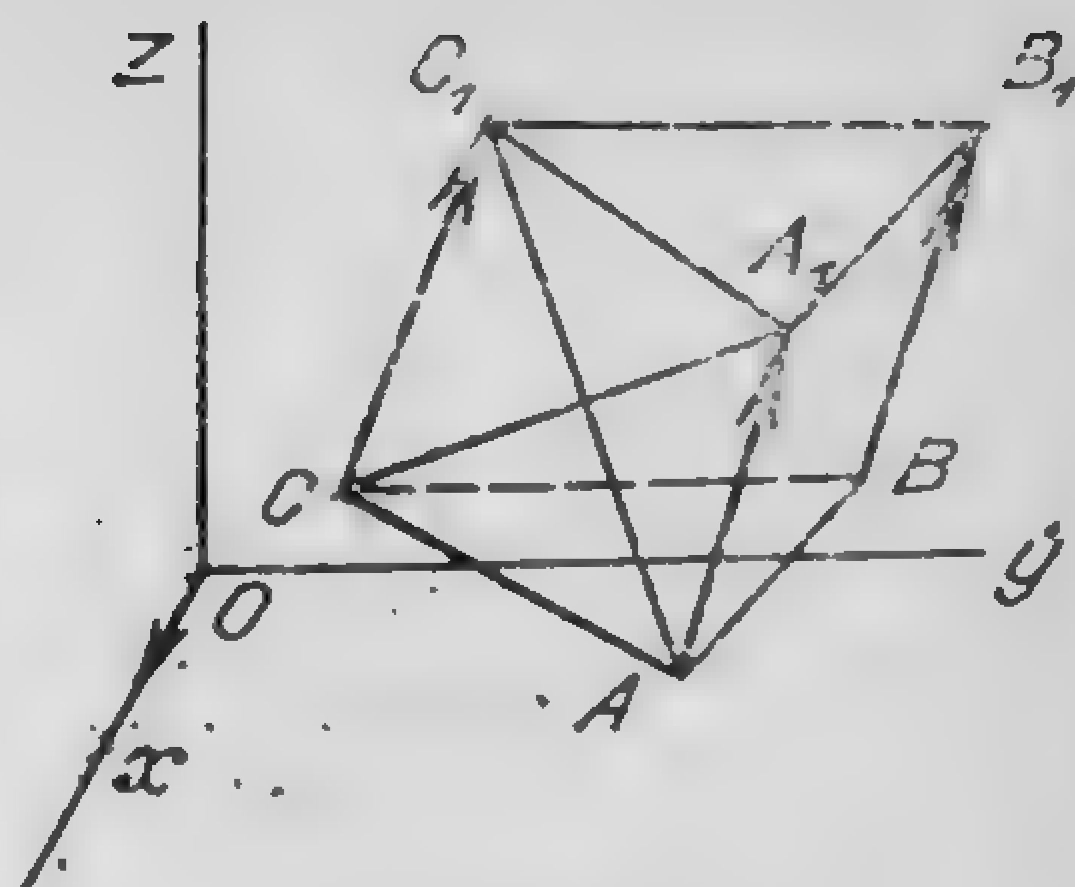
онда $S = \frac{1}{2}\sqrt{85}\cdot\sqrt{125}\cdot\sqrt{1-\frac{361}{425}} = 20$. Демәли,

$$V = \frac{1}{3}\cdot 20\cdot 6 = 40.$$

Һәндәсә курсундан мә'лумдур ки, $ABCD$ пирамидасынын һәчми ихтијари $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторларынын үзәриндә гурулмуш паралелепипедин һәчминин алтыда биринә бәрабәрдир. Бурада $\overrightarrow{AB} = (2;\ 9;\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 11; 0)$ вә $\overrightarrow{AD}\ (0{,}5; 6)$ олдугда үчтәртибли детерминант



Шәкил 244



Шәкил 245

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_1 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

шәклиндә һесабландығына көрә пирамиданын һәчми:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 9 & 0\\ -2 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 240 = 40.$$

268. Әввәлчә A_1 вә C_1 нөгтәләринин координатларыны һесаблаjаг (шәкил 245). Онун үчүн паралел көчүрмә дүстурларындан истифадә едәк.

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = (1-0;\ -1-0;\ 1-3) = (1;\ -1;\ -2)$.
Онда $x_1 = 1 + x$; $y_1 = -1 + y$; $z_1 = -2 + z$.

A вә C нөгтәсинин координатларыны билмәклә

$A_1(2;\ 0;\ -3)$ вә $C_1(2;\ 3,\ -1)$

координатларыны алырыг.

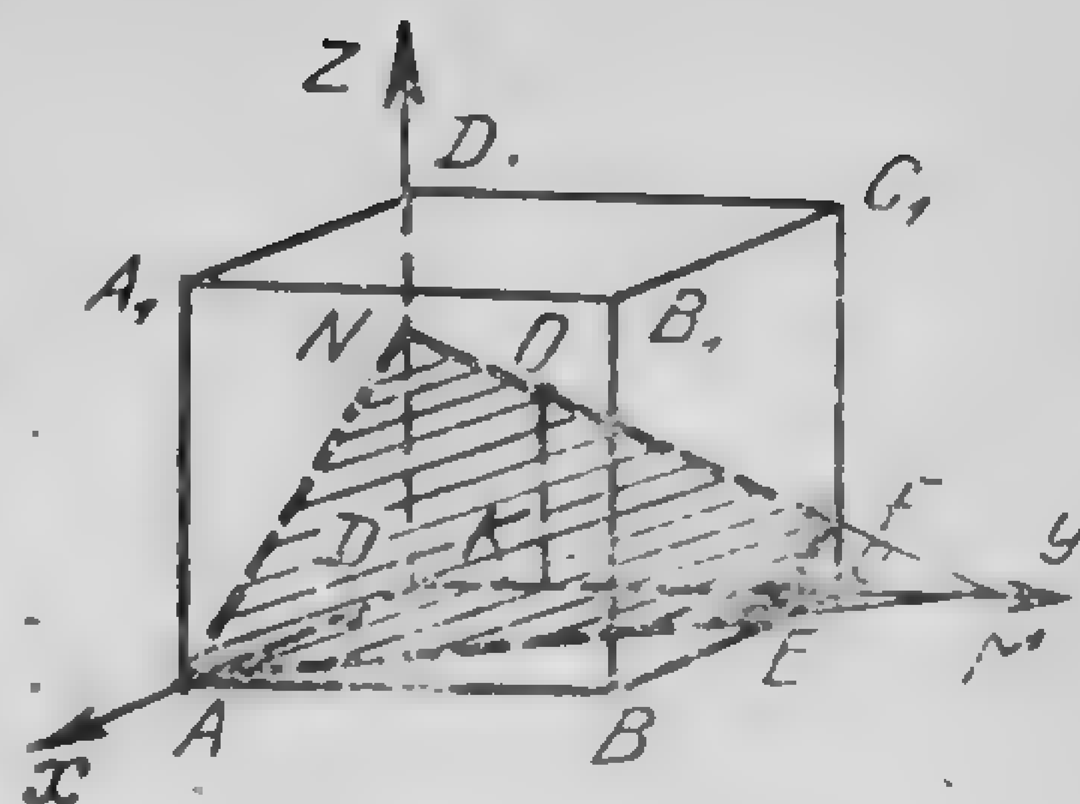
1) $A_1C = \sqrt{(1-2)^2 + (4-0)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{33}$.

2) $\cos\angle AC_1C = \frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{C_1C}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{C_1C}|}$, бурада $AC_1 = (2-1,$

$3-1,\ -1+1) = (1,\ 2,\ 0)$ вә $\overrightarrow{C_1C} = -\overrightarrow{BB_1} = (-1;\ 1{,}2)$,
онда $\cos\angle AC_1C = \frac{1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 0\cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$

$\cos\angle AC_1C = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

273. A илә E нөгтәси еjни бир үз үзәриндә олдуғу үчүн бирләшдирәк. $AE \nparallel DC$ олдуғундан бунларын M нөгтәсиндә кәсишир (шәкил 246). M нөгтәси DD_1C_1 үз мүстәвисинин вә кәсән мүстәвинин ортаг нөгтәси олдуғундан M илә O нөгтәсини бирләшдирәрәк, онда N вә F нөгтәләри гурулмуш олур. Сонра A илә N вә E илә F нөгтәләрини бирләшдирмәклә ахтарылан $ANFE$ кәсиjини алырыг. N нөгтәсинин проjексиjасы D_1O нөгтәсинин проjексиjасы K вә F нөгтәсинин проjексиjасы C олдуғундан кубун тили a олса, $DK = KC = OK = \frac{a}{2}$, EC парчасы ADM үчбучағынын орта хәтти олдуғундан $EC = \frac{a}{2}$ олар. $CM = x$ гәбул едәк, онда $DM = a + x$.



Шәкил 246

$\triangle ADM \backsim \triangle ECM$-дән:

$$\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{EC},\quad \frac{x+a}{x} = \frac{a}{\frac{a}{2}},\quad \frac{x+a}{x} = 2,\quad x = a.$$

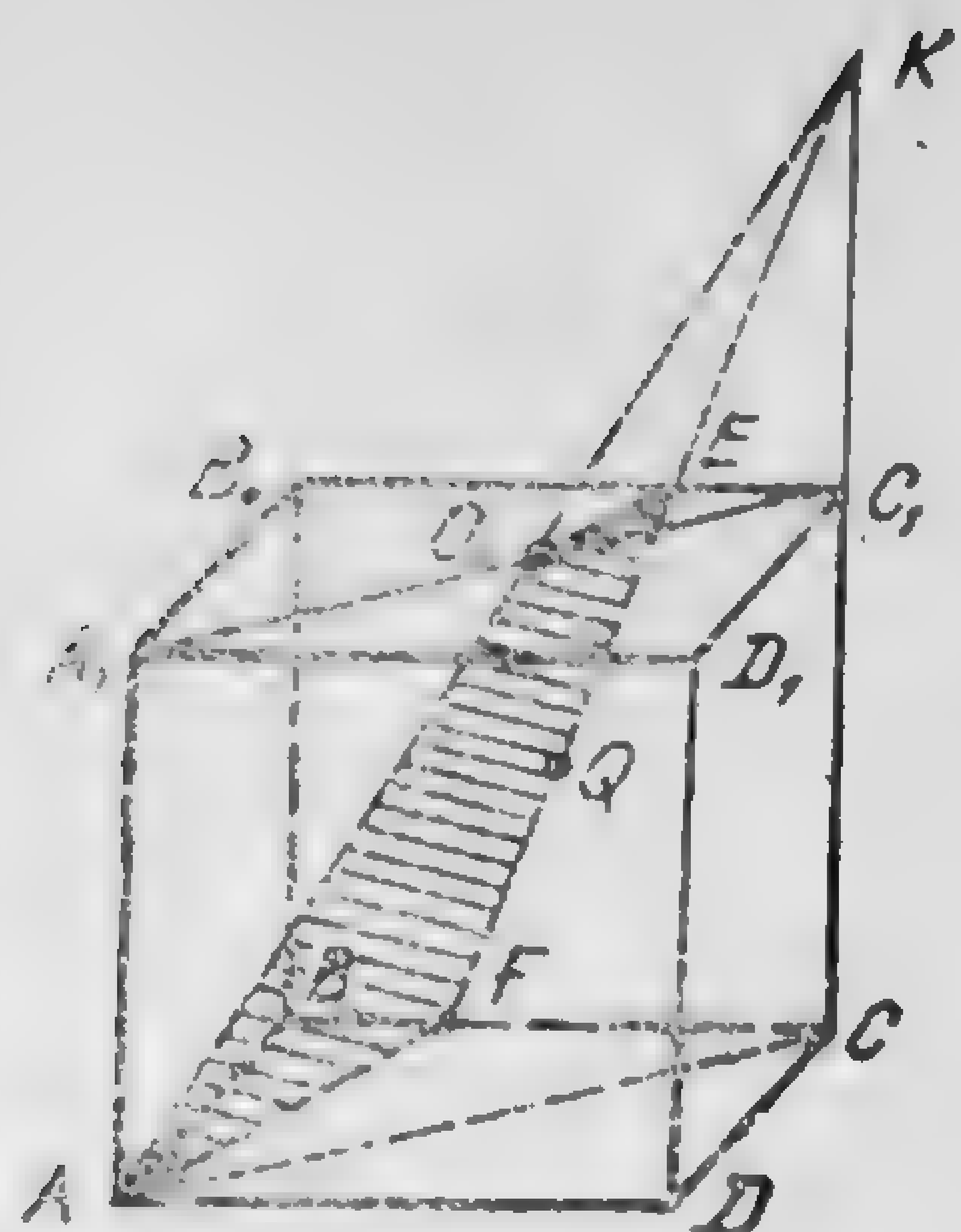
$\triangle OKM \backsim \triangle FCM$-дән:

$$\frac{CF}{OK} = \frac{CM}{KM},\quad CF = \frac{CM\cdot OK}{KM} = \frac{a\cdot\frac{a}{2}}{a + \frac{a}{2}} = \frac{1}{3}a,\quad CF = \frac{1}{3}a.$$

$\triangle NDM \backsim \triangle FCM$-дән:

$$\frac{ND}{CF} = \frac{DM}{CM},\quad ND = \frac{2}{3}a,$$

$S_{ADM} = \frac{1}{2}AD\cdot DM = a^2$, $S_{DECM} = \frac{1}{2}CE\cdot CM = \frac{1}{4}a^2$,
jә'ни $S_{ADM} = a^2$ вә $S_{ECM} = \frac{1}{4}a^2$.



Шəкил 247

Кəсəн $ANFE$ мүстəвисиндəн ашағыда јерлəшəн фигурун һəчми

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ADM}\cdot ND - \frac{1}{3} S_{FCM}\cdot CF = \frac{1}{3}a^2\cdot\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{1}{3}a = \frac{7a^3}{36}.$$

Кубун галан һиссəсинин һəчми

$$V_2 = a^3 - \frac{7a^3}{36} = \frac{29a^3}{36}.$$

$$V_1 : V_2 = \frac{29a^3}{36} : \frac{7a^3}{36} = 29 : 7.$$

274. $AO_1 \nparallel C_1C$ олдуғундан AO_1 вə C_1C дүз хəтлəринин кəсишмə нөгтəси K олсун. K илə BB_1C_1C үзүнүн Q мəркəзини бирлəшдирсəк, кубун кəсијини аларыг. Q нөгтəси B_1C_1CB квадратынын симметрија мəркəзи олдуғундан, онда $B_1E = FC$ олар. AC вə O_1C_1 парчаларыны чəкəк. O_1C_1 парчасы ACK үчбучағынын орта хəттидир. Демəли, $KC_1 = C_1C$ (шəкил 247).

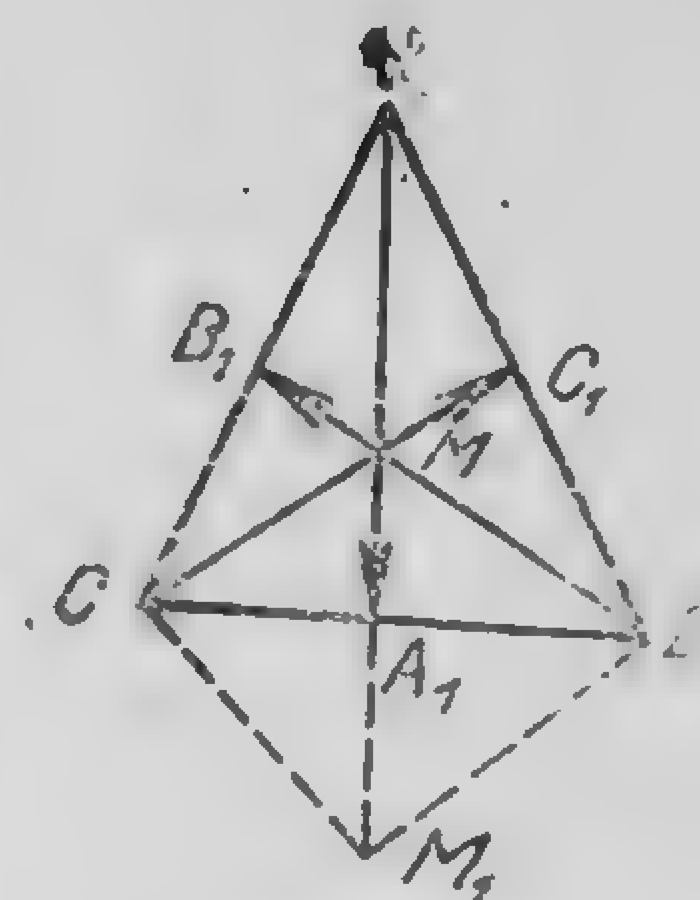
$\triangle KFC \sim \triangle KEC_1$-дəн: $\frac{FC}{EC_1} = \frac{CK}{C_1K}$, $\frac{FC}{EC_1} = \frac{2}{1}$, $FC = B_1E$ олдуғундан $\frac{B_1E}{EC_1} = 2$ олур.

276. Фəрз едəк ки, ABC үчбучағынын AA_1 вə CC_1 медианлары M нөгтəсиндə кəсишир (шəкил 248). A^1 нөгтəси BC парчасынын орта нөгтəси олдуғундан векторларын топланмасына көрə аларыг:

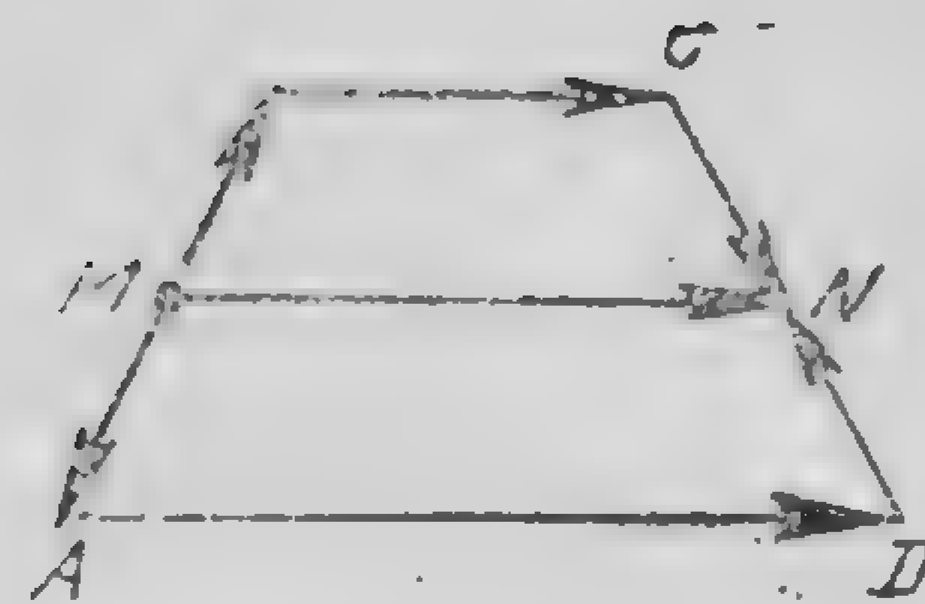
$$\vec{MM_1} = 2\vec{MA_1} = \vec{MB} + \vec{MC} = x\cdot\vec{MA} \qquad (1)$$

$$2\vec{MC_1} = \vec{MB} + \vec{MA} = y\cdot\vec{MC}.$$

Бəрабəрликлəри тəрəф-тəрəфə чыхсаг: $\vec{MC} - \vec{MA} = x\cdot\vec{MA} - y\cdot\vec{MC}$. Векторун коллинеар олмајан ики



Шəкил 248



Шəкил 249

вектора ајрылмасынын јеканəлик шəртинə көрə $x = -1$ вə $-y = 1$ олдуғуну тапырыг. Демəли, $2\vec{MA_1} = -\vec{MA}$, $2\vec{MC_1} = -\vec{MC}$ олур вə векторун əдəдə вурулмасы гајдасына көрə $2|\vec{MA_1}| = |\vec{MA}|$, $2|\vec{MC_1}| = |\vec{MC}|$ олур. Бурадан $|\vec{MA}| : |MA_1| = 2 : 1$, $|MC| : |MC_1| = 2 : 1$. (1) бəрабəрлијиндə $x = -1$ олдуғундан:

$$\vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MA} = 0, \qquad \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA} = 0 \qquad (2)$$

Демəли, M нөгтəси ABC үчбучағында медианларын кəсишмə нөгтəси исə, онда $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$. Тəрс мүнасибəт дə доғрудур: ABC үчбучағы үчүн (2) мүнасибəти доғрудурса, онда M медианларын кəсишмə нөгтəсидир.

277. AB тəрəфинин орта нөгтəси M илə CD тəрəфинин орта нөгтəси N-и бирлəшдирмəклə $ABCD$ трапесијасынын орта хəттини гураг (шəкил 249). Векторларын чохбучаглы үсулу илə топланмасы гајдасына көрə аларыг:

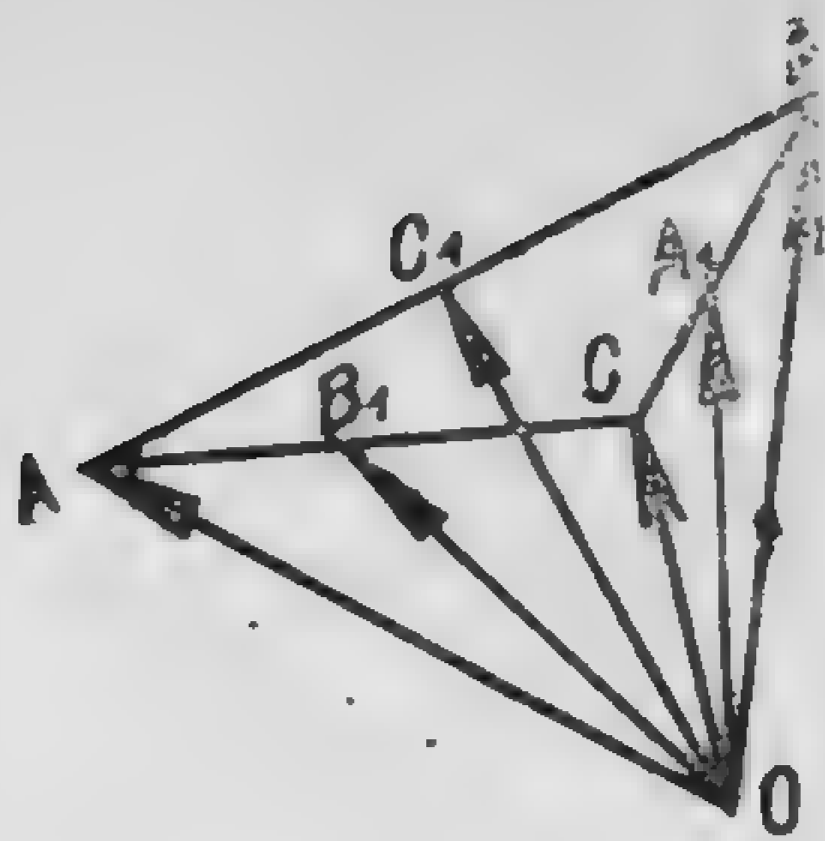
$$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN},$$

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN}.$$

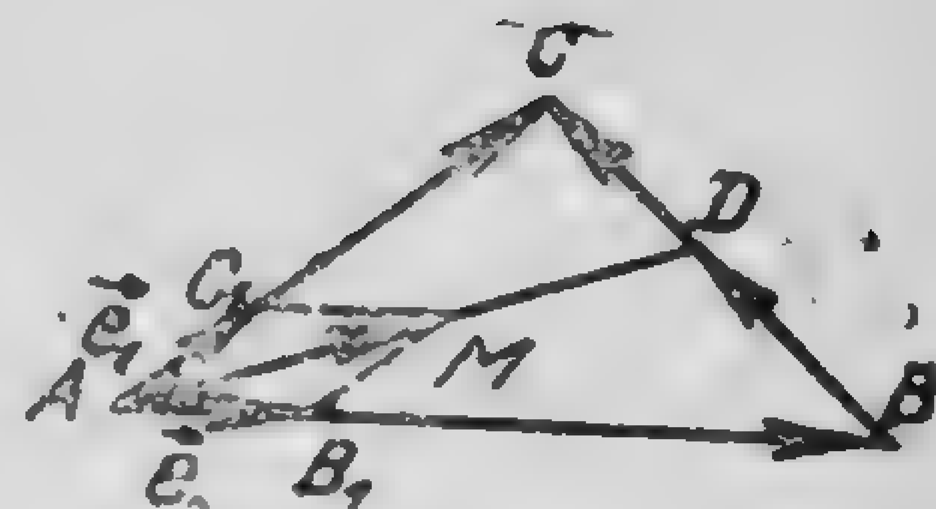
Бəрабəрликлəри тəрəф-тəрəфə топлајаг:

$$2\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{MA} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{CN} + \vec{DN}.$$

Бурада $\vec{MB} + \vec{MA} = 0$ вə $\vec{CN} + \vec{DN} = 0$ (əкс вектор-



Шәкил 250



Шәкил 251

ларын чәми сыфырдыр). Онда $2\vec{MN} = \vec{BC} + \vec{AD}$. Бурада $\vec{BC}$ вә $\vec{AD}$ векторлары еjни истигамәтли векторлардыр вә $\vec{MN}$ бунларла еjни истигамәтлидир. Бу о демәкдир ки, трапесиjанын орта хәтти онун отурачагларына паралелдир. Еjни истигамәтли векторларын чәминин узунлуғу, онларын узунлуглары чәминә бәрабәр олмасы шәртинә көрә

$$2\,|\vec{MN}| = |\vec{AD} + \vec{BC}| = |\vec{AD}| + |\vec{BC}|,$$

бурадан $MN = \frac{|\vec{AD}| + |\vec{BC}|}{2}$.

278. Мәсәләнин шәртинә көрә:

$$\vec{AC_1} = \vec{C_1B},\ \vec{AB_1} = \vec{B_1C}. \qquad (1)$$

$\vec{CA_1} = \vec{A_1B}\cdot(0)$ фәзанын ихтиjари нөгтәси (шәкил 250) олдугда векторларын чыхылмасы гаjдасына көрә:

$$\vec{AC_1} = \vec{OC_1} - \vec{OA} \text{ вә } \vec{C_1B} = \vec{OB} - \vec{OC_1},$$
$$\vec{AB_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA} \text{ вә } \vec{B_1C} = \vec{OC} - \vec{OB_1},$$
$$\vec{CA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OC} \text{ вә } \vec{A_1B} = \vec{OB} - \vec{OA_1}$$

олдуғуну (1)-дә нәзәрә алсаг, онда

$$\begin{aligned}\vec{OC_1} - \vec{OA} &= \vec{OB} - \vec{OC_1},\\ \vec{OB_1} - \vec{OA} &= \vec{OC} - \vec{OB_1},\\ \vec{OA_1} - \vec{OC} &= \vec{OB} - \vec{OA_1}.\end{aligned} \qquad (2)$$

(2) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг, онда $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

279. Фәрз едәк ки, ABC үчбучағынын A бучағынын тәнбөлән хәтти AD парчасыдыр. ABC үчбучағынын A тәпәсиндән AC вә AB тәрәфләри үзәриндә ваhид векторлар $\vec{AC_1} = \vec{e_1}$, $\vec{AB_1} = \vec{e_2}$ аjыраг (шәкил 251). Векторун коллинеарлыг шәртинә көрә $\vec{AC} = b\cdot\vec{e_1}$, $\vec{AB} = c\cdot\vec{e_2}$. Бурада $|AC| = b$, $|AB| = c$. AC_1MB_1 ромбуну гураг. Аjдындыр ки, M нөгтәси AD тәнбөләни үзәриндәдир. Коллинеарлыг шәртинә көрә:

$$\vec{AD} = x(\vec{e_1} + \vec{e_2}),\ x > 0 \text{ вә } \vec{BD} = y\cdot\vec{DC}. \qquad (1)$$

Векторларын чыхылмасы гаjдасыны $\vec{BD}$ вә $\vec{DC}$ векторларына тәтбиг етсәк, онда $\vec{AD} - \vec{AB} = y\cdot(\vec{AC} - \vec{AD})$ олур. $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ вә $\vec{AD}$ векторларынын гиjмәтләрини нәзәрә алсаг, алырыг:

$$x(\vec{e_1} + \vec{e_2}) - c\cdot\vec{e_2} = y(b\cdot\vec{e_1} - x(\vec{e_1} + \vec{e_2})),$$

jахуд

$$x\vec{e_1} + (x - c)\cdot\vec{e_2} = (yb - xy)\cdot\vec{e_1} - xy\,\vec{e_2}.$$

Мүстәви үзәриндә векторун коллинеар олмаjан ики вектора аjрылмасынын jеканәлик шәртинә көрә ашағыдакы тәнлик системини аларыг:

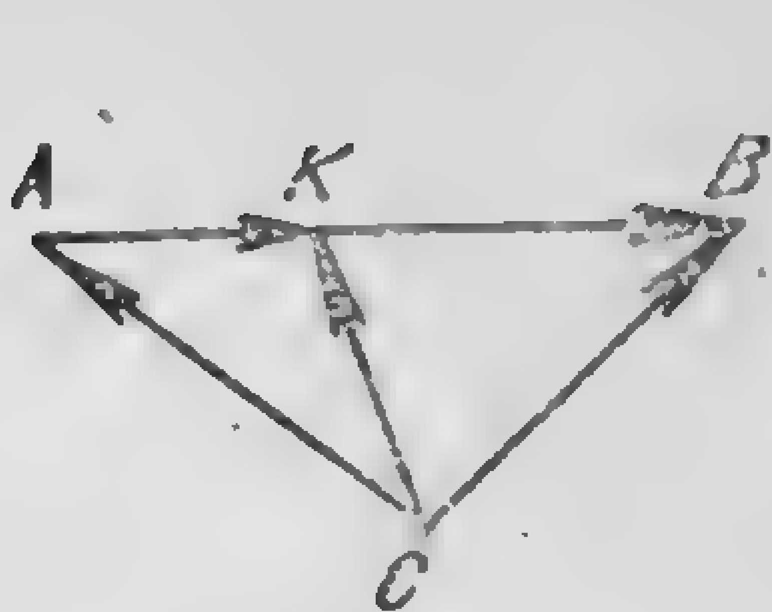
$$\begin{cases} x = yb - xy \\ x - c = -xy \end{cases}$$

Системин 1-чи тәнлиjиндән 2-чи тәнлиjи чыхсаг, $y\cdot b = c$ аларыг. Бурадан $y = c : b = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|}$. (1) мүнасибәтиндән

$$|\vec{BD}| : |\vec{DC}| = |\vec{AB}| : |\vec{AC}|.$$

280. Шәртә көрә $\vec{AK} = 0{,}3\cdot\vec{AB}$. Векторларын чыхылмасына көрә $\vec{AK} = \vec{CK} - \vec{CA}$; $\vec{KB} = \vec{CB} - \vec{CK}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда $\vec{CK} - \vec{CA} = 0{,}3(\vec{CB} - \vec{CK})$ олар. Бурадан $\vec{CK} - \vec{CA} = 0{,}3\vec{CB} - 0{,}3\vec{CK}$; $(1 + 0{,}3)\vec{CK} = 0{,}3\vec{CB} + \vec{CA}$.

193—17



Шәкил 252

Шәкил 253

$$\frac{13}{10}\overrightarrow{CK}=\frac{3}{10}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CK}=\frac{3}{13}\overrightarrow{CB}+\frac{10}{13}\overrightarrow{CA}=$$

$$=\frac{3}{13}\vec{b}+\frac{10}{13}\vec{a},\ \overrightarrow{CK}=\frac{10}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}\ \text{(шәкил 252).}$$

281. Шәртә көрә $\overrightarrow{AK}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{KB}$. $\overrightarrow{AK}$ вә $\overrightarrow{KB}$ векторларын чыхма гајдасына көрә $\overrightarrow{CA}$ вә $\overrightarrow{CB}$ векторлары илә ифадә едәк:

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CK}$ (шәкил 253). Онда $\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CA}=\frac{m}{n}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CK})$. Бурадан

$$\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CA}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}-\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{CK},$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CA}+\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{CK}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{CA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{CB},\ \text{јәни}$$

$$\overrightarrow{CK}=\frac{n}{m+n}\cdot\vec{a}+\frac{m}{m+n}\cdot\vec{b}. \qquad (1)$$

282. Верилән үчбучагларын медианларынын кәсишмә нөгтәләри M вә M_1 олсун (шәкил 254). Фәзанын ихтијари O нөгтәси вә ABC үчбучағында M, медианларын кәсишмә нөгтәси олдугда

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

вектор дүстуруна көрә аларыг:

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})-$$

$$-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}((\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA})+$$

$$+(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}))=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}).$$

Демәли, $|\overrightarrow{MM_1}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+$ [illegible] $|=$

$$=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AA_1}|+|\overrightarrow{BB_1}|+|\overrightarrow{CC_1}|)=\frac{1}{3}(a+b+c).$$

$AA_1\ BB_1\ CC_1$ коллинеар векторлардыр (ABC үчбучағынын тәпәләри α мүстәвисиндән бир тәрәфдә олдуғу үчүн). A тәпәси α мүстәвисиндән бир тәрәфдә, B вә C исә α мүстәвисиндән о бири тәрәфдә олса, онда AA_1 вектору CC_1 вә BB_1 векторларынын әкс истигамәтиндә олдуғундан

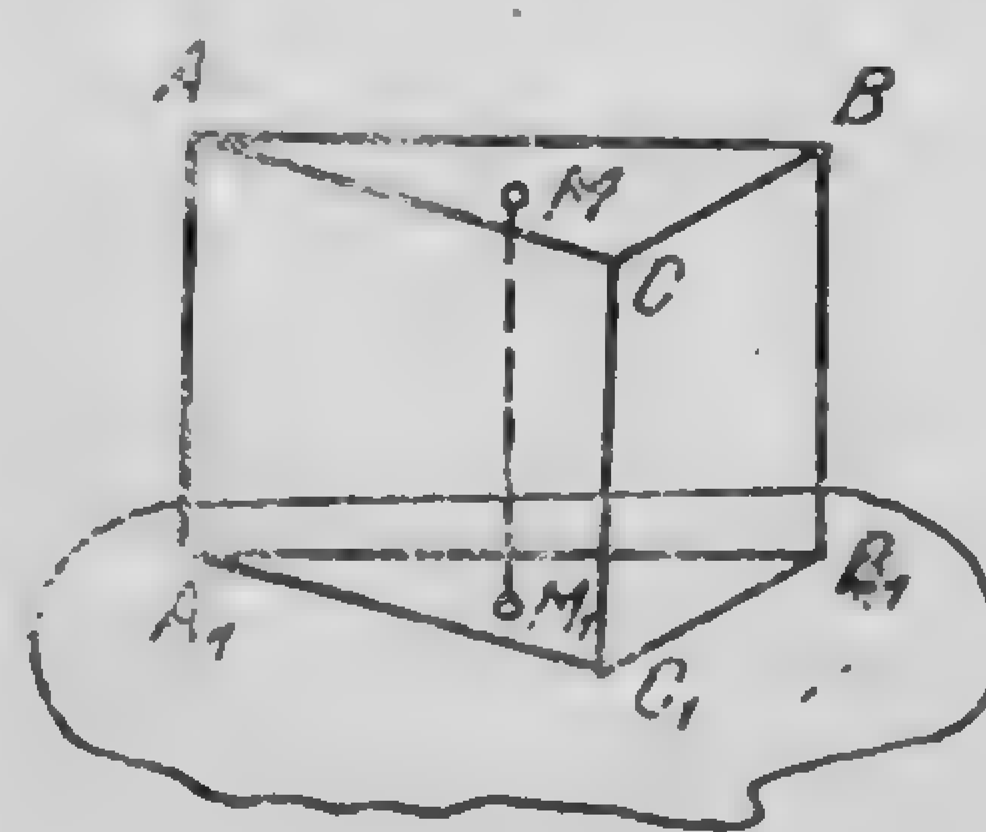
$$|\overrightarrow{MM_1}|=\frac{1}{3}(b+c-a).$$

283. Призманын һәчмини $V=S\cdot H=S_{1кәс}\cdot b$ дүстуруна көрә һесаблајаг. Бурада перпендикулјар кәсијин саһәси

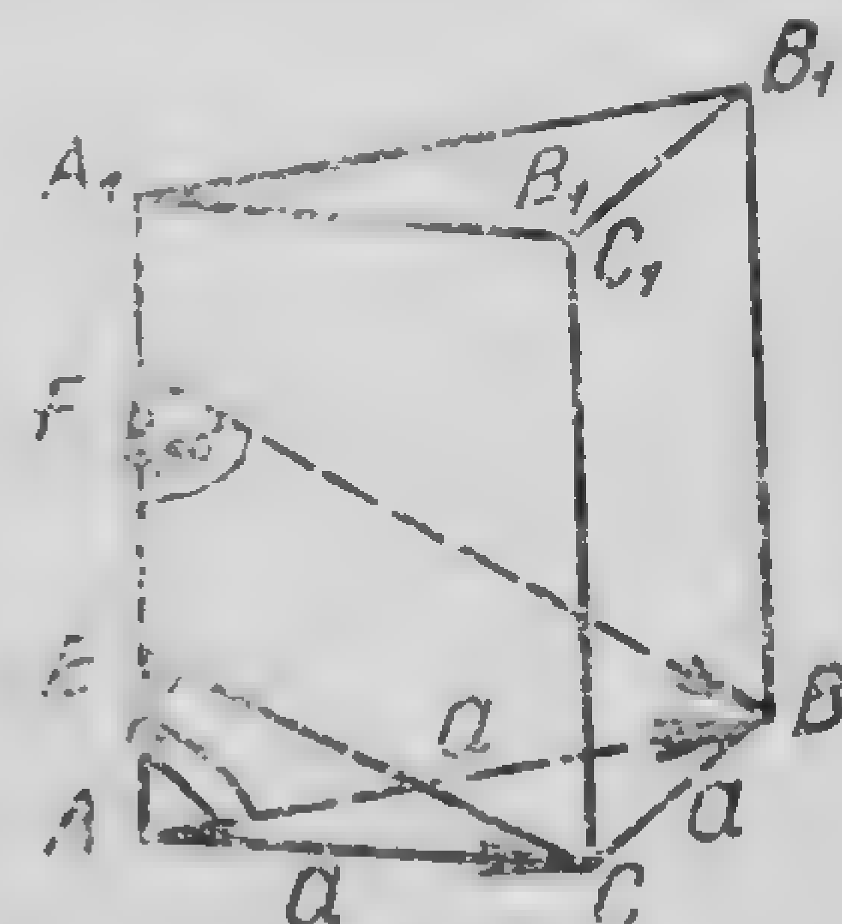
$$S=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{EC}|\cdot|\overrightarrow{FB}|\cdot\sin(\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{FB}).$$

Бурада $(\widehat{\overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{FB}})=\varphi$ ишарә едәк. φ бучағы AA_1 тилиндәки $\overrightarrow{EC}$ вә $\overrightarrow{FB}$ векторларынын әмәлә кәтирдији бучагдыр. AEC вә AFB дүзбучаглы үчбучагларындан аларыг:

$\overrightarrow{AE}=a\cdot\cos\alpha$, $|EC|=a\sin\alpha$, $|\overrightarrow{AF}|=a\cos\beta$, $|FB|=a\sin\beta$



Шәкил 254



Шәкил 255

Векторларын чыхылмасы гаjдасына көрә аларыг:
$\vec{EC}=\vec{AC}-\vec{AE}$, $\vec{FB}=\vec{AB}-\vec{AF}$ (шәкил 255).
Бу векторларын скалjар hасили

$$\vec{EC}\cdot\vec{FB}=(\vec{AC}-\vec{AE})\cdot(\vec{AB}-\vec{AF}),$$ бурадан:

$$\vec{EC}\cdot\vec{FB}=\vec{AC}\cdot\vec{AB}-\vec{AE}\cdot\vec{AB}-\vec{AC}\cdot\vec{AF}+\vec{AE}\cdot\vec{AF} \qquad (1)$$

$$\vec{EC}\cdot\vec{FB}=|\vec{EC}|\cdot|\vec{FB}|\cdot\cos\varphi=a^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi,$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{AB}=|\vec{AC}|\cdot|\vec{AB}|\cos 60°=\frac{a^2}{2},$$

$$\vec{AE}\cdot\vec{AB}=|\vec{AE}|\cdot|\vec{AB}|\cos\beta=a^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{AF}=|\vec{AC}|\cdot|\vec{AF}|\cdot\cos\alpha=a^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

$$|\vec{AF}|\ \vec{AE}\cdot\vec{AE}|=\cdot|\vec{AF}|\cos 0°=a^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Бу гиjмәтләри (1) бәрабәрлиjиндә jазсаг, аларыг:

$$\cos\varphi=\frac{1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Перпендикулjар кәсиjин саhәси

$$S=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-\frac{(1-(2\cos\alpha\cdot\cos\beta))_2}{4\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\sqrt{3-4(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta)}$$ олдугда

призманын hәчми

$$V=\frac{a^2b}{4}\sqrt{3-4(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta)}.$$

284. $\vec{BA}=\vec{a}$, $\vec{BB_1}=\vec{b}$, $\vec{BC}=\vec{c_1}$, үмуми hалда бу векторларын hәр биринин узунлуғуну m илә ишарә едәк (шәкил 256). Векторларын топланмасы гаjдасына көрә

$$\vec{BC_1}=\vec{BC}+\vec{CC_1}=\vec{c}+\vec{b},$$

векторларын чыхылмасына көрә

$$\vec{AC}=\vec{BC}-\vec{BA}=\vec{c}-\vec{a}$$

олар. Векторларын скалjар hасилинин тә'рифинә көрә

$$\cos(\vec{BC_1},\widehat{\ }\vec{AC})=\frac{\vec{BC_1}\cdot\vec{AC}}{|\vec{BC_1}|\cdot|\vec{AC}|}.$$

Бурада $\vec{BC_1}\cdot\vec{AC}=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}^2-$
$-\vec{a}\vec{c}=c^2-a\cdot c\cdot\cos 60°=m^2-m^2\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}m^2.$

$\vec{BC_1}^2=(\vec{b}+\vec{c})^2=2m^2$, $|BC_1|=m\sqrt{2}$ вә $|\vec{AC}|=m$

$$\cos(\vec{BC_1},\widehat{\ }\vec{AC})=\frac{\frac{1}{2}m^2}{m^2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0{,}3536$$

олдуғундан ахтарылан буҹаг $\alpha=69°18'$.

Аналожи олараг $\cos(\vec{BC_1},\widehat{\ }\vec{A_1C})=\cos\beta=\frac{1}{4}$, $\cos\beta=0{,}25$, $\beta=75°31'$.

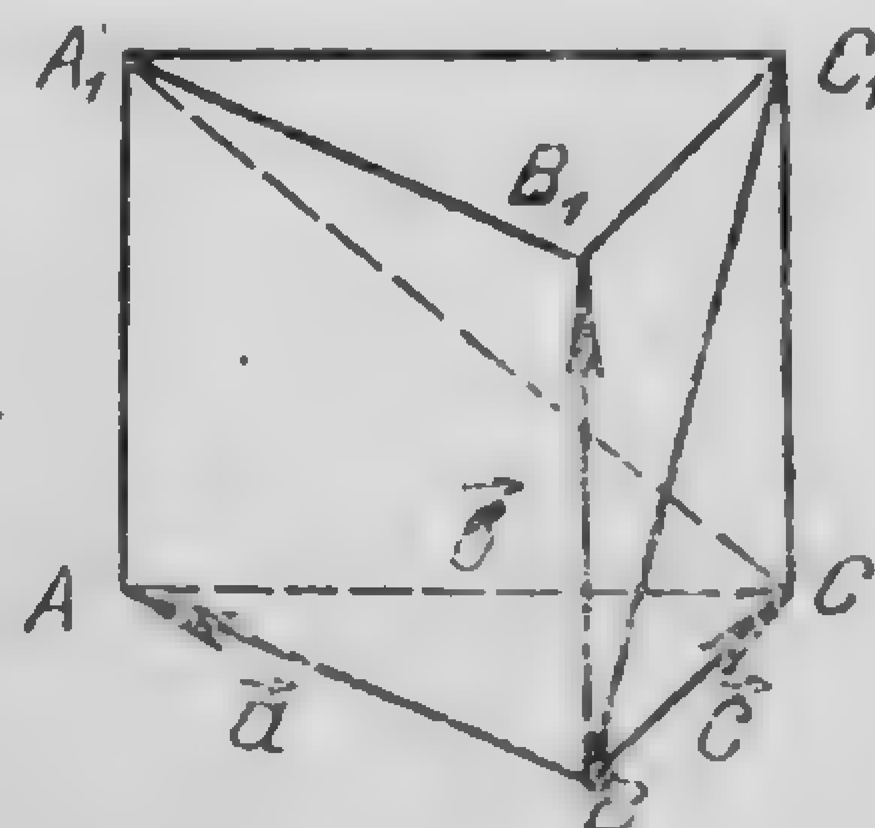
285. Паралелепипед гаjдасына көрә (шәкил 257)

$\vec{BD_1}=\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{BB_1}$ вә $\vec{AC_1}=\vec{AB}+\vec{AA_1}+\vec{AD}$
аларыг.

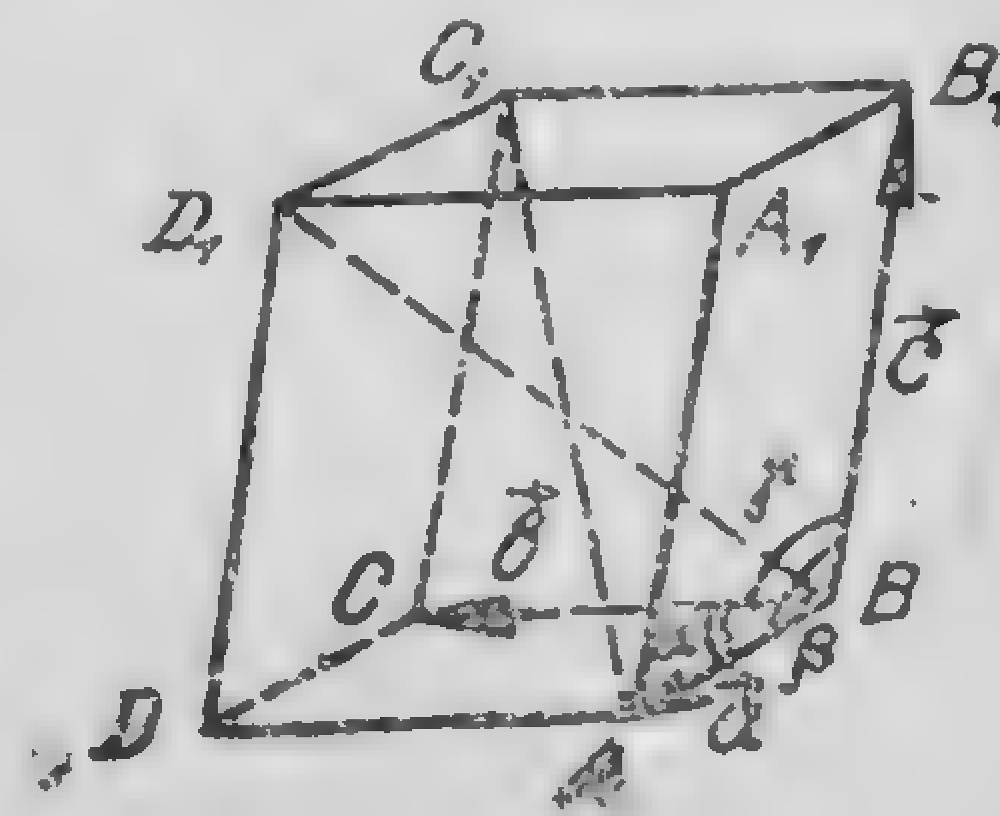
$$\vec{BD_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{AC_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

Бәрабәрликләри квадрата jүксәлтсәк, онда

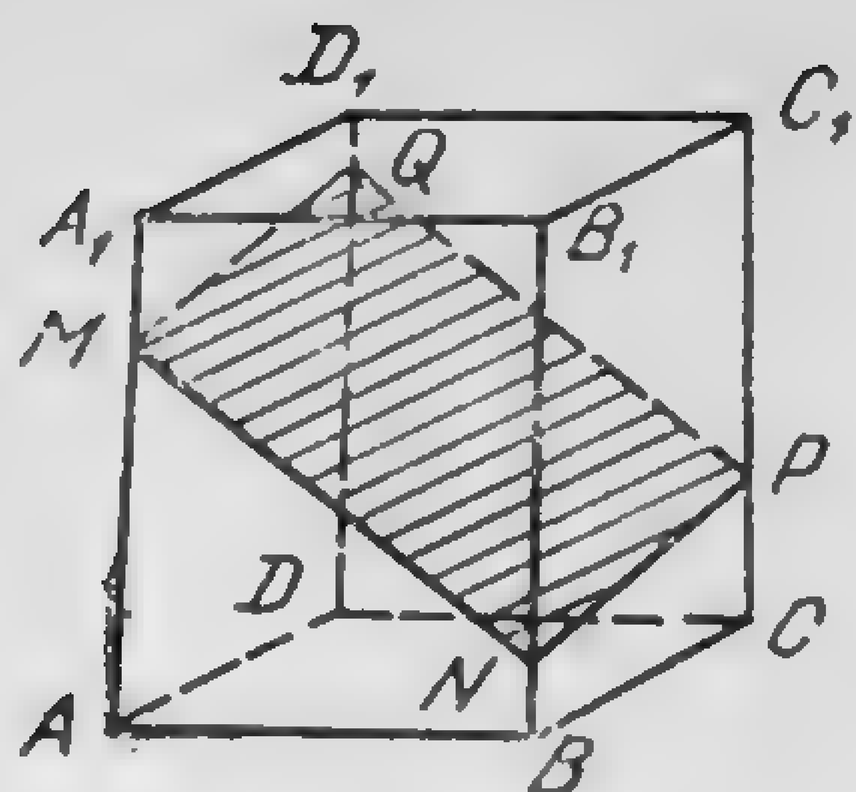
$$\vec{BD_1}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2ab\cos\alpha+$$
$$+2ac\cdot\cos\beta+2bc\cos\gamma,$$
$$\vec{AC_1}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2ab\cos\alpha-2ac\cos\beta+2bc\cos\gamma.$$



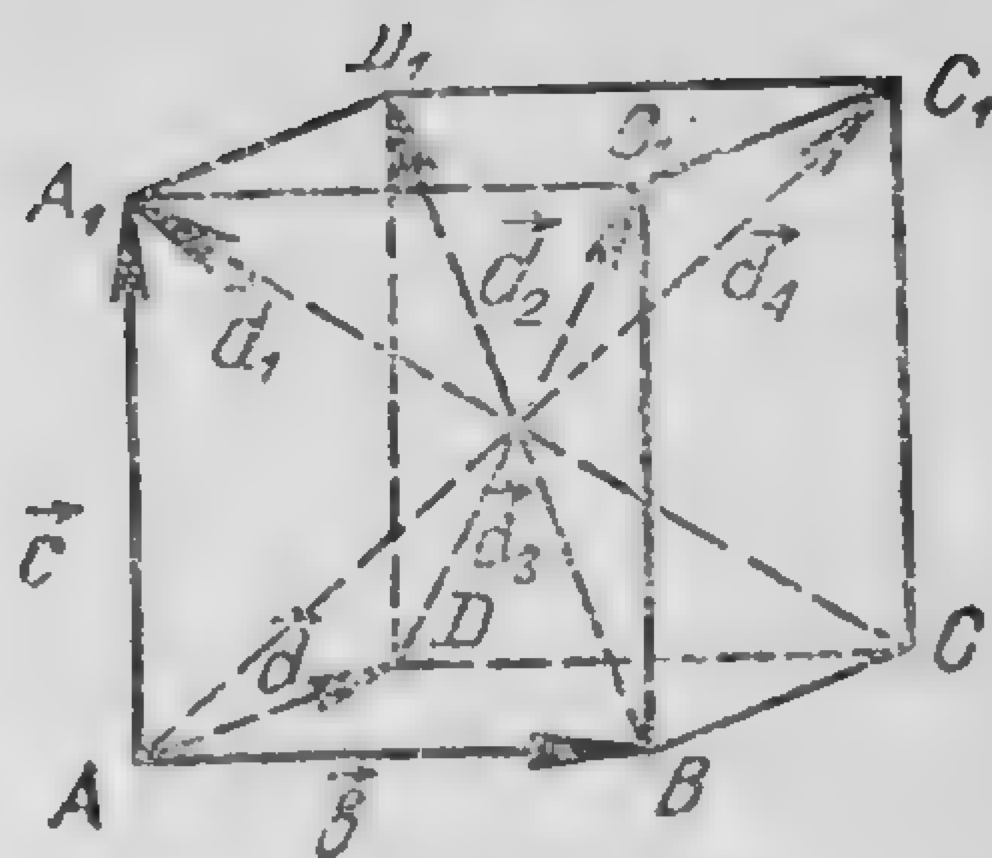
Шәкил 256



Шәкил 257



Шәкил 258



Шәкил 259

286. Фәрз едәк ки, $MNPQ$ кәсији (шәкил 258) отурачаг мүстәвиси ABC илә 45° бучаг әмәлә кәтирир. Бу кәсијин отурачаг мүстәвиси үзәринә ортогонал проjексиjасы $ABCD$ олдуғу үчүн $S_{ABCD} = S_{MNPQ}\cos 45°$ олар. Бурадан

$$S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45°} = 10\sqrt{2}.$$

287. Фәрз едәк ки, $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $AA_1 = c$, $\vec{AC_1} = \vec{d}_1$, $\vec{BD_1} = \vec{d}_2$, $\vec{CA_1} = \vec{d}_3$, $\vec{DB_1} = \vec{d}_4$ (шәкил 259).

Онда $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a}_3 = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{d}_4 = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Бурадан

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1^{\,2} &= a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}\\
\vec{d}_2^{\,2} &= a^2 + b^2 + c^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}\\
\vec{d}_3^{\,2} &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a}\\
\vec{a}_4^{\,2} &= a^2 + b^2 + c^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a}
\end{aligned} \qquad (1)$$

(1) бәрабәрликләрини һәдбәһәд топласаг аларыг:

$$\vec{d}_1^{\,2} + \vec{a}_2^{\,2} + \vec{d}_3^{\,2} + \vec{d}_4^{\,2} = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

288. Отурачағын саһәси $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\alpha$ (шәкил 260). Пирамиданын јан сәтһи

$$S_{jan} = \frac{S_{ABC}}{\cos\beta} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\beta}$$

олдуғундан, онун там сәтһи $S_{там} = S_{jan} + S_{отр} =$

$$= \frac{1}{2}a^2\sin\alpha + \frac{1}{2}a^2\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right);\ S_{там} = a^2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} : \cos\beta.$$

289. $\vec{S} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OD}$, бурада O нөгтәси $ABCD$ тетраедринин харичинә чәкилмиш сферанын мәркәзидир. Бурадан $S^2 = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OD})^2 \geqslant 0$.

Квадрата јүксәлдикдән сонра аларыг:

$$4R^2 + 2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OB} + 2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OC} - 2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OD} +$$
$$+ 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{OC} - 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{OD} - 2\cdot\vec{OC}\cdot\vec{OD} \geqslant 0.$$

$$2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - (\vec{OA} - \vec{OB})^2 = R^2 + R^2 - c_1^2,$$

jә'ни

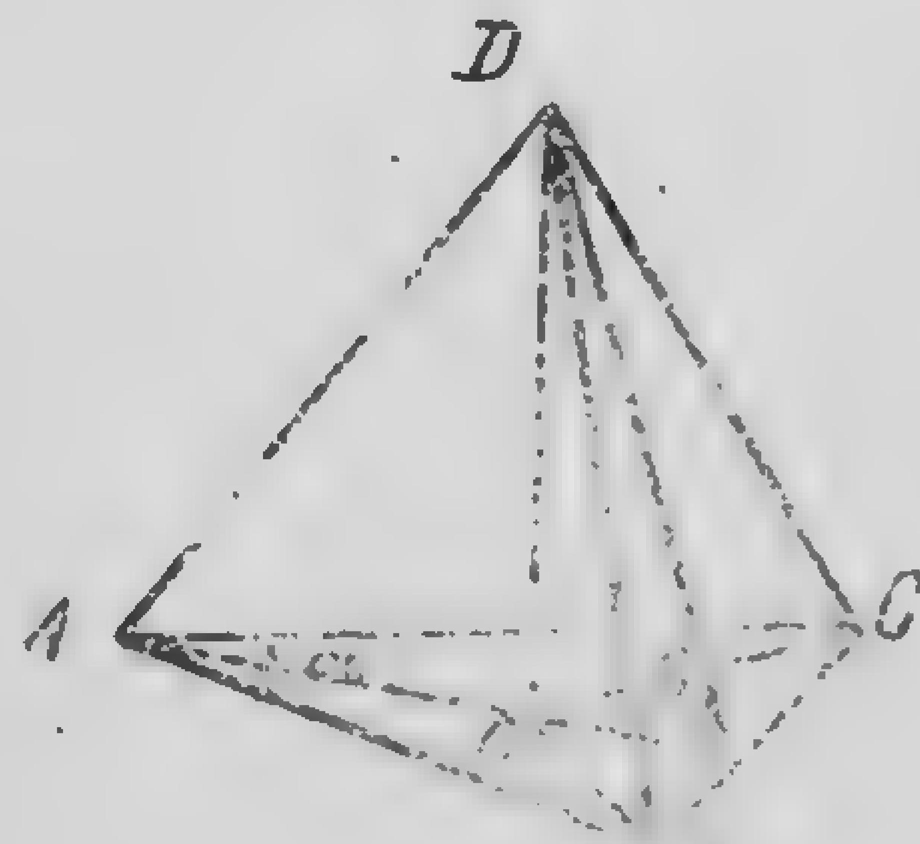
$$2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 2R^2 - c_1^2;\quad 2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OC} = 2R^2 - b_1^2;$$

$$2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OD} = 2R^2 - a^2;$$

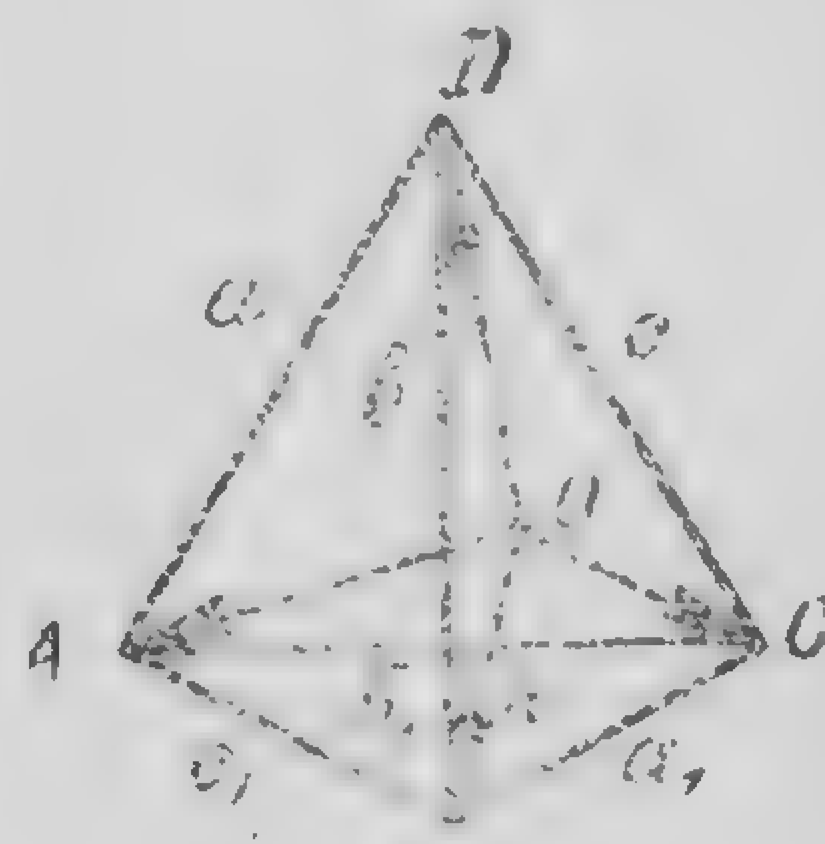
$$2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{OC} = 2R^2 - a_1^2;\ 2\cdot\vec{OB}\cdot\vec{OD} = 2R^2 - b^2$$

$2\cdot\vec{OC}\cdot\vec{OD} = 2R^2 - c^2$ олдуғундан

$$4R^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 0, \text{ јахуд}$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \leqslant 4R^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$



Шәкил 260



Шәкил 261

Бәрабәрлик мүнасибәти $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\cdot\vec{OM}$ олдугда өдәнир, бурада M нөгтәси ABC үчбучағынын медианларынын кәсишмә нөгтәсидир (шәкил 261).

290. $ABCD$ тетраедринин AA_1 медианыны DM вә DA_1 векторларыны гураг (шәкил 262).

$$\vec{CK} = \frac{n}{m+n}\cdot\vec{a} + \frac{m}{m+n}\cdot\vec{b}$$

дүстуруну тәтбиг етсәк, аларыг: BDC үчбучағы үчүн

$$\vec{DA_1} = \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{DC}$$

$\triangle ADA_1$ үчүн $\vec{DM} = \frac{7}{10}\vec{DA} + \frac{3}{10}\vec{DA_1}$ олар.

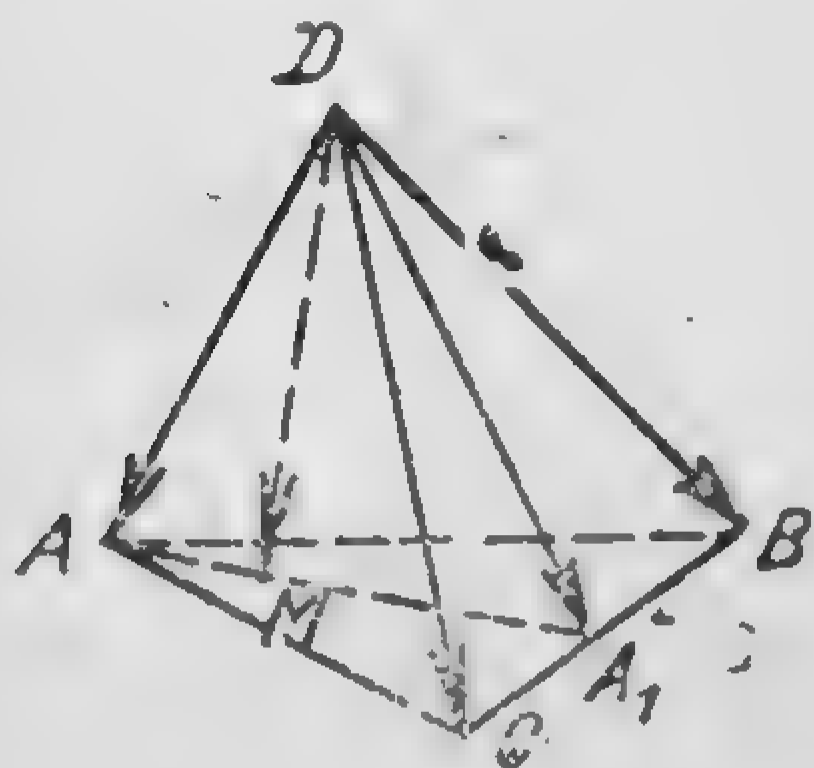
Бурадан $\vec{DM} = \frac{7}{10}\vec{DA} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{DC}\right) =$

$= \frac{7}{10}\vec{DA} + \frac{3}{20}\cdot\vec{DB} + \frac{3}{20}\cdot\vec{DC}$, јә'ни

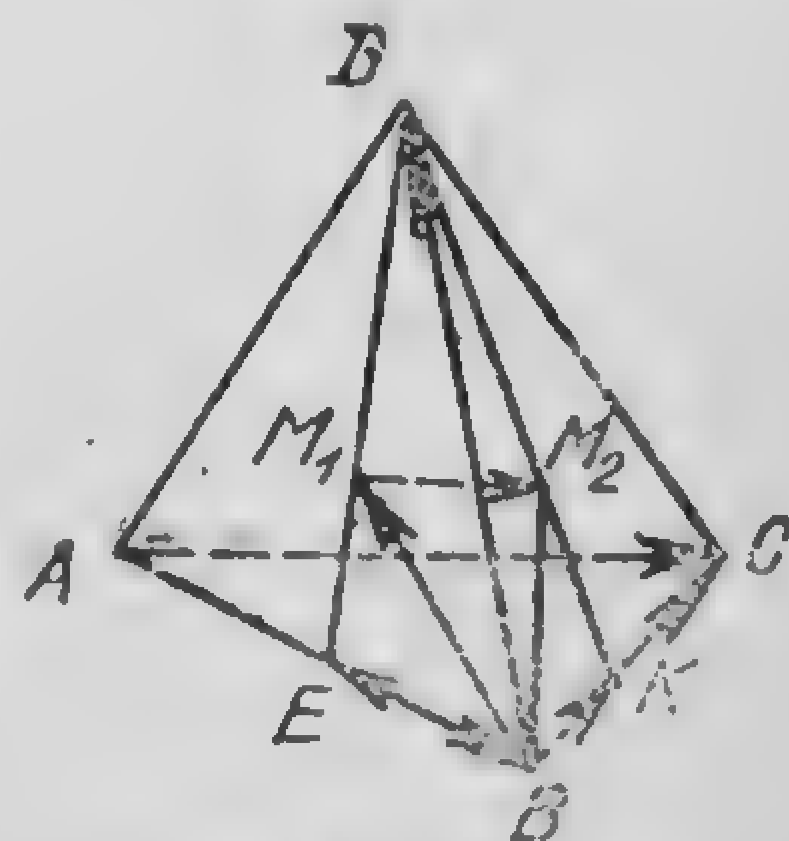
$$\vec{DM} = \frac{7}{10}\vec{DA} + \frac{3}{20}\cdot\vec{DB} + \frac{3}{20}\cdot\vec{DC}.$$

291. *Чаваб.* $|\vec{M_1M_2}| : |\vec{AC}| = 1:3$.

Көстәриш: $ABCD$ тетраедриндә DE вә DK парчалары ујғун оларағ, ADB вә CDB үзләринин медианлары олдуғуну нәзәрә алараг векторларын топланмасынын $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ үчбучаг гајдасындан истифадә един (шәкил 263).



Шәкил 262



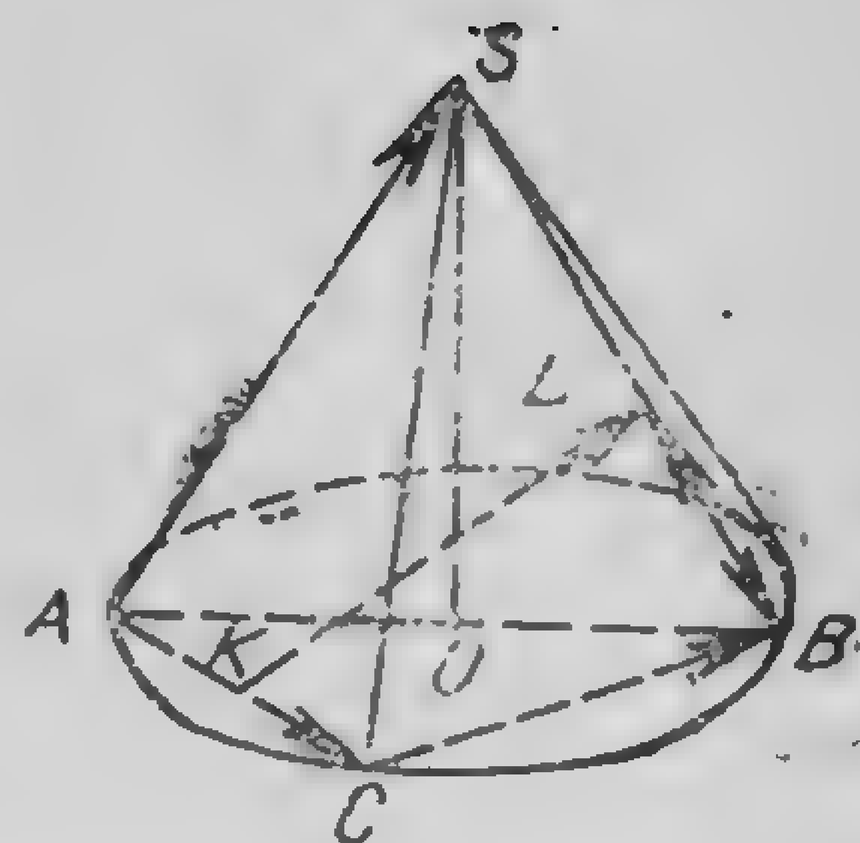
Шәкил 263

292. ASC үчбучағында $|\vec{AS}| = |\vec{SC}| = 2R$ вә $\smile AC = 60°$ олдуғу үчүн $|\vec{AC}| = a_6 = R$. Косинуслар теореминә көрә

$(2R)^2 = (2R)^2 + R^2 - 2\times$

$\times 2R\cdot R\cos(\vec{AS}\,\hat{,}\,\vec{AC})$,

бурадан $\cos(\vec{AS}\,\hat{,}\,\vec{AC}) = \frac{1}{4}$ (шәкил 264). BCS үчбучағында $|\vec{BS}| = |\vec{CS}| = 2R$, $|\vec{CB}| = a_3 = R\sqrt{3}$ олдуғу үчүн косинуслар теореминә көрә



Шәкил 264

$(2R)^2 = (2R)^2 + 3R^2 - 2R\sqrt{3}R\cos(\vec{CB}\,\hat{}\,\vec{SB})$ вә бурадан $\cos(\vec{CB}\,\hat{,}\,\vec{SB}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Векторларын чыхылмасы гајдасына көрә $\vec{SB} = \vec{AB} - \vec{AS}$. Инди $\vec{AC}$ вә $\vec{SB}$ векторларынын скалјар һасилини тапаг:

$$\vec{AC}\cdot\vec{SB} = \vec{AC}\cdot(\vec{AB} - \vec{AS}) = \vec{AC}\cdot\vec{AB} - \vec{AC}\cdot\vec{AS}$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{SB} = R\cdot 2R\cos(\vec{AC}\,\hat{,}\,\vec{SB}),$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{AB} = R\cdot 2R\cos 60°,$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{AS} = R\cdot 2R\cdot\cos(\vec{AC}\,\hat{,}\,\vec{AS})$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, $\cos(\vec{AC}, \vec{SB}) = \frac{1}{4}$. AC вә SB чарпаз дүз хәтләри арасындакы мәсафәни KL илә ишарә едәк. Векторларын топланмасына әсасән $\vec{KL} = \vec{KC} + \vec{CB} + \vec{BL}$. Бурада $\vec{KC} = x\cdot\vec{AC}$ вә $\vec{LB} = y\cdot\vec{SB}$ гәбул едәк. Онда $\vec{KL} = x\cdot\vec{AC} + \vec{CB} - y\cdot\vec{SB}$, $\vec{KL}\perp\vec{AC}$ вә $\vec{KL}\perp\vec{SB}$ олдуғу үчүн $\vec{KL}\cdot\vec{AC} = 0$ вә $\vec{KL}\cdot\vec{SB} = 0$, јә'ни

$$\vec{KL}\cdot\vec{AC} = x\cdot\vec{AC}^2 + \vec{CB}\cdot\vec{AC} - y\cdot\vec{SB}\cdot\vec{AC} = 0 \text{ вә}$$

$$\vec{KL}\cdot\vec{SB} = x\cdot\vec{AC}\cdot\vec{SB} + \vec{CB}\cdot\vec{SB} - y\cdot SB^2 = 0,$$

$$x\cdot R^2+R\sqrt{3}\cdot R\cdot\cos 90^\circ-y2R\cdot R\cdot\frac{1}{4}=0 \text{ вә}$$

$$x\cdot R\cdot 2R\cdot\frac{1}{4}+R\sqrt{3}\cdot 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-y\cdot 4R^2=0,$$

јахуд

$$\begin{cases}x-\dfrac{y}{2}=0\\[2mm] \dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-4y=0,\end{cases}$$

бурадан $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{2}{5}$ вә $\vec{KL}=\frac{1}{5}\vec{AC}+\vec{CB}-\frac{2}{5}\vec{SB}$ векторунун скалјар квадратыны тапсаг:

$$\vec{KL}^2=\frac{1}{25}\vec{AC}^2+\vec{CB}^2+\frac{4}{25}\vec{SB}^2-\frac{4}{25}\vec{AC}\cdot\vec{SB}+$$

$$+\frac{2}{5}\vec{AC}\cdot\vec{CB}-\frac{4}{5}\vec{CB}\,\vec{SB}=\frac{1}{25}R^2+3R^2+$$

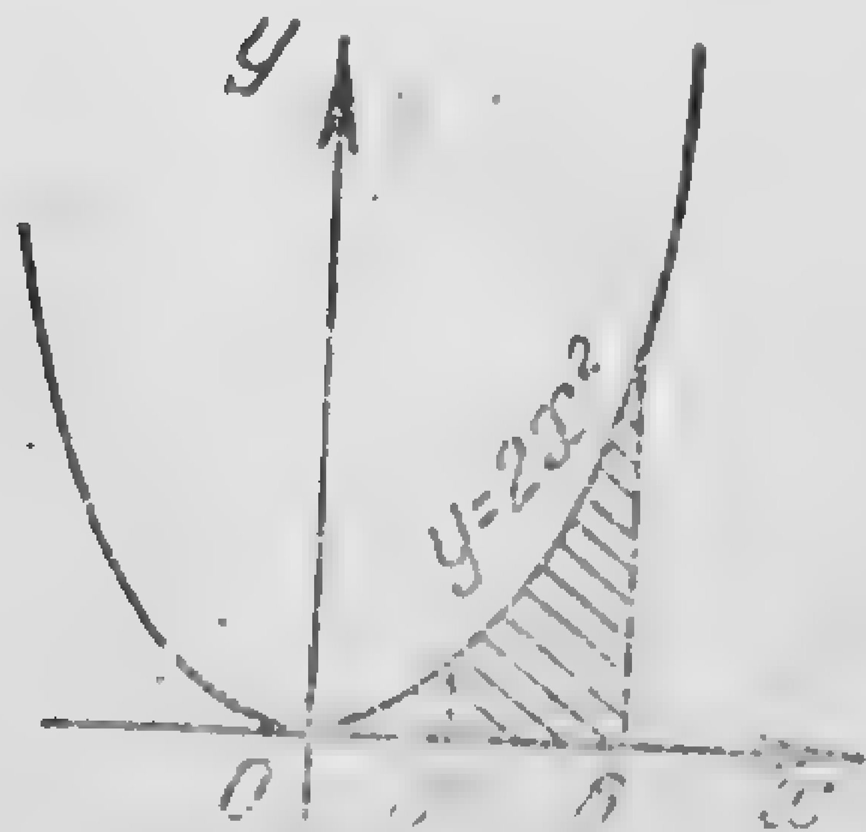
$$+\frac{4}{25}\cdot 4R^2-\frac{4}{25}R\cdot 2R\cdot\frac{1}{4}-\frac{4}{5}R\sqrt{3}\cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{12}{5}R^2,$$

$KL^2=\frac{12}{5}R^2$, бурада $KL=2\sqrt{15}$ олдуғундан $R=5$.

Конусун сәтһи $S=\pi R(R+l)=3\pi R^2=75\pi$ (см^2) вә һәчми $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, бурада $H^2+R^2=l^2$ олдуғундан

$$V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}\,R^3=\frac{125\sqrt{3}}{3}\text{ см}^3.$$

293. $y=f(x)$ әјриси, $x=a$; $x=b$ вә $y=0$ (шәкил 265) илә һүдудланмыш саһә $S=\int_a^b f(x)\,dx$ олдуғуна көрә:

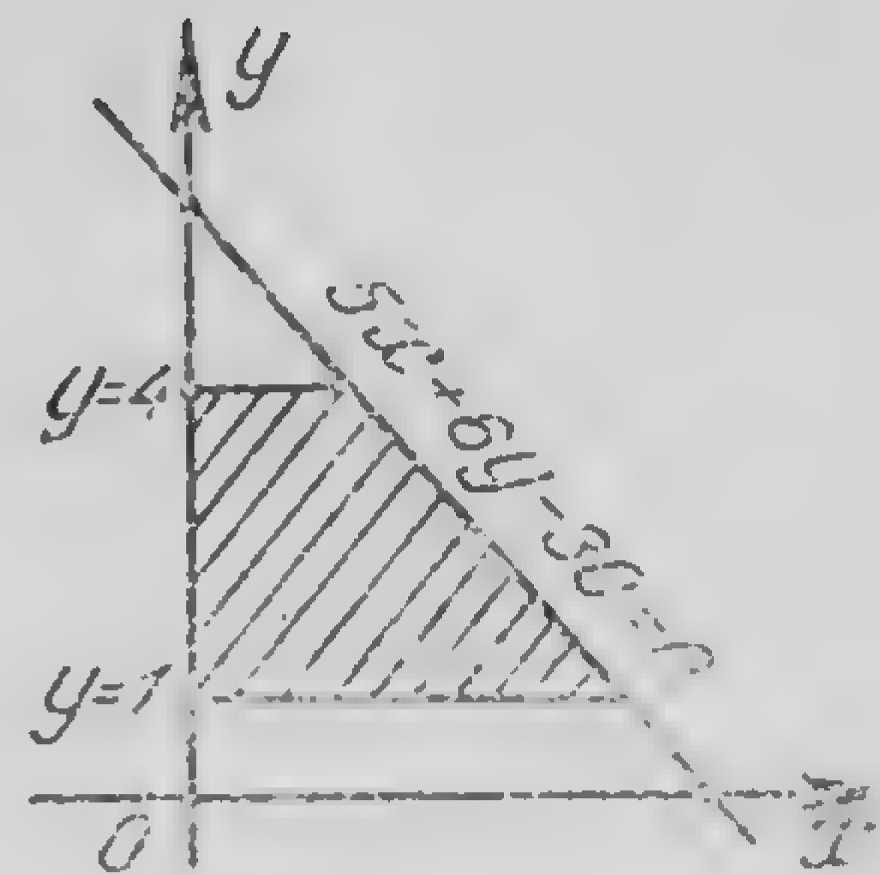


Шәкил 265

$$S=\int_3^6 2x^2\,dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_3^6=$$

$$2(72-9)=126.$$

294. $x=\varphi(y)$ әјриси $x=0$, $y=a$, $y=b$ $(a<b)$ илә һүдудланмыш фигурун саһәси



Шәкил 266

Шәкил 267

$$S=\int_a^b\varphi(y)\,dy$$

дүстуру илә һесабланыр, онда (шәкил 266)

$$S=\int_1^4\varphi(y)\,dy=\int_1^4\left(6-\frac{6}{5}y\right)dy=$$

$$=\left(6y-\frac{3}{5}y^2\right)\Big|_1^4=\frac{72}{5}-\frac{27}{5}=9.$$

295. Ахтарылан саһәни ABD вә CBD дүзбучаглы бучагларын (шәкил 267) саһәләри фәрги кими тапмаг олар:

$$S=S_{ABD}-S_{CBD}.$$

ABD вә CBD үчбучагларынын саһәсини тапмаг үчүн A, C вә D нөгтәләринин абсисләрини тапмаглазымдыр.

$$\begin{matrix}y-x+1=0,\\ y=0\end{matrix}$$

системин һәллиндән A нөгтәсинин абсиси $x=1$,

$$\begin{matrix}2y-7x+42=0,\\ y=0\end{matrix}$$

системин һәллиндән C нөгтәсинин абсиси $x=6$ вә

$$\begin{cases}y-x+1=0\\ 2y-7x+42=0\end{cases}$$

системин һәллиндән D-нин абсиси $x=8$ тапылыр. $y-x+1=0$ тәнлијиндән $y=x-1$ аларыг.

$$S_{ABD}=\int_1^8 (x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}-x\Big]_1^8=24+\frac{1}{2}=24{,}5.$$

$2y-7x+42=0$ тәнлијиндән $y=\frac{7}{2}x-21$.

$$S_{CBD}=\int_1^8\left(\frac{7}{2}x-21\right)dx=7,$$

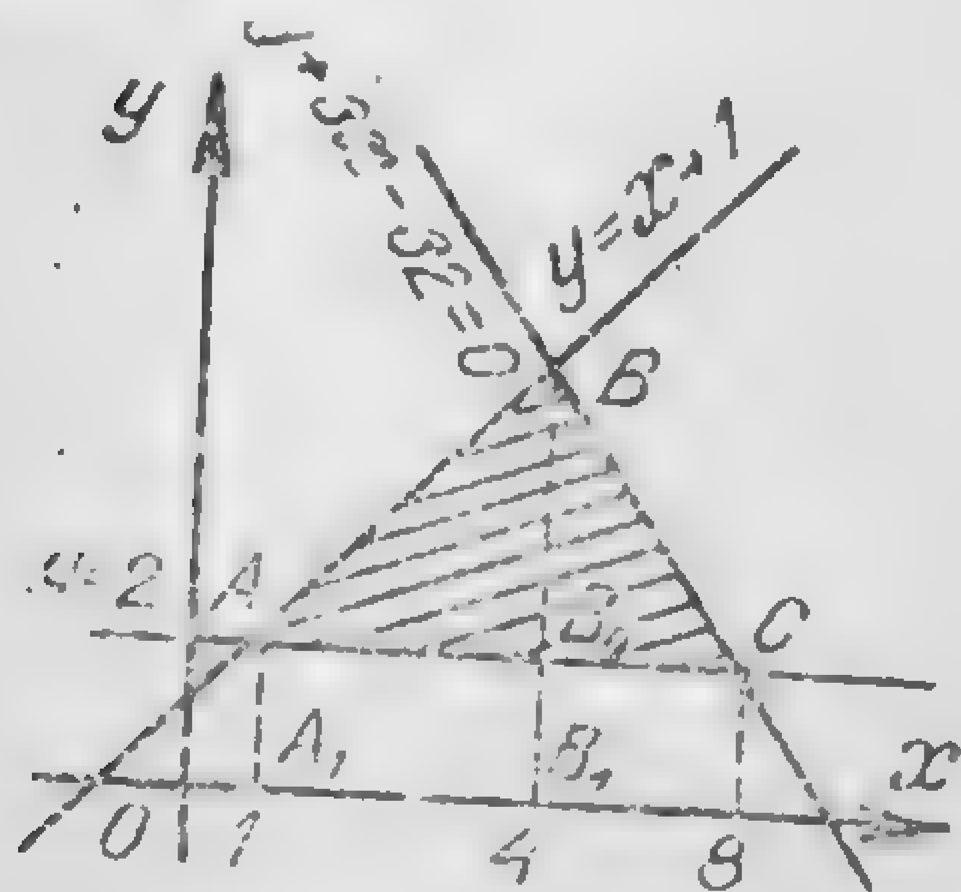
$$S=S_{ABD}-S_{CBD}=24{,}5-7=17{,}5.$$

296. Көстәриш. Ахтарылан үчбучағын саһәси трапесија илә дүзбучаглынын саһәләри фәрги кими тә'јин едилир (шәкил 268):

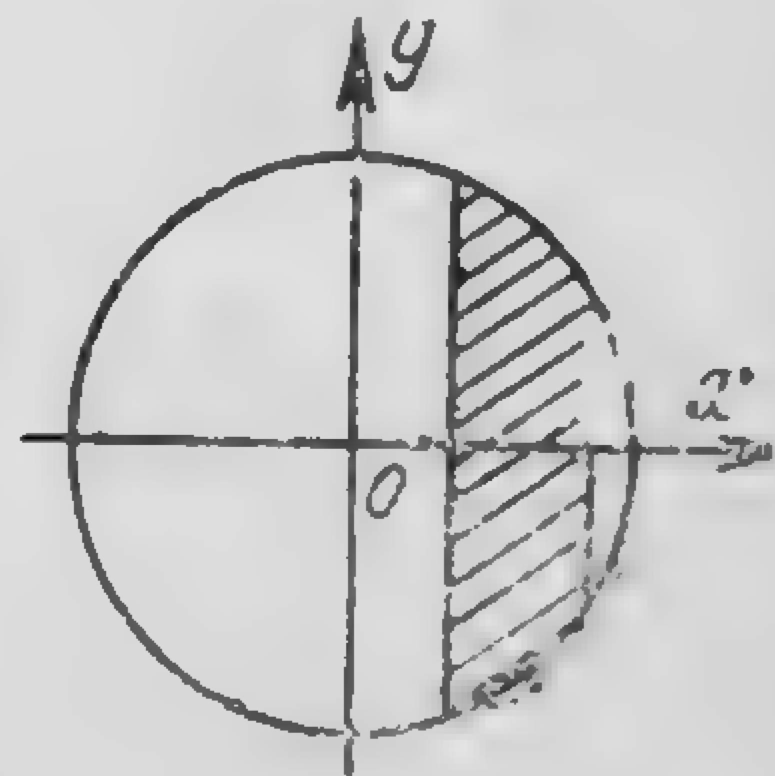
$$S_{ABC}=(S_{A_1ABB_1}-S_{A_1AB_2B_1})+(S_{B_1BCC_1}-S_{B_1B_2CC_1})=$$
$$=S_{AA_1BB_1}+S_{B_1BCC_1}-S_{A_1ACC_1}.$$
$$S_{ABC}=54{,}5.$$

297. Һәмин фигуру x оху ики бәрабәр әјрихәтли трапесијаја ајырыр (шәкил 269). Әјрихәтли трапесин саһәсини $S_1=\int_a^b y\,dx$ дустуруна көрә һесаблајаг. Чеврәнин тәнлијиндән $y=\sqrt{25-x^2}$ алырыг.

$y=\sqrt{25-x^2}$ вә $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ олдуғундан ахтарылан саһә:



Шәкил 233



Шәкил 269

$$S=2S_1=2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{5\sqrt{2}}{2}}\sqrt{25-x^2}\,dx.$$

$x=5\sin t$ əвәз едәк, онда $dx=5\cos t\,dt$. Јени дәјишәнә көрә интегралын сәрһәдләрини тә'јин едәк:

$x=\frac{5}{2}$ олса, $\frac{5}{2}=5\cos t$, $\cos t=\frac{1}{2}$,

бурада $0<t<\frac{\pi}{2}$ олдуғундан $t_1=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ олдугда $t=\frac{\pi}{4}$ олур. Демәли,

$$S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{25-(5\sin t)^2}\cdot 5\cos t\,dt=50\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=50\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=25\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=25\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{25}{12}(\pi+3\sqrt{3}-6).$$

298. Саһәси ахтарылан фигур ABC әјрихәтли үчбучагдан ибарәтдир (шәкил 270). Ахтарылан саһәни тапмаг үчүн A нөгтәсинин абсисини билмәк лазымдыр.

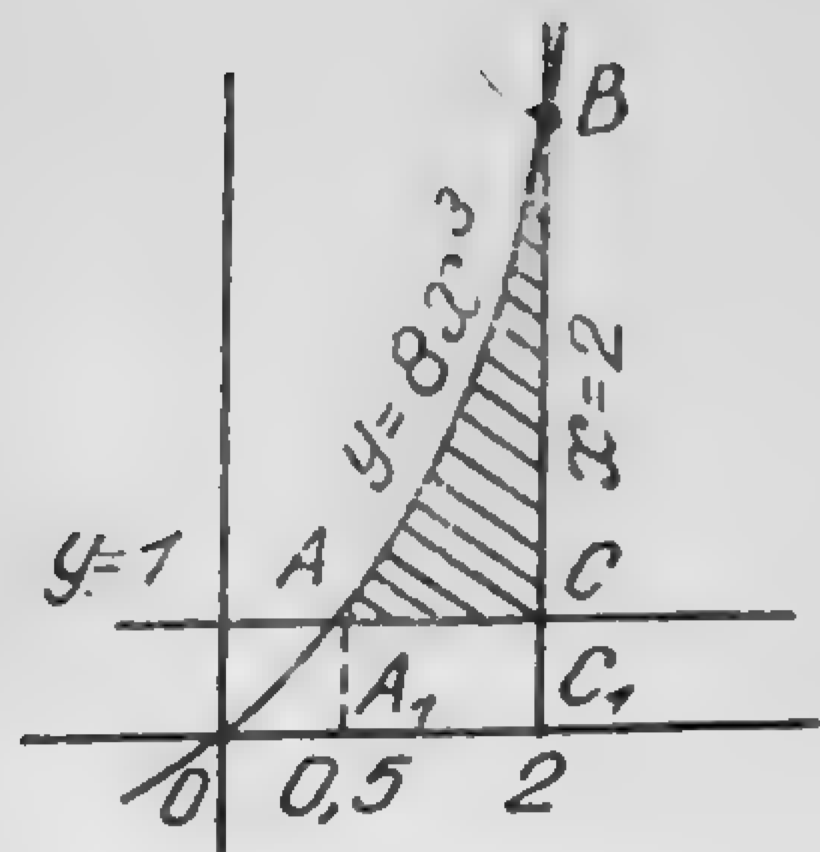
$$\begin{cases} y=8x^3 \\ y=1 \end{cases}$$

системинин һәллиндән $x=\frac{1}{2}$ интегралынын ашағы сәрһәди тапылыр. Ахтарылан саһә A_1ABC_1 вә A_1ACC_1 фигурларынын саһәләри фәрги кими тә'јин едилир:

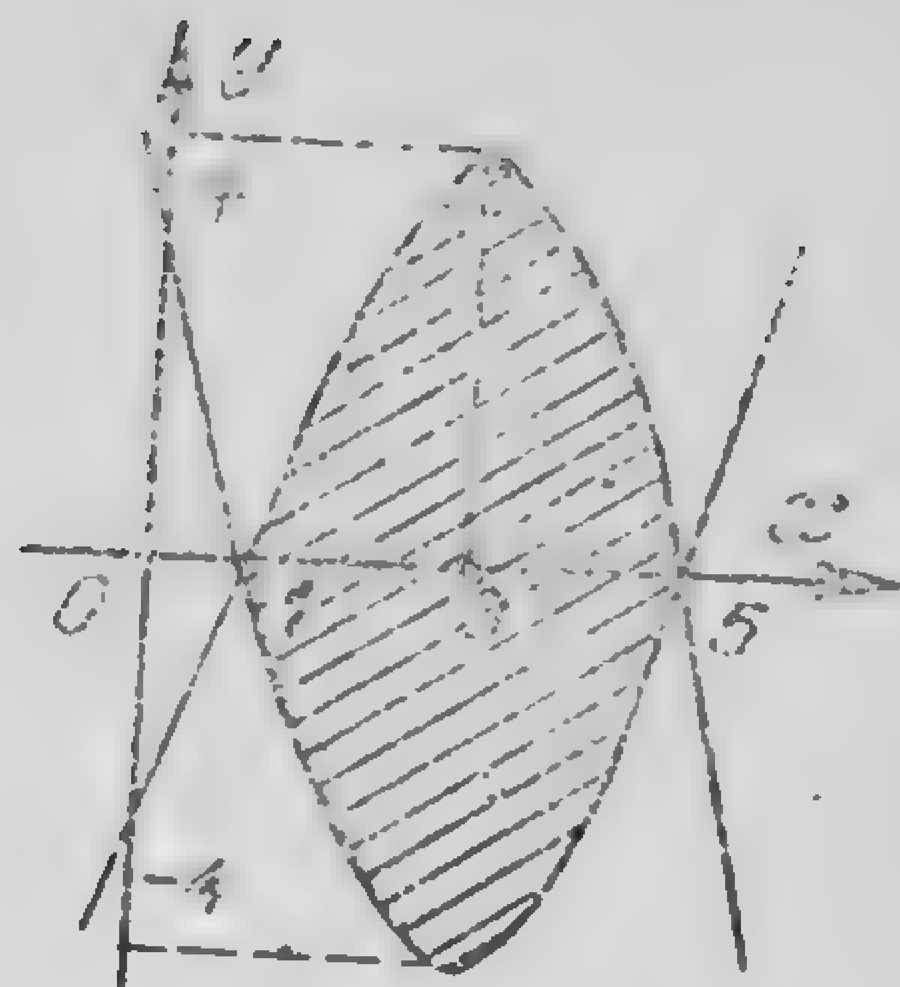
$$S=S_{A_1ABC_1}-S_{A_1ACC_1}$$

Бурада

$$S_{A_1ACC_1}=A_1A\cdot A_1C=1{,}5$$



Шәкил 270



Шәкил 271

$$S_{A_1ACC_1} = \int_{0,5}^{2} 8\cdot x^3\,dx = 8\cdot\frac{x^4}{4}\Big]_{0,5}^{2} = 32 - \frac{1}{8} = 31\frac{7}{8},$$

$$S = 30\frac{3}{8}.$$

299. Әјриләрин кәсишмә нөгтәләринин абсисләрини тапмаг үчүн верилән тәнликләри биркә һәлл едәрәк, $x_1 = 1$ вә $x_2 = 5$ алырыг. $y = x^2 - 6x + 5$ вә $y = -x^2 + 6x - 5$. Әјриләри илә һүдудланмыш саһә (шәкил 271)

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

шәртә көрә, бурада $a = 1$ вә $b = 5$

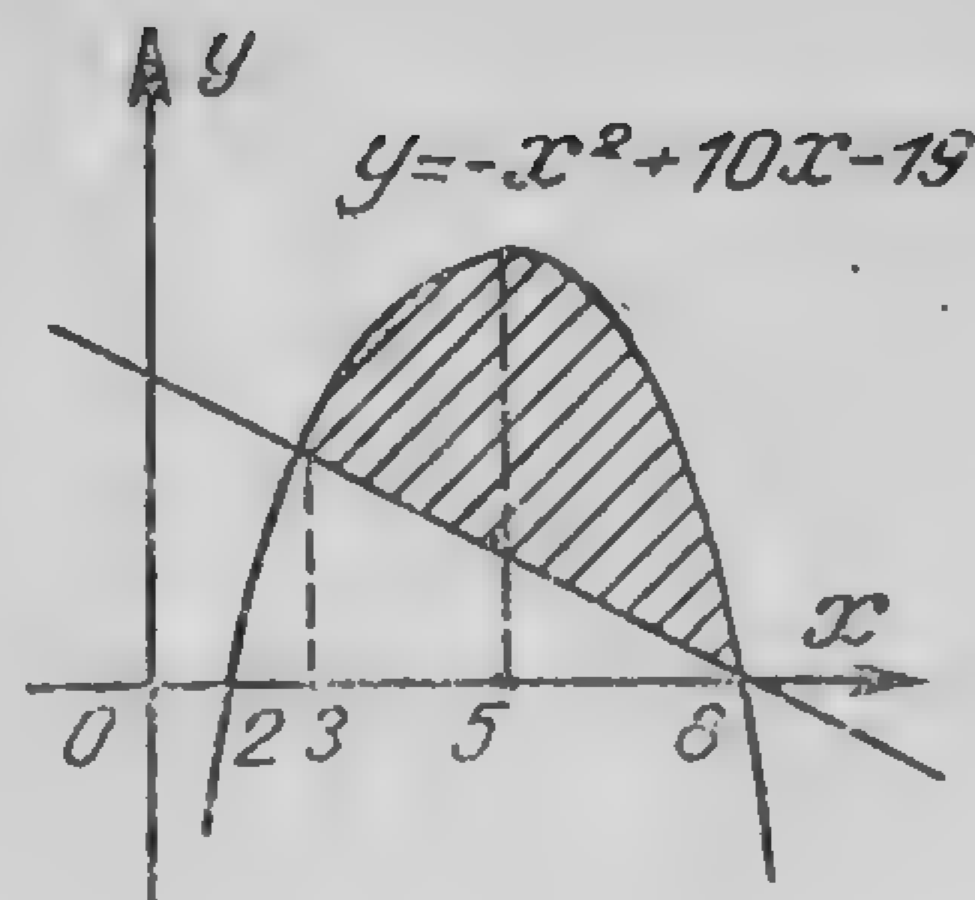
$y = f_1(x) = -x^2 + 6x - 5$ вә $y = f_2(x) = x^2 - 6x + 5$ олдуғундан

$$S = \int_1^5 [-x^2 + 6x - 5 - (x^2 - 6x + 5)]\,dx =$$

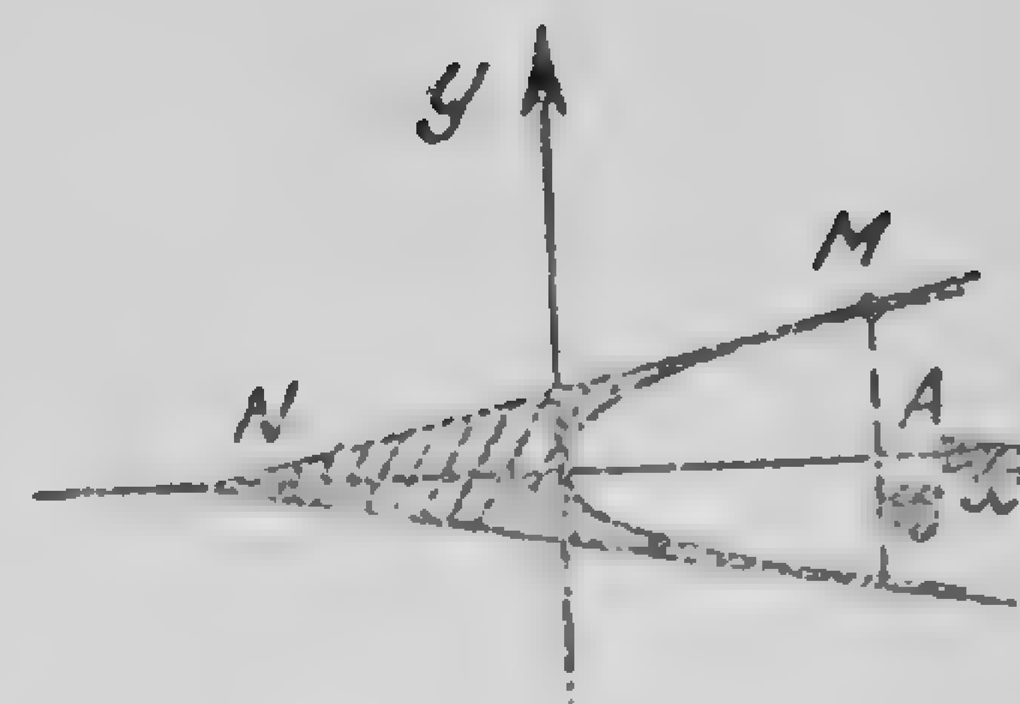
$$= \int_1^5 (-2x^2 + 12x - 10)\,dx =$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} - 5x\right]_1^5 = 21\frac{1}{3}.$$

300. $\begin{cases} y = -x^2 + 10x - 19 \\ 5y + 3x - 24 = 0 \end{cases}$



Шәкил 272



Шәкил 273

тәнлик системинин һәллиндән $x_1 = 3$ вә $x_2 = 8$ интегралын сәрһәдләри тапылыр (шәкил 272). Шәкилдә чизкиләнмиш фигурун саһәси:

$$S = \int_3^8 [(-x^2 + 10x - 19) + \left(-\frac{3}{5}x + \frac{21}{5}\right)dx =$$

$$= \int_3^8 \left(-x^2 + 10\frac{3}{5}x - 23\frac{4}{5}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 10\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2}{2} - 23\frac{4}{5}x\right]_3^8 = 10\frac{5}{6}.$$

301. Ахтарылан саһәни штрихләјәк (шәкил 273). Тохунма нөгтәләринин абсиси $x = 16$ исә, онда ординатлар $y = 4$ вә $y = -4$ олур. Инди тохунанын тәнлијини тапаг: бучаг әмсалыны тә'јин едәк.

$$y - 4 = k(x - 16),\quad k = y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big]_{x=16} = \frac{1}{8}$$

$$y - 4 = \frac{1}{8}(x - 16),\ \text{јахуд}\ y = \frac{1}{8}x + 2.$$

N нөгтәсинин координатлары

$$\begin{cases} y = \frac{1}{8}x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

системинин һәллиндән тапылыр:

$$x = -16 \text{ вә } y = 0.$$

$$|NA| = |NO| + |OA| = 16 + 16 = 32.$$

$|MA| = 4$ олдуғундан $S_{NAM} = \frac{1}{2}|NA|\cdot|MA| = \frac{1}{2}\cdot 32\cdot 4 = 64$. $x - y^2 = 0$ тәнлијиндән $y = \sqrt{x}$ олар.

$$S_{OMA} = \int_0^{16}\sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg]_0^{16} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^{16} = \frac{2}{3}\cdot 64 = 42\frac{2}{3}.$$

Ајдындыр ки, NOM фигуру NOP илә x охуна нәзәрән симметрик олуб, $NOM = NOP$. Онда ахтарылан саһә

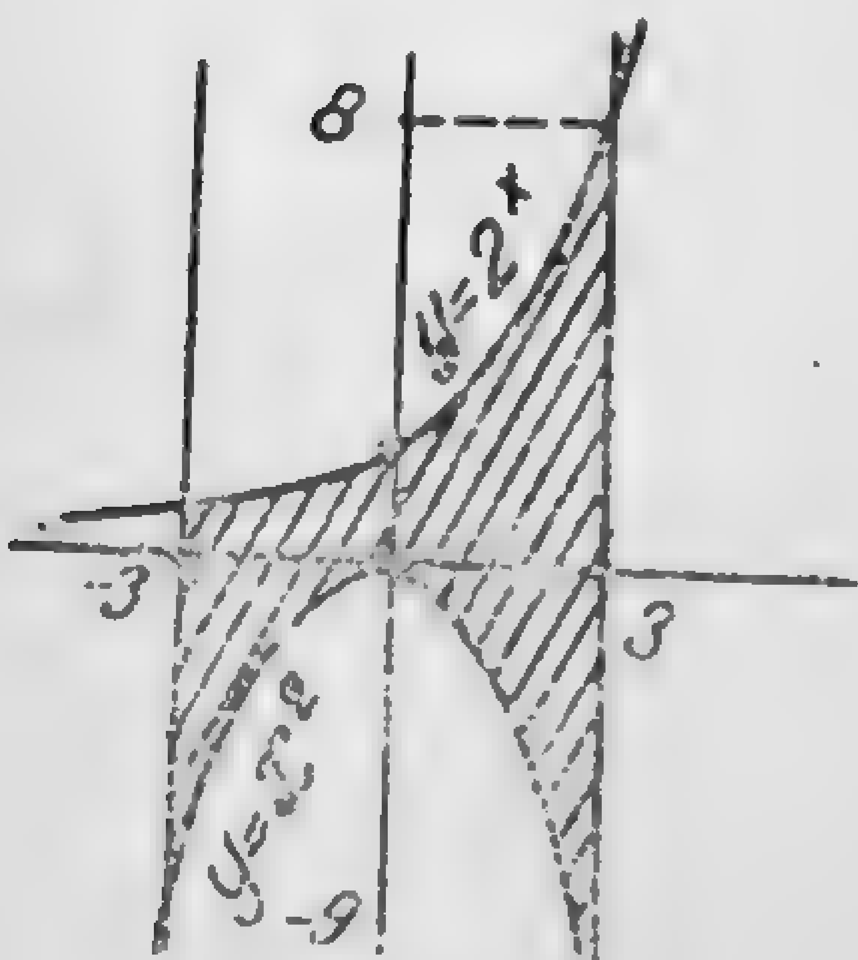
$$S = 2(S_{NAM} - S_{OMA}) = 2\left(64 - 42\frac{2}{3}\right) = \frac{128}{3}.$$

302. Ахтарылан саһә (шәкил 274)

$$S = \int_{-3}^{3}(2^x + x^2)\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{63}{8\ln 2} + 18$$

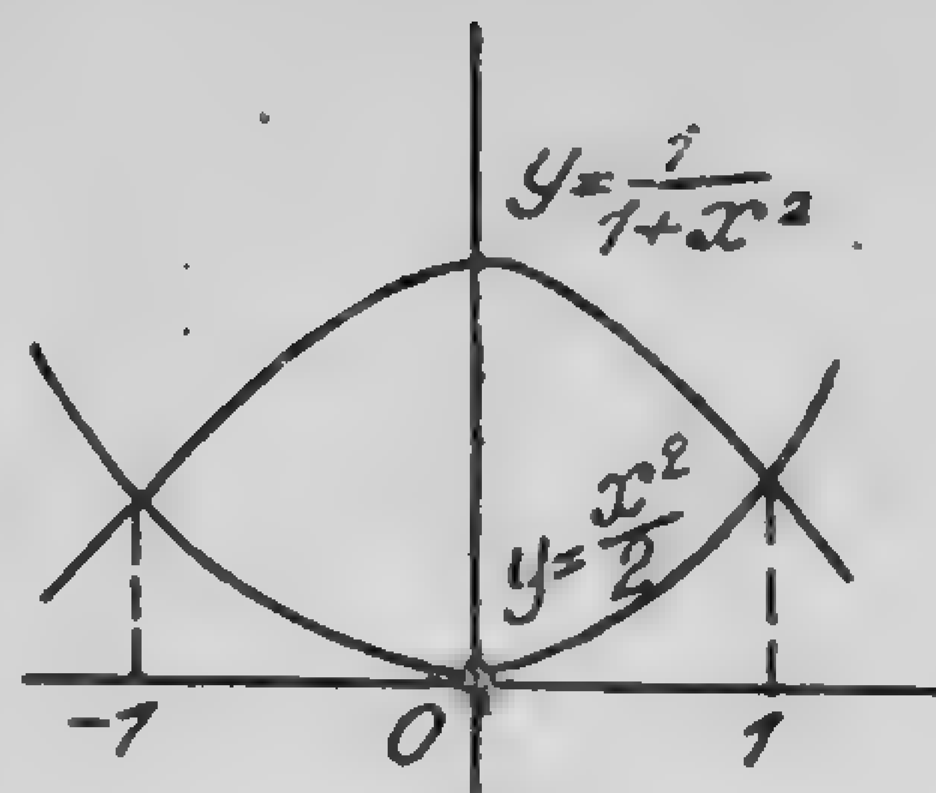
кими һесабланыр.

303. $y = \frac{1}{1+x^2}$ вә $y = \frac{1}{2}x^2$ әјриләринин (шәкил 275) кәсишмә нөгтәләринин абсисләри $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2$ тәнлијин һәллиндән $x_1 = -1$ вә $x_2 = 1$ интегралын сәрһәдләри олур. Ахтарылан саһә

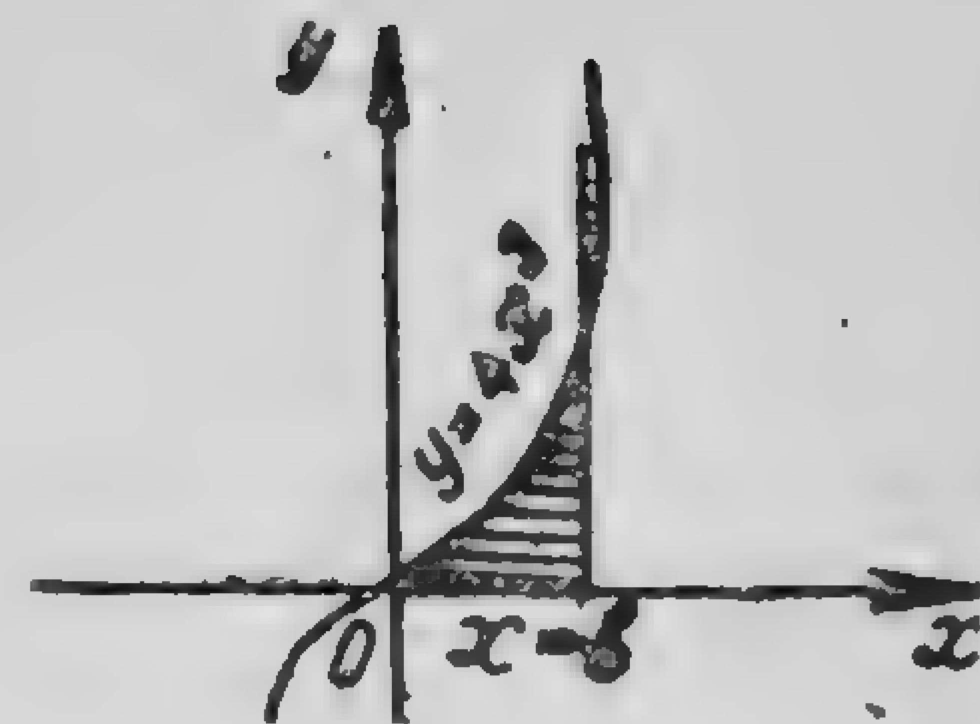


Шәкил 274

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}\cdot x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{3\pi - 2}{6}.$$



Шәкил 275



Шәкил 276

304. Фәрз едәк ки, ахтарылан дүз хәтт ордината охундан b мәсафәдә сағдадыр (шәкил 276). Онда $S = \int_0^b 4x^3\,dx = x^4\Big]_0^b = b^4$, b-ни тә'јин етмәк үчүн $S = 16$ шәртиндән истифадә едәк. $b^4 = 16$, бурадан $b = 2$ вә дүз хәттин тәнлији $x = 2$, $x = b$.

305. Онун үчүн ашағыдакы интегралы һесаблајаг:

$$\int_{a-1}^{a+2}(1+x)^2\,dx = \frac{(1+x)^3}{3}\Bigg]_{a-1}^{a+2} = 3a^2 + 9a + 9.$$

Шәртә көрә $3a^2 + 9a + 9 = 7(2a+1)$. Бурадан $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{2}{3}$. $a_1 = 1$ оларса, $S_1 = 7(2a+1) = 21$ вә $a_2 = \frac{2}{3}$ олдугда исә $S_2 = 7(2a_2 + 1) = \frac{49}{3}$.

306. Ахтарылан һәчми

$$V = \pi\int_0^4 (3x)^2\,dx = 9\pi\int_0^4 x^2\,dx = 9\pi\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg]_0^4 = 192\pi.$$

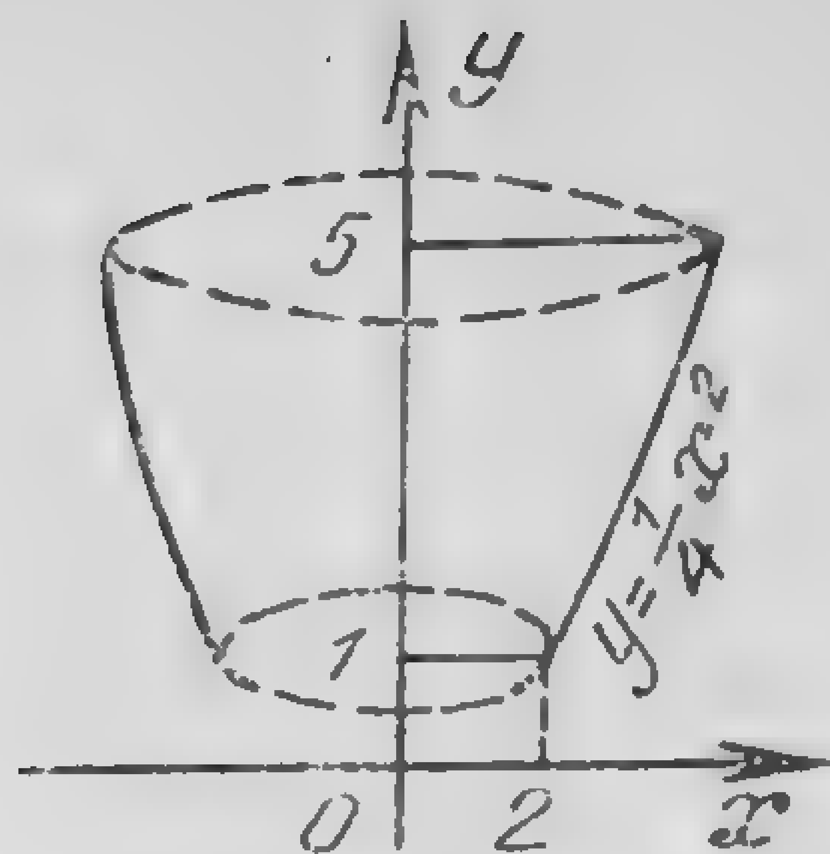
307. Ахтарылан һәчм

$$V = \pi\int_2^4 x^2\,dy = \pi\int_2^4\frac{y^2}{9}\,dy = \frac{\pi}{9}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg]_2^4 = \frac{\pi}{27}[64 - 8] = \frac{56\pi}{27}$$

303. Һәчм (шәкил 277):

$$V = \pi\int_3^{12}\frac{16}{x^2}\,dx = -16\pi\cdot\frac{1}{x}\Bigg]_3^{12} = -16\pi\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi.$$

Шәкил 277



Шәкил 278

309. Һәчм дүстуруна көрә (шәкил 278):

$$V=\pi\int_1^5 x^2\,dy=\pi\int_1^5 4y\,dy=4\pi\int_1^5 y\,dy=4\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Big]_1^5=$$

$$=2\pi y^2\Big]_1^5=2\pi(25-1)=48\pi.$$

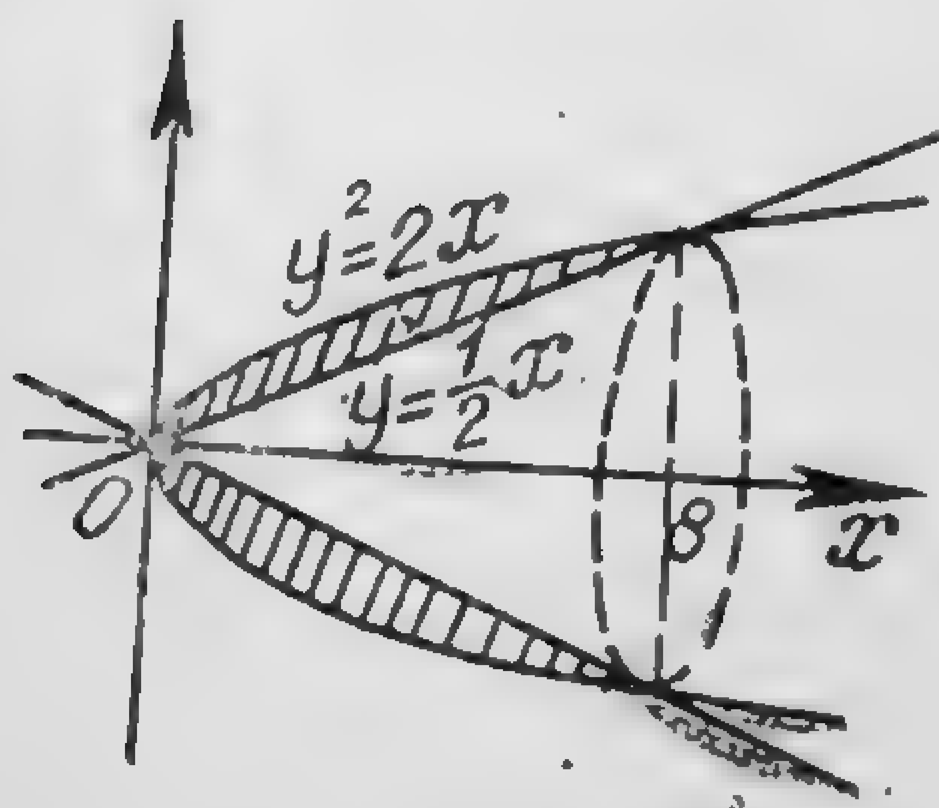
310. Ахтарылан һәчм

$$V=\pi\int_1^4 (25-x^2)\,dx=\pi\left[25x-\frac{x^3}{3}\right]_1^4=$$

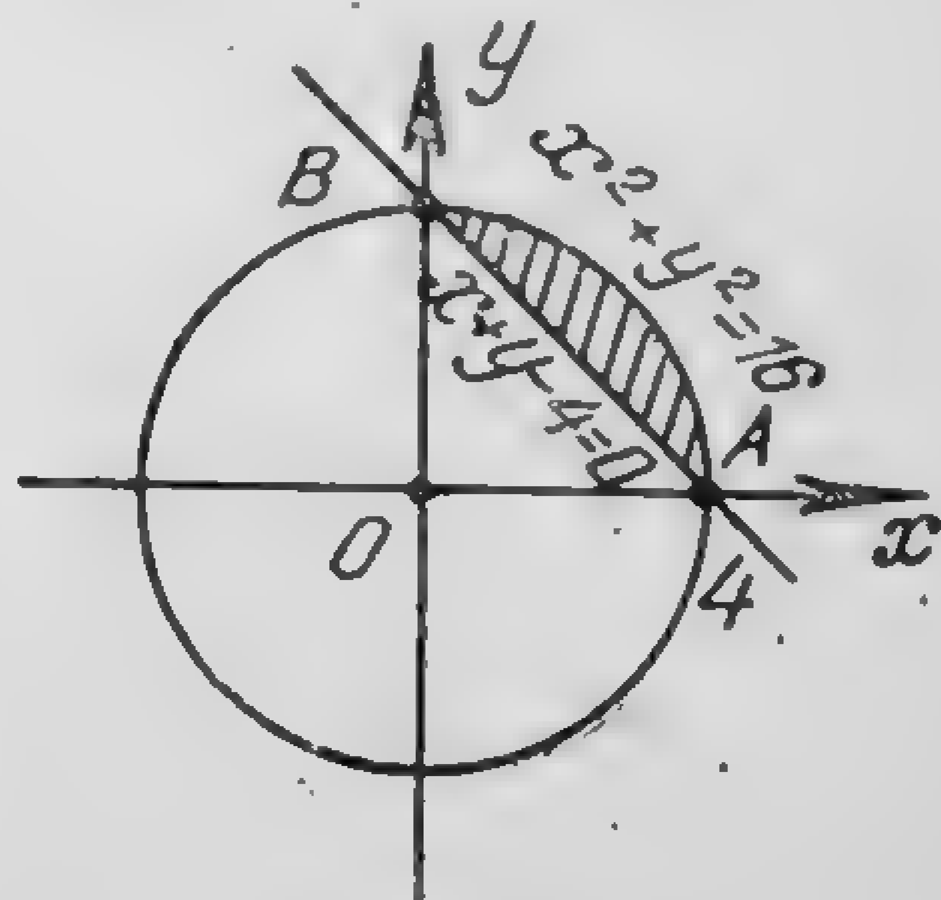
$$=\pi\left(75\frac{1}{3}-21\frac{1}{3}\right)=54\pi.$$

311. *Чаваб.* $V=\frac{64\pi}{3}$, $\frac{34\sqrt{17}+48\sqrt{5}}{3}\cdot\pi$. ***Көстәриш.*** 279-чу шәкилдән истифадә един.

312. $x^2+y^2=16$ вә $x+y-4=0$ (шәкил 280) хәт-



Шәкил 279



Шәкил 280

ләринин кәсишмә нөгтәләринин координатлары (4, 0) вә (0; 4) олдуғу ајдындыр. Ахтарылан һәчм,

$x^2+y^2=16$, $x=0$, $y=0$ вә $x+y-4=0$, $x=0$, $y=0$

хәтләри илә һүдудланмыш фигурларын Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан һәчмләрин [illegible] кими һесабланыр.

Онда

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^4(16-x)^2\,dx-\pi\int_0^4(4-x)^2\,dx$$

$$=\pi\left(4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=\frac{64}{3}\pi.$$

AB дүз хәтт парчасынын Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһ конусун јан сәтһи олдуғундан

$$S_{AB}=\pi\,|AB|\cdot|BO|=4\cdot4\sqrt{2}\cdot\pi=16\sqrt{2}\pi.$$

AB гөвсүнүн фырланмасындан әмәлә кәлән сәтһ $S=2\pi R^2=2\cdot4^2\pi=32\pi$, јә'ни күрә сәтһинин јарысына бәрабәр олдуғундан, фырланмадан алынан сәтһин саһәси

$$S=S_{AB}+S_{AB}=(16\sqrt{2}+32)\pi.$$

$$S=(16\sqrt{2}+32)\pi.$$

313. Аналожи олараг алынан һәчм (шәкил 281):

$$V=\pi\int_1^2(2x)^2\,dx-\pi\int_1^2[2^x]^2\,dx=$$

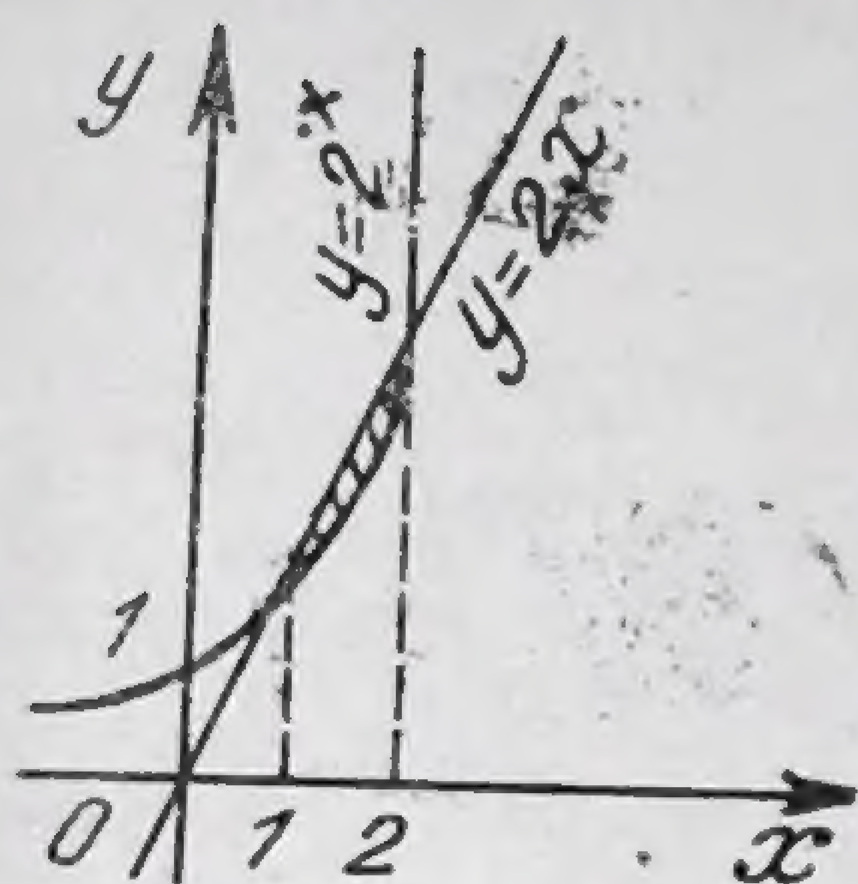
$$=\pi\left[\frac{4}{3}\cdot x^3-\frac{4^x}{\ln 4}\right]_1^2=\pi\left(\frac{28}{3}-\frac{12}{\ln 4}\right).$$

314. Фырланмадан алынан чисмин һәчми ашағыдакы интегралла һесабланыр:

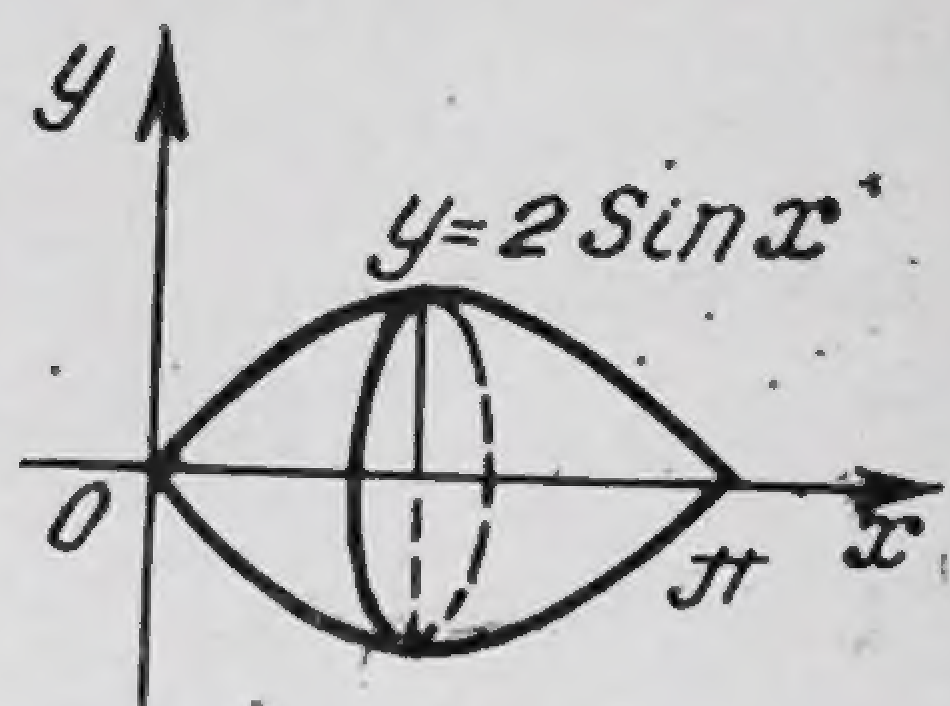
$$V=\pi\int_0^\pi 4\sin^2x\,dx=2\pi\int_0^\pi(1-\cos 2x)\,dx=$$

$$=2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=2\pi^2.$$

(шәкил 282).



Шәкил 281



Шәкил 282

XIII. МАКСИМУМ ВӘ МИНИМУМА АИД МӘСӘЛӘЛӘР

315. Көстәриш: Дүзбучаглынын отурачағы x вә јан тәрәфи y олса, онда фигурун периметри $P = 2y + 3x$, $y = \frac{P - 3x}{2}$ вә ахтарылан саһә

$$S(x) = xy + \frac{\sqrt{3}\cdot x}{4} = \frac{x}{4}\left(2P - (6-\sqrt{3})\,x\right).$$

$$S'(x) = \frac{6-\sqrt{3}}{2}\left(\frac{P}{6-\sqrt{3}} - x\right);\quad S'(x) = 0,$$

бурадан $x = \frac{P}{6-\sqrt{3}}$.

$x < \frac{P}{6-\sqrt{3}}$ олса, төрәмә мүсбәт, $x > \frac{P}{6-\sqrt{3}}$ олса, мәнфи вә $x = \frac{P}{6-\sqrt{3}}$ олса, сыфра бәрабәр олдуғундан $S(x;y)_{max}$ гијмәти $x = \frac{P}{6-\sqrt{3}}$ вә $y = \frac{P(3-\sqrt{3})}{3(6-\sqrt{3})}$ олдугда алыр.

319. Көстәриш. Пәнҹәрәнин отурачағы x вә һүндүрлүјү y олса, онда периметри $P = 2y + x + \frac{2\pi x}{3\sqrt{3}}$, бурада $x = R\sqrt{3}$. Пәнҹәрәнин саһәси $S(x; y) = x\cdot y + (S_{сект} - S_{\Delta})$. Бурада

$$y = \frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{3\sqrt{3}};\quad S_{сект} = \frac{\pi x^2}{9},\quad S_{\Delta} = \frac{1}{4\sqrt{3}}x^2.$$

$$S(x) = \frac{Px}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right)x^2$$

функсијасынын тәдгигиндән пәнҹәрәнин өлчүләри тапылыр.

320. Көстәриш. Фәрз едәк ки, буҹағы α радиан олан сектор кәсилмишдир. Онда галан һиссә конус шәклиндә бүкүлдүкдә конусун һүндүрлүјү

$$h = R\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi - \alpha}{2\pi}\right)^2},$$

отурачаг радиусу $r = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}\cdot R$. Бурада $\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2 = x$ ишарәси етсәк, онда мәсәләнин һәлли $x\sqrt{1-x}$ ифадәсинин максимумунун тапылмасына кәлир ки, $x = \frac{2}{3}$, јә'ни гыфын һәҹминин максимум олмасы үчүн галан секторун буҹағы

$$2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{рад} \approx 294^\circ.$$

321. Көстәриш: $S = S_1 + S_2$, бурада

$$S_1 = t^3 - \int_0^1 t^2dt = \frac{2}{3}t^3 \ \text{вә}$$

$$S_2 = \int_t^1 t^2\,dt - t^2(1-t) = \frac{1}{3} - t^2 + \frac{2}{3}t^3 \ \text{олдуғундан}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3},\quad (S_1 + S_2)^1 = 2t(2t-1).$$

Бу төрәмә $0 < t < \frac{1}{2}$ үчүн мәнфи, $t > \frac{1}{2}$ үчүн мүсбәт вә $t = \frac{1}{2}$ гијмәтиндә сыфра бәрабәр олдуғундан

$t = \frac{1}{2}$ олса, $(S_1 + S_2)_{min} = \frac{1}{4}$ вә

$t = 1$ олса, $(S_1 + S_2)_{max} = \frac{3}{2}$.

Мәсәләнин һәндәси һәлли $y = x^2$ әјрисинин $x = \frac{1}{2}$ дүз хәттинә нәзәрән симметрик олмасына әсасланыр.

322. Көстәриш: Абсис оху үзәриндә $M(x; 0)$ нөгтәсини гејд едәк. Онда

$$|AM| = \sqrt{x^2+9} \text{ вә } |MB| = \sqrt{(x-4)^2+25}$$

олдуғундан

$$S(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(x-4)^2+25}$$

функсијасынын төрәмәнин тәтбиги илә $S(x)$ минимум гијмәти $x = 1{,}5$ олдугда тапылыр.

323. Көстәриш: Силиндрин отурачаг радиусу x вә һүндүрлүјү H олса, онун һәчми $V(x) = \pi x^2 H$, бурада $H = 2\sqrt{R^2-x^2}$, $V(x) = 2\pi x\sqrt{R^2-x^2}$ функсијасынын тәдгигиндән

$$V_{max} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R.$$

324. Көстәриш: Силиндрин отурачағынын радиусу x олса, онун там сәтһи $S(x) = 2\pi x(x+H)$, бурада $H = 2\sqrt{R^2-x^2}$. $S(x) = 2\pi x(x+2\sqrt{R^2-x^2})$, функсијанын тәдгигиндән $S = \pi R^2(1+\sqrt{5}) \approx 81\%$ күрәнин сәтһинин 81% тәшкил едир.

325. Көстәриш: Мәркәзи бучағы

$$\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ рад} \approx 294°$$

олан сектордан (бах: 322 №-ли мәсәләнин һәллинә) ән бөјүк һәчмли конус алыныр. Бу секторун гөвсүнүн узунлуғу $l = \frac{\pi k\alpha°}{180°}$. $2\pi r = \frac{\pi R\alpha°}{180°}$, бурадан силиндрин радиусу $r = \frac{\alpha° R}{360°}$.

326. Көстәриш: Конусун һәчми $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, бурада $R = x$ гәбул етсәк, $l^2 = R^2 + H^2$ дүстурундан $H = \sqrt{l^2-x^2}$ вә һәчм $V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{l^2-x^2}$ функсијасынын тәдгигиндән $V_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$.

МҮНДӘРИЧАТ

Абдуллаев Мамедали Гисмет оглы
Алискендеров Инаят Мустафа оглы

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

СТЕОРЕМЕТРИЯ

(с решениями)

(на азербайджанском языке)

Редактору *И. И. Әлијев*
Чилдинин рәссамы *М. Һ. Мәһәррәмов*
Бәдии редактору *Е. А. Чәлилов*
Техники редактору *Ә. Г. Рәһимов*
Корректорлары *Е. М. Әлизадә, С. М. Ағајева*

ИБ—2150

Јығылмаға верилмиш 01.11.83. Чапа имзаланмыш 10.04.85. Кағыз форматы $84 \times 108^1/_{32}$. Мәтбәә кағызы № 2 Латын гарнитуру. Јүксәк чап. Физики чап вәрәги 8,75. Шәрти ч. в. 14,7. Шәрти рәнк.-оттиск 15,12. Учот нәшр. вәрәги 10,6. Тиражы 7500. Сифариш № 193. Чилдлә гијмәти 50 гәп.

Азәрбајчан ССР Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тичарәти Ишләри Комитәсинин «Маариф» нәшријјаты, Бакы 370111, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азәрбајчан ССР Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тичарәти Ишләри Комитәсинин 3 №-ли Бакы Китаб мәтбәәси, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азербайджанское государственное издательство учебно-педагогической литературы «Маариф», г. Баку,, ул. А. Тагизаде, № 4.

Бакинская Книжная типография № 3, г. Баку, ул. А. Тагизаде, № 4.

50 тэп.